УДК 517.956

Р.К. Керімбаев *, Ж.А. Ахметова **

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, механика-математика факуельтеті, Іргелі математика кафедрасы, Қазақстан Республикасы, қ. Алматы
E-mail: * ker_im@mail.ru; ** ja_mila@list.ru

Керіленетін көпмүшелер

Мақалада якобиан проблемасының бір өлшемді аналогы қарастырылады. Көпмүшелер ра ционал сандар өрісінде алгебра болып таблатын коммутативті сақинада қарастырылады. Көпмүшелердің суперпозиция амалы бойынша керілену жағдайы келтірілген. Туындысы керіленген жағдайда ғана көпмүше суперпозиция амалы бойынша керіленетіні көрсетілген Сонымен бірге суперпозиция амалы бойынша кері көпмүшені табу алгоритмі келтірілген.
Негізінде, якобиан проблемасы өріс үстинде қарастырылады. Сонымен бірге, характеристи касы нөлден үлкен өрістерде бұл проблема орындалмайды. Бұл жағдайда якобиан пробле масының шешімі басқаша болады. Характеристикасы нөл өріс үстіндегі бір өлшемді якобиан проблемасының шешілуі оңай. Бұл кезде тек бірінші дәрежелі көпмүшелердің суперпозиция амалы бойынша кері көпмүшелері бар болады. Дәлірек айтсақ, x айнымалыларының коэф фициенттері нөлден өзгеше болуы керек те, ал қалған бос емес коэффициенттері нөлге тең болуы керек. Қазіргі уақытта якобиан проблемасы екі және одан көп айнымалы көпмүшелер сақинасы үшін шешілмеген.
Негізгі нәтіже осы проблеманың шешілуі сызықты және үшінші дәрежелі біртекті компо ненталары бар көпмүшелер үшін шешуге әкеліп тіреледі. Келлер көпмушелерінен құралған полиномиалды бейнелеу инъективті болған жағдайда якобиан проблемасы шешілетіні бел гілі. Бұл жағдайда якобиан проблемасы шешілуі үшін негізгі өріс алгебралық тұйық болуы керек.
Түйін сөздер: Келлер эндоморфизмі, автоморфизм, якобиан.

R.K. Kerimbayev, Zh.A. Akhmetova
Reversible polynomials

In this paper we consider a one dimensional analogue of Jacobian Conjecture. Here polynomials are considered over commutative ring. We have shown that the polynomial is reversible with respect to superposition if and only if its derivative is reversible in the ring of polynomials with respect to usual operation.
Usually Jacobian Conjecture is considered over a field. When the characteristic is positive, there exist a counter example to Jacobian Conjecture. Over the field of zero characteristic, analogue of Jacobian Conjecture is solved easily. In this case Jacobian Conjecture holds for polynomials of the first order, to be more precise, x coefficient must be different from zero, but other non free coefficients must be equal to zero. Currently Jacobian Conjecture for polynomials of two and more variables is still open.
The main result is that we have reduced the Jacobian Conjecture to the Jacobian Conjecture for polynomials with components of linear or third degree. For Keller polynomial mappings Jacobian Problem is reduced to Injection of polynomial mappings. In this case in order to solve the Jacobian Conjecture, the main field is required to be algebraically closed.
Key words: Keller endomorphism, automorphism, jacobian.

Р.К. Керимбаев, Ж.А. Ахметова

Обратимые многочлены

В данной статье рассматривается одномерный аналог проблемы якобиана. Здесь многочлены рассматриваются над коммутативным кольцом являющиеся алгеброй над полем рациональ ных чисел. Приведено условие, когда многочлен обратим относительно операции суперпози ции. Показано, что многочлен обратим относительно операции суперпозиции тогда и только тогда, когда его производная обратима в кольце многочленов относительно обычной опера ции.

Обычно, проблема якобиана рассматривается над полем. Когда характеристика поле поло жительна, есть контрпример к проблеме якобиана. Над полем характеристики ноль одно мерный аналог проблемы якобиана решается легко. В этом случае проблема якобиана верна для многочленов первой степени, точнее коэффициент при x должен быть отличен от нуля, а остальные несвободные коэффициенты равны нулю. Данное время проблема якобиана для многочленов от двух или более переменных не решена.

Основной результат состоит в том, что решение проблемы якобиана сведено к решению про блемы якобиана для многочленов с компонентами линейной и кубической степени. Для кел леровых полиномиальных отображений решение проблемы якобиана равносильно инъектив ности полиномиальных отображений. В этом случае для решение проблемы якобиана необ ходимо, чтобы основное поле было алгебраически замкнутый.

Ключевые слова: Эндоморфизм Келлера, автоморфизм, якобиан.

Негізгі нәтиже

K Q - алгебра болатын коммутативті сақина болсын. $K[x]$ көпмүшелер сақинасы. $f(x) \in K[x]$ осы сақинада берілген қандайда бір көпмүше. Егер $f(x) \cdot g(x) = 1$ болатын $g(x) \in K[x]$ көпмүшесі табылса, онда $g(x) = f(x)^{-1}$ деп белгілеп $g(x)$ көпмүшесін $f(x)$ көпмүшесіне $K[x]$ сақинасындағы кері көпмүшесі деп атаймыз. Егер $f(h(x))=x=h(f(x))$ болатын $h(x) \in K[x]$ көпмүшесі табылса, онда $h(x) = f^{-1}(x)$ деп белгілеп, оны $f(x)$ көпмүшесінің суперпозиция бойынша кері көпмүшесі деп атаймыз. Келесі тұжырым көпшілікке белгілі.

Тұжырым. *$f(x)$ көпмүшесі $K[x]$ сақинасында керіленуі үшін оның еркін коэффициенті K сақинасында керіленіп, ал қалған коэффициенттері K сақинасында нильпотенетті болуы қажетті және жеткілікті.*

Тұжырымның дәлелі Атья-Макдональд [1] кітабында келтірілген.

Теорема. *$f(x) \in K[x]$ көпмүшесінің суперпозиция бойынша кері көпмүшесі бар болуы үшін оның $f'(x)$ туындысы $K[x]$ сақинасында керіленуі қажетті және жетклікті.*

Дәлелі. *Қажеттілік.* $f^{-1}(x)$ көпмүшесі бар болсын. Онда $f^{-1}(f(x)) = x$ теңдігін туындылай отырып $f^{-1}(f(x))' \cdot f'(x) = 1$ теңдігін аламыз. Яғни $f'(x)$ көпмүшесі $K[x]$ сақинасында керіленеді.

Жеткіліктілік. Енді $f'(x)^{-1}$ көпмүшесі бар болсын дейік. Онда $f(x)$ көпмүшесі $K[x]$ сақинасында базис екенін көрсетеміз. Шынында да, $P(x) \in K[x]$ көпмүшесі $P(f(x)) = 0$ теңдігін қанағаттандыратын дәрежелі ең кіші көпмүше болсын. Олай болса, $P'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ болады. $f'(x)^{-1}$ бар болғандықтан $P'(f(x)) = 0$ болады. Бірақ $\deg P'(x) < \deg P(x)$ болғандықтан $P'(x) \equiv 0$. Ендеше $P(x) \equiv const$. Қайшылық. Енді $x \in K[f(x)]$ екенін көрсетеміз: $f(x) = x + ax^2 + bx^3 + \ldots + cx^n$ болсын. $f'(x)^{-1}$ бар болғандықтан, тұжырым бойынша, $a, b, \ldots, c$ коэффициенттері K сақинасында нильпотенетті болады. Сонда

$$x = f(x) - ax^2 - bx^3 - \ldots - cx^n$$

деп алып x тің орнына қайтадан осы өрнекті қойып келесі теңдікті аламыз.

$$x = f(x) - a(f(x) - ax^2 - bx^3 - \ldots - cx^n)^2 -$$

$$-b(f(x) - ax^2 - bx^3 - \ldots - cx^n)^3 - \ldots$$

$$\ldots - c(f(x) - ax^2 - bx^3 - \ldots - cx^n)^n =$$

$$= f(x) - af(x)^2 - bf(x)^3 - \ldots - cf(x)^n - h(x).$$

$h(x)$ көпмүшесінің коэффициенттерінің нильпотентті индекстері төмендейді. Осы итерацияны жалғастыра отырып, біз, ең соңында тек қана $f(x)$ көпмүшесіне байланысты көпмүше аламыз. Яғни $x \in K[f(x)]$.

Сонымен, кез келген $g(x) \in K[x]$ көпмүшесі үшін $g(x) = h(f(x))$ түрінде болатын жалғыз ғана $h(x) \in K[x]$ көпмүшесі табылады. Яғни $f(x)$ көпмүшесі $K[x]$ сақинасында базис болады. Енді $f^{-1}(x)$ көпмүшесін табу үшін келесі алгоритмді қолданамыз.

Кері көпмүшені табу алгоритмі.

1) $f'(x)$ көпмүшесін табамыз;

2) $f'(x)^{-1}$ көпмүшесін табамыз;

3) $f'(x)^{-1} = g'(f(x))$ болатындай $g' \in K[x]$ көпмүшесін табамыз. Сонда

4) $f^{-1}(x) = g(x) = \int g'(x)dx$, $g(0) = 0$.

Шынымен де, $f^{-1}(f(x)) = g(f(x))$ болады.

Екі жағын туындылап, 3) бойынша

$$(f^{-1}(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

екенін көреміз. Оны интегралдап

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

екенін көреміз. Теорема дәлелденді.

Мысал

Біз енді $K[x]$ сақинасындағы $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесі үшін $f^{-1}(x)$ бар болған жағдайда оның формуласын есептеп шығарамыз. Ол үшін $f(x)^{-1}$ бар болуы керек, яғни a нильпотентті болуы керек.

Сөйлем. $K[x]$ сақинасында $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесі берілсін, ал $a \in K$ нильпотентті индексі m ге тең болсын. Сонда $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесінің суперпозиция бойынша кері $f^{-1}(x)$ көпмүшесі келесі формуламен есептелінеді:

$$f^{-1}(x) = x - ax^n + \frac{n}{1}\binom{2n-1}{0} a^2 x^{2n-1} -$$

$$-\frac{n}{2}\binom{3n-1}{1} a^3 x^{3n-2} + \frac{n}{3}\binom{4n-1}{2} a^4 x^{4n-3} +$$

$$(-1)^i \frac{n}{i-1}\binom{in-1}{i-2} a^i x^{in-i+1} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{n}{m-2}\binom{(m-1)n-1}{m-3} a^{m-1} x^{(m-1)(n-1)+1}.$$

Бұл сөйлемнің дәлелі келесі леммаға негізделеді.

Лемма. a) $i \in N$ натурал саны үшін $0 \leq k \leq i-2$ болғанда $S(k,i) = \sum\limits_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^k$ қосындысы нөлге тең.

b) $i \in N$ натурал саны үшін $0 \leq k \leq i-3$ болғанда $R(k,i) = \sum\limits_{j=2}^{i} (-1)^j \binom{i-2}{j-2} j^k$ қосындысы нөлге тең.

c) $S(k,i)$ және $R(k,i)$ қосындыларының арасында келесі байланыс бар:

$$S(k,i+1) - S(k,i) = R(k,i+1).$$

Дәлелі. c) жағдайынан бастайық

$$S(k,i+1) - S(k,i) = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^j \binom{i}{j-1} j^k - \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^k =$$

$$= \sum_{j=2}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j-2} j^k + (-1)^{i+1} \binom{i-1}{i-1} (i+1)^k =$$

$$= \sum_{j=2}^{i+1} (-1)^j \binom{i-1}{j-2} j^k = R(k,i+1).$$

c) жағдайы дәлелденді. a) мен b) жағдайларын қатар дәлелдейміз. Дәлелді k бойынша индукциямен жүргіземіз. $k := 0$ болғанда $S(0,i) = 0 = R(0,i)$ екені белгілі. $k := k$ үшін $S(k,i) = 0$ деп алсақ, онда c) жағдайын пайдаланып $k := k$ үшін $R(k,i) = 0$ екенін көреміз. Енді $S(k+1,i) = 0$ екенін көрсетейік.

$$S(k+1,i) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^{k+1} = \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j-1} (j-1) j^k = S(k,i) + (i-1)R(k,i) = 0.$$

Сонымен, Леммы толық дәлелденді.

Енді Сөйлемнің дәлелін келтірелік. Ол үшін бізге $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$ екенін көрсетсек жеткілікті. Біз $f^{-1}(f(x)) = x$ екенін көрсетеміз. Сонымен Сөйлемдегі $f^{-1}(x)$ көпмүшесінің x аргументіне $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесін қойып $f^{-1}(f(x))$ көпмүшесінің мүшелерінің жалпы формуласын аламыз.

$$f^{-1}(f(x)) = x + ax^n - a(x+ax^n)^n + \frac{n}{1}\binom{2n+1}{0} a^2 (x+ax^n)^{2n-1} -$$

$$-\frac{n}{2}\binom{3n-1}{1} a^3 (x+ax^n)^{3n-2} + \frac{n}{3}\binom{4n-1}{2} a^4 (x+ax^n)^{4n-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^i n}{i-1} a^i (x+ax^n)^{in-i+1} + \ldots +$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{m-1}n}{m-2}\binom{(m-1)n-1}{m-3}a^{m-1}(x+ax^n)^{(n-1)(m-1)+1}.$$

Осы өрнекте біз $a^i x^{in-i+1}$ мүшесінің коэффициентін есептейміз. Ол келесіге тең:

$$-\binom{n}{i-1} + n\binom{2n-1}{i-2} - \frac{n(3n-1)}{2}\binom{3n-2}{i-3} +$$
$$+\frac{n}{3}\binom{4n-1}{2}\binom{4n-3}{i-4} + \ldots + \frac{(-1)^i n}{i-1}\binom{in-1}{i-2}.$$

Біздің мақсатымыз осы коэффициенттің нөлге тең екенін көрсету. Ол үшін алынған формуланы ашып жазамыз:

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!} + \frac{n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(2n-i+2)}{(i-2)!} -$$
$$-\frac{n(3n-1)(3n-2)(3n-3)\ldots(3n-i+2)}{2\cdot(i-3)!} + \frac{n(4n-1)(4n-2)(4n-3)\ldots(4n-i+2)}{3\cdot 2\cdot(i-4)!} +$$
$$+\ldots + (-1)^i \frac{n(in-1)(in-2)(in-3)\ldots(in-i+2)}{(i-1)(i-2)!}.$$

Алынған өрнекті n нің дәрежесі бойынша жіктеп, n^{k+1} дәрежесінің коэффициентін ортақ көбейткішке дейінгі дәлдікпен есептейміз, мұндағы $0 \leq k \leq i-2$.

$$-\frac{1}{(i-1)!} + \frac{2^k}{(i-2)!} - \frac{3^k}{2(i-3)!} + \frac{4^k}{3\cdot 2\cdot (i-4)!} + \ldots + (-1)^i \frac{i^k}{(i-1)(i-2)!}.$$

Осы өрнекті $(i-1)!$ көбенйтіп, Леммадағы $S(k,i)$ қосындыны аламыз. Ол, Лемма бойынша нөлге тең. Сөйлем дәлелденді.

Салдар. *$f(x) = x + ax^n$ көпмүшесі суперпозиция бойынша керіленуі үшін оның туындысы $f'(x) = 1 + nax^{n-1}$ $K[x]$ сақинасында креіленуі қажетті және жеткілікті.*

Ескерту. Біз K сақинасын Q рационал сандар өрісінде алгебра болады деп есептедік. Егер K сақинасы Q - алгебра болмаса немесе K сақинасының сипаттамасы нөлден көп болса, онда біз $K[x]$ сақинасында жаңа көбейту амалын енгіземіз:

$$x^{(n)} \cdot x^{(m)} = \binom{n+m}{n} x^{n+m}, \quad x^{(n)} = \frac{x^n}{n!}.$$

Бұл жағдайда, егер $f(x) = x + ax^2 + bx^3 + \ldots + cx^n$ болса, онда $f'(x) = 1 + ax + bx^2 + \ldots + cx^{n-1}$ болады. Яғни $a, b, \ldots, c$ коэффициенттерінің нильпотенттігі сақталады. Берілген мысалдағы кері көпмүшенің дәрежесін біз кері көпмүшені табу алгоритмін қолдану арқылы байқадық.

Әдебиеттер

[1] *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.

References

[1] *At'ja M., Makdonal'd I.* Vvedenie v kommutativnuju algebru. M.: Mir, 1972.