

УДК 517, 519.6, 519.8

М.Н. Кулбай *, Б.Г. Муканова, Д.К. Суйсинбаев

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Республика Казахстан, г. Алматы

* E-mail: makulbay@gmail.com

Численный метод решения обратной задачи для уравнения диффузии с нелокальными краевыми условиями

В настоящее время весьма активно изучаются и вызывает большой практический интерес исследования нелокальных краевых задач для параболических уравнений, из за того, что прикладные задачи механики, физики и биологии сводятся к таким уравнениям. В данной работе рассматривается одномерная обратная задача идентификации правой части для уравнения теплопроводности по финальным измерениям температуры при нелокальных краевых условиях. Задача решается методом регуляризации функционала невязки. Разработан и численно реализован метод коллокаций с регуляризатором. Разработанный метод позволил реализовать большое количество численных примеров и численно проводились расчеты для разных наборов параметров задачи, а именно, варьировали величины K – число членов в разложении, параметр регуляризации μ , а также входящие данные задачи: параметр α в граничных условиях, время наблюдений T и исследовали варианты с различным характером неизвестной функции $f(x)$. В зависимости от характера правой части, в ряде примеров удалось восстановить функции источника с точностью, близкой к компьютерной. Быстро осциллирующие и разрывные функции также восстанавливались удовлетворительной точностью.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, нелокальное граничное условие, спектральный метод, минимизация функционала невязки, метод коллокаций.

M.N. Kulbay, B.G. Mukanova, D.K. Suisinbayev

Numerical method of solving inverse problem to diffusion equation with nonlocal boundary condition

The nonlocal boundary value problems for parabolic equations are actively studied and have great practical interests, because such equations describe applied problems of mechanics, physics and biology. In this paper we consider one dimensional inverse problem of identifying the source function for the heat equation by the final temperature measurements with nonlocal boundary conditions. The problem is solved by the method of regularization of the residual functional. The method of collocation is developed and numerically implemented. The developed method allowed to implement a large number of numerical examples and were calculated for different sets of parameters such as the number of terms in the expansion K , the regularization parameter μ , the parameter α in the boundary conditions, observation time T . We also investigated the variants with different character of unknown source function $f(x)$ and reconstructed it with accuracy close to the computer. Fast oscillating and discontinuous functions also reconstructed with satisfactory accuracy.

Key words: inverse problem, the heat equation, nonlocal boundary conditions, spectral method, minimizing of the residual functional, collocation method.

М.Н. Кулбай, Б.Г. Муканова, Д.К. Суйсинбаев

Локальді емес шекаралық шарттары бар диффузия теңдеуіне арналған кері есепті сандық әдіспен шешу

Қазіргі таңда параболалық теңдеулер үшін локальді емес шекаралық есептер қарқынды түрде дамуда. Себебі механиканың, физиканың және биологияның қолданбалы есептері жоғары да айтылған теңдеулермен сипатталады. Қарастырылып отырған жұмыста ақырлы температуралық өлшем бойынша локальді емес шекаралық шарттары бар бір өлшемді жылуөткізгіш теңдеуінің оң жақта тұрған белгісіз көздерін айқындау кері есебі қарастырылған. Есеп бағалау функционалының регуляризация әдісімен табылады. Регуляризаторы бар коллокация әдісі құрылып сандық түрде жүзеге асырылған. Есептің әр түрлі параметрлерін, атап айтқанда K – гармоника санын, μ – регуляризация параметрін, сондай ақ шекаралық шарттағы α параметрін, T ақырлы уақыт өлшемін және $f(x)$ белгісіз функциясын өзгерте отырып құрылған әдіс бойынша ауқымды сандық эксперименттер жүргізілді. Оң жақтағы функцияның сипатына байланысты белгісіз көздерді айқындап тұрған функциялар компьютерлік дәлдікке сәйкес нақтылықпен қалпына келтірілді. Тез ауытқитын функциялар да қанағаттанарлық дәлдікпен қалпына келтірілді.

Түйін сөздер: кері есеп, жылуөткізгіш теңдеуі, локальді емес шекаралық шарт, спектральді әдіс, бағалау функционалының минимизациясы, коллокация әдісі.

Введение

В данной работе требуется восстановить пространственную плотность источников тепла $f(x) \in L_2[0, 1]$ в следующей нелокальной краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x), & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) + \alpha u(1, t), \\ u(0, t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

При этом известна дополнительная информация (финальные измерения температуры):

$$u(x, T) = \psi(x), \quad (2)$$

где параметр α – положительное число, а $\psi(x)$ – заданная функция.

Математическое моделирование диффузионных процессов описываются прямыми и обратными краевыми задачами для уравнений параболического типа [1,2]. Во многих практических приложениях исследователю доступны только финальные измерения диффундирующих величин, при этом необходимо восстановить распределение источников в среде, либо начальное распределение. Впервые постановка задачи с нелокальными условиями возникла в исследовании свойств плазмы и была сформулирована Самарским А.А. и Ионкиным Н.И. Нелокальное краевое условие выражало равенство потоков тепла на входе и выходе системы. Далее изучение задач с нелокальными условиями вылилось в отдельную ветвь исследований. В частности, для моделей диффузии такие задачи рассматривались в работах [3-6]. Однако, в указанных источниках приводятся теоретические результаты, численные расчеты этих задач не проводились.

Одномерная обратная задача идентификации правой части для уравнения теплопроводности по финальным измерениям температуры при нелокальных краевых условиях

также рассматривался нами в работе [7]. В этой работе численно реализован и исследован метод, описанный в работе [6] и показал удовлетворительные результаты только при больших значениях параметра α . Это означает, что нелокальные краевые условия задачи являются «почти локальными» и для получения приемлемого численного решения требуется разработка более эффективных методов.

В данной работе мы переформулировали задачу в терминах оптимального управления [8-9] и реализовали метод квазирешения. Для дискретизации функционала невязки мы применили идею метода, описанную в работе [10] и протестировали работоспособность метода для задачи с нелокальными краевыми условиями. В отличие от [10], в данной работе мы применяем метод к случаю финальных измерений и нелокальных краевых условий.

Решение прямой задачи

Применение метода Фурье для данной задачи приводит к спектральной задаче для оператора l , заданного дифференциальным выражением и краевыми условиями:

$$\begin{aligned} l(y) &\equiv -y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ y'(0) &= y'(1) + \alpha y(1), \quad y(0) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [5] показано, что на основе собственных функций можно построить базис, позволяющий применить метод разделения переменных для решения начально - краевой задачи. Приведем необходимые результаты из [5,6]. Спектральная задача (3) имеет две серии собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(1)} &= (2\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \dots \\ \lambda_k^{(2)} &= (2\beta_k)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь β_k — корни уравнения $\operatorname{tg}(\beta) = \alpha/2\beta$, $\beta > 0$, $\pi k < \beta_k < \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, \dots$

$$\delta_k = \beta_k - \pi k$$

Собственные функции задачи (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} y_k^{(1)}(x) &= \sin(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \\ y_k^{(2)}(x) &= \sin(2\beta_k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Построенная из нее вспомогательная система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0^{(2)}(x)(2\beta_0)^{-1}, \\ y_{2k}(x) &= y_k^{(1)}(x), \\ y_k(x) &= (y_k^{(2)}(x) - y_k^{(1)}(x))(2\delta_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$, а биортогональной к ней является система

$$v_0(x) = 2\beta_0 v_0^{(2)}(x), \quad v_{2k}(x) = v_k^{(2)}(x) + v_k^{(1)}(x), \quad v_{2k-1}(x) = 2\delta_k v_k^{(2)}(x) \quad k = 1, 2 \quad (7)$$

построенная из собственных функций сопряженной к (3) задачи:

$$\begin{aligned} v_k^{(1)}(x) &= c_k^{(1)} \cos(2\pi kx + \gamma_k), \quad k = 1, 2, \dots \\ v_k^{(2)}(x) &= c_k^{(2)} \cos(\beta_k(1 - 2x)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma_k = \arctan\left(\frac{\alpha}{2\pi k}\right)$, $k = 1, 2, \dots$.

Здесь константы $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ выбираются из соотношения биортогональности $(y_k^{(j)}, v_k^{(j)})=1$ $j = 1, 2$ и вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} c_k^{(1)} &= -\frac{1}{\int_0^1 \sin(2\pi kx) \cos(2\pi kx + \gamma_k) dx}, \\ c_k^{(2)} &= -\frac{1}{\int_0^1 \sin(2\beta_k x) \cos(\beta_k(1 - 2x)) dx}, \\ c_0^2 &= \frac{1}{\int_0^1 \sin(2\beta_0 x) \cos(\beta_0(1 - 2x)) dx}. \end{aligned} \quad (9)$$

В работе [6] построено формальное решение задачи (1)–(2) и обоснована гладкость формального решения и сходимость всех встречающихся рядов. Решение прямой задачи представляется в виде биортогональных рядов:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) y_k(x), \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k y_k(x), \end{aligned} \quad (10)$$

где,

$$u_k(t) = (u(x, t), v_k(x)), \quad f_k = (f(x), v_k(x)). \quad (11)$$

Подставляя (10) в уравнение (1) с учетом (6), для нахождения неизвестных функций $u_k(t)$ получаем следующие задачи:

$$\begin{aligned} u_0'(t) + \lambda_0^{(2)} u_0(t) &= f_0, \quad u_0(0) = 0, \\ u_{2k-1}'(t) + \lambda_k^{(2)} u_{2k-1}(t) &= f_{2k-1}, \quad u_{2k-1}(0) = 0, \\ u_{2k}'(t) + \lambda_k^{(1)} u_{2k}(t) &= -\frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} u_{2k-1}(t) + f_{2k}, \quad u_{2k}(0) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решая задачи (12) получаем формулы для функций $u_k(t)$:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \frac{f_0}{\lambda_0^{(2)}} (1 - e^{-\lambda_0^{(2)} t}), \\ u_{2k-1}(t) &= \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^{(2)}} (1 - e^{-\lambda_k^{(2)} t}), \\ u_{2k}(t) &= \frac{(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)})}{2\lambda_k^{(2)} \lambda_k^{(1)} \delta_k} f_{2k-1} (1 - e^{-\lambda_k^{(1)} t}) - \frac{f_{2k-1}}{2\lambda_k^{(2)} \delta_k} (e^{-\lambda_k^{(2)} t} - e^{-\lambda_k^{(1)} t}) + \\ &+ f_{2k} \frac{(1 - e^{-\lambda_k^{(1)} t})}{\lambda_k^{(1)}}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (10), (13) будут использоваться для получения синтетических данных, а также для решения прямой задачи при построении итерационного процесса.

Применение метода коллокаций с регуляризатором для решения обратной задачи

Запишем решение прямой задачи (13) в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{y_0(x)f_0}{\lambda_0^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_0^{(2)}t}) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{y_{2k-1}(x)f_{2k-1}}{\lambda_k^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_k^{(2)}t}) \right\} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ y_{2k}(x) \left[\frac{f_{2k-1}(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)})}{2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}\delta_k}(1 - e^{-\lambda_k^{(1)}t}) - \frac{f_{2k-1}}{2\lambda_k^{(2)}\delta_k}(e^{-\lambda_k^{(2)}t} - e^{-\lambda_k^{(1)}t}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f_{2k}}{\lambda_k^{(1)}}(1 - e^{-\lambda_k^{(1)}t}) \right] \right\}. \quad (14)$$

Итак, мы имеем из формулы (14), что приближенное решение задачи при $t = T$ имеет вид:

$$u(x, T) = \frac{y_0(x)f_0}{\lambda_0^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_0^{(2)}T}) + \sum_{k=1}^M \left\{ \frac{y_{2k-1}(x)f_{2k-1}}{\lambda_k^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_k^{(2)}T}) \right\} + \\ + \sum_{k=1}^M \left\{ y_{2k}(x) \left[\frac{f_{2k-1}(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)})}{2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}\delta_k}(1 - e^{-\lambda_k^{(1)}T}) - \frac{f_{2k-1}}{2\lambda_k^{(2)}\delta_k}(e^{-\lambda_k^{(2)}T} - e^{-\lambda_k^{(1)}T}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f_{2k}}{\lambda_k^{(1)}}(1 - e^{-\lambda_k^{(1)}T}) \right] \right\}. \quad (15)$$

Подберем коэффициенты f_i , $i = 1, \dots, K$, так, чтобы выражение вида:

$$\frac{y_0(x)f_0}{\lambda_0^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_0^{(2)}T}) + \sum_{i=1}^K \left\{ \frac{y_{2i-1}(x)f_{2i-1}}{\lambda_i^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_i^{(2)}T}) \right\} + \\ + \sum_{i=1}^K \left\{ y_{2i}(x) \left[\frac{f_{2i-1}(\lambda_i^{(2)} - \lambda_i^{(1)})}{2\lambda_i^{(1)}\lambda_i^{(2)}\delta_i}(1 - e^{-\lambda_i^{(1)}T}) - \frac{f_{2i-1}}{2\lambda_i^{(2)}\delta_i}(e^{-\lambda_i^{(2)}T} - e^{-\lambda_i^{(1)}T}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f_{2i}}{\lambda_i^{(1)}}(1 - e^{-\lambda_i^{(1)}T}) \right] \right\} \equiv \sum_{i=0}^K f_i F_i(x) \quad (16)$$

наилучшим образом в смысле квадратичной нормы приближало функцию $\psi(x)$. А в качестве приближенного решения обратной задачи используем функцию:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^K f_i y_i(x) = f_0 y_0^{(2)}(x)(2\beta_0)^{-1} + \\ + \sum_{i=0}^K \left\{ f_{2i} y_{2i}^{(1)}(x) + f_{2i-1} (y_{2i-1}^{(2)}(x) - y_{2i-1}^{(1)}(x)) (2\delta_{2i-1})^{-1} \right\}. \quad (17)$$

Для решения обратной задачи будем реализовывать метод минимизации функцио-

нала невязки вида:

$$J(f_0, f_1, \dots, f_K) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^K f_i F_i(x) - \psi(x) \right]^2 dx + \frac{\mu}{2} \sum_{i=0}^K f_i^2 \rightarrow \min_{\vec{f}} J(\vec{f}) \quad (18)$$

$$i = 0, 1, \dots, K$$

В данном случае функционал невязки представляет собой квадратичную форму многих переменных с коэффициентами, зависящими от пространственной переменной. Так как мы свели задачу к конечномерной, будем искать точки, подозрительные на экстремум, из необходимого условия минимума, а именно, приравняем нулю первые производные функционала по каждой переменной. Выпишем формулы для первых производных функционала:

$$\frac{\partial J(f_0, f_1, \dots, f_K)}{\partial f_j} = \sum_{i=0}^K f_i \int_0^1 F_i(x) F_j(x) dx - \int_0^1 \psi(x) F_j(x) dx + \mu f_j = 0 \quad (19)$$

$$i = 0, 1, \dots, K$$

Приравнивая выражения (19) нулю, получаем систему линейных уравнений для нахождения искоемых коэффициентов f_0, f_1, \dots, f_K :

$$A \vec{f} = b, \quad (20)$$

где матрица A и правая часть b заданы выражениями:

$$A_{ij} = \mu \delta_{i,j} + \int_0^1 F_i(x) F_j(x) dx = 0, \quad (21)$$

$$b_j = \int_0^1 \psi(x) F_j(x) dx, \quad (22)$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Решая систему (20) при разных μ получим приближенное решение обратной задачи.

Численные результаты

Описанный выше метод был реализован нами численно для разных синтетических измеренных данных.

Алгоритм вычислений состоял из следующих шагов:

1. Задаются параметры задачи: α, T, μ
2. Вычисляются величины $\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, i = 1, \dots, K$. Величину K мы брали равной 50.
3. Задается правая часть, и вычисляются синтетические данные по формуле (10) и (13).
4. Вычисляем коэффициенты матрицы A и правой части b по формулам (21) и (22).
5. Решаем систему уравнений (20) и находим f_0, f_1, \dots, f_K .

Из формулы (14) следует, что если искомая функция представлена лишь конечным числом гармоник, то ряд (14) также имеет конечное число членов и представляет собой аналитическое выражение для искомой правой части. Это обстоятельство позволяет использовать эти выражения для тестирования метода и проводить сравнения численных результатов с аналитически заданными функциями. Мы провели такого рода тестовые расчеты для случаев, когда искомая правая часть представляла собой первые две функции $y_k(x)$. На рисунке 1 показан результат расчета, когда искомая функция равнялась $y_1(x)$, а именно, задавалась формулой $f(x) = (\sin(2\beta_1 x) - \sin(2\pi x))(2\delta_1)^{-1}$, при параметрах расчета: $\beta_1 = 3.29$, $\delta_1 = 0.15$, $\alpha = 1$, $T = 1$, $K = 50$, $\mu = 1 \cdot 10^{-11}$. Точность восстановления составила 4.85%. На рисунке 2 в качестве искомой функции использована следующая функция базиса $y_2(x) = \sin(4\pi x)$ при этих же параметрах расчета. Точность восстановления составила 4.68%.

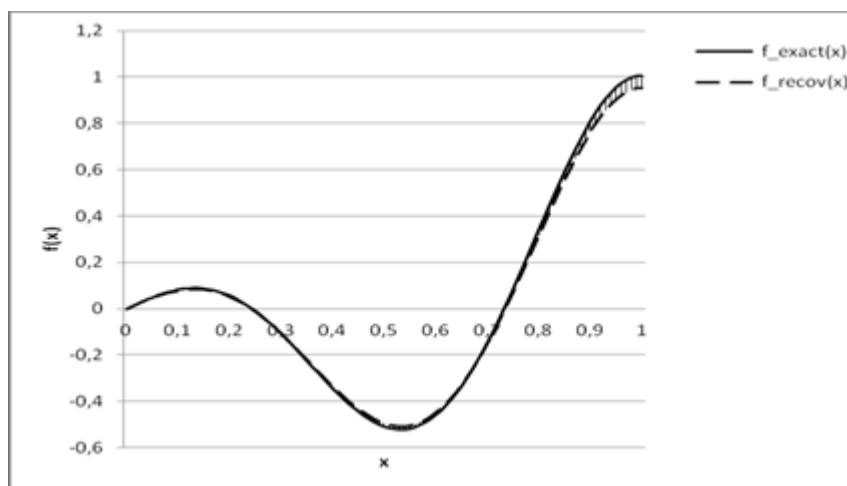


Рисунок 1 – Сравнение с аналитическим решением, правая часть задана формулой

$$f(x) = (\sin(2\beta_1 x) - \sin(2\pi x))(2\delta_1)^{-1}$$

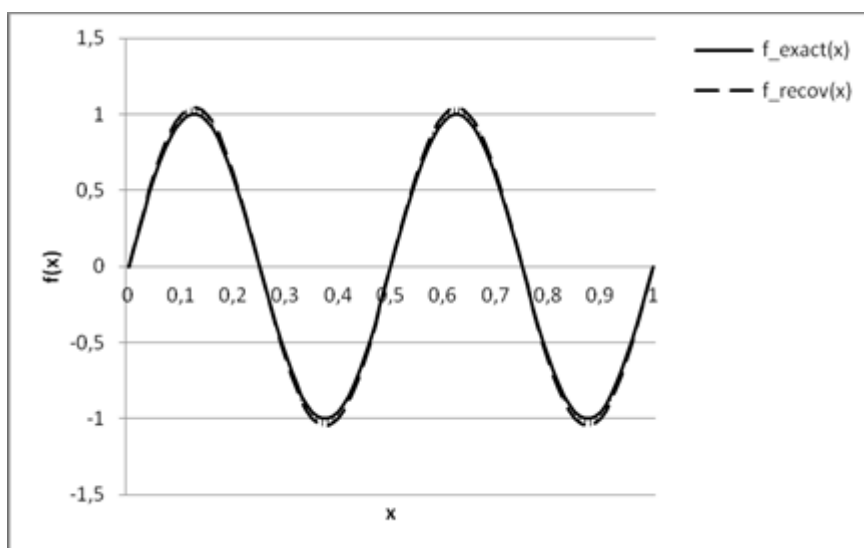


Рисунок 2 – Сравнение с аналитическим решением, правая часть задана формулой $f(x) = \sin(4\pi x)$

Для дальнейшего анализа и получения синтетических данных задачи мы рассмотрели функцию правой части заданной аналитически по формуле:

$$f(x) = A \exp\left(-\frac{(x - x_1)^2}{\omega}\right).$$

Для изучения влияния параметров регуляризации μ и числа гармоник K мы рассмотрели различные наборы параметров функции $f(x)$. На рисунке 3 мы показываем результат восстановления при параметрах расчетов: $\alpha = 10$, $T = 1$, $K = 50$, $\mu = 1 \cdot 10^{-5}$, $A = 1$, $x_1 = 0.5$, $\omega = 0.22$. Относительная точность восстановления оказалась равной 19%.

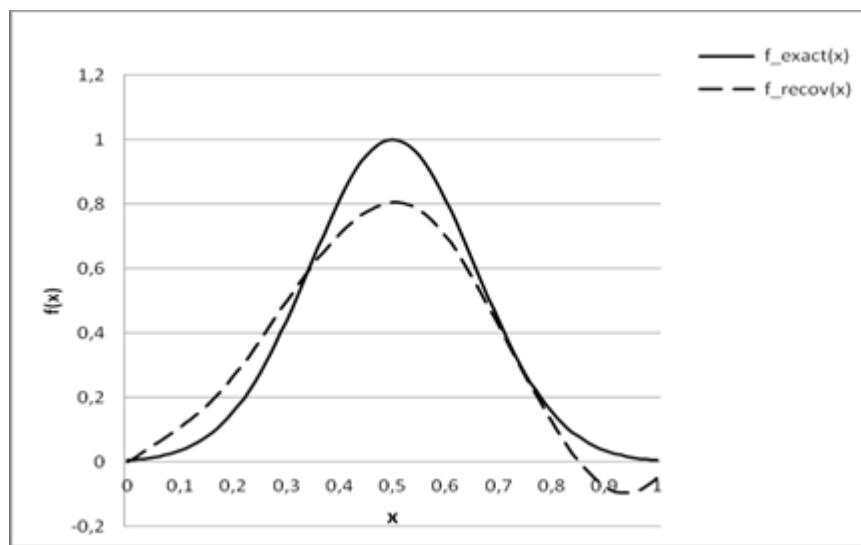


Рисунок 3 – Восстановление функции источника

На рисунке 4 показано уменьшение параметра регуляризации μ до $1 \cdot 10^{-11}$. Точность восстановления при этом составила 18%.

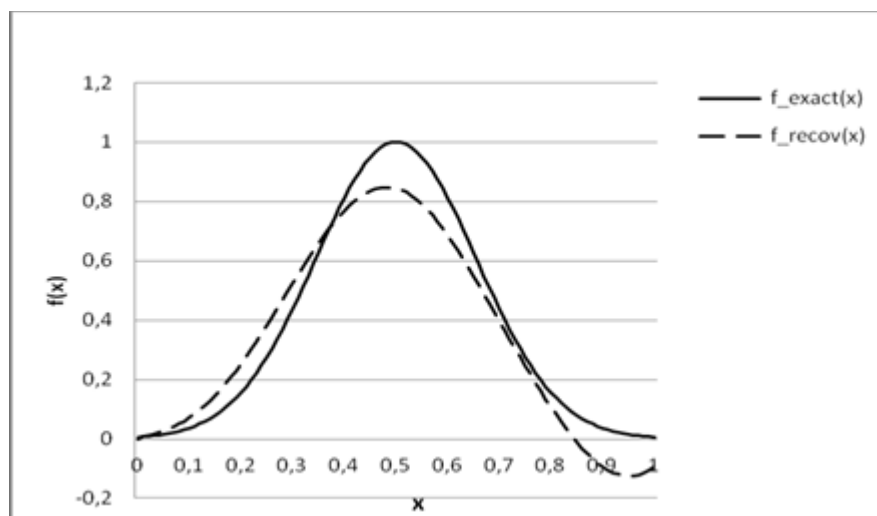


Рисунок 4 – Результат восстановления при уменьшении параметра регуляризации

Таким образом, расчеты показали необходимость положительного «не слишком малого» параметра регуляризации. В большинстве расчетов наиболее приемлемым оказалось значение μ , равное 10^{-11} . Кроме этого, мы рассмотрели влияние значения K на качество восстановления. Оказалось, что для гладких правых частей увеличение K существенно не влияет на точность восстановления. Расчеты были проведены с $K = 10, 20, 30, 50, 100$. Во всех этих случаях результаты имели одну и ту же относительную точность восстановления.

Попытки восстановить разрывную ступенчатую функцию не увенчались успехом. Во всех разумных сочетаниях параметров мы получали сглаженную восстановленную функцию следующего вида:

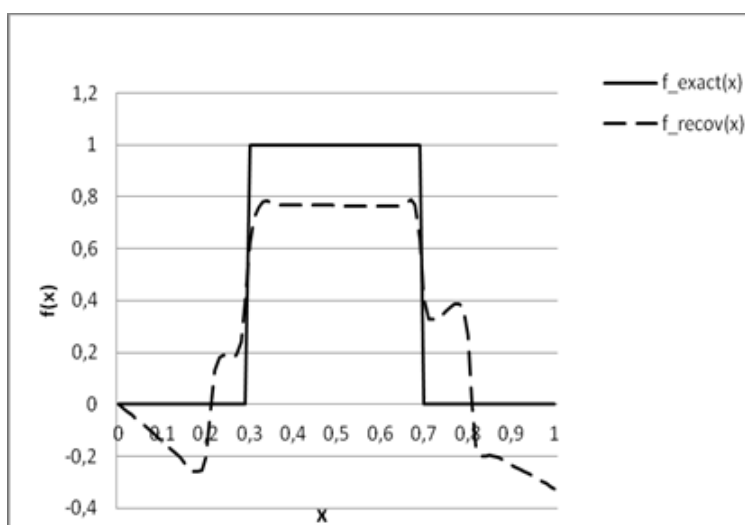


Рисунок 5 – Восстановление разрывной функции источника. Расчет выполнен при $\alpha = 1$, $T = 1$, $K = 50$, $\mu = 1 \cdot 10^{-9}$.

На рисунке 6 показано восстановление негладкой функции. Получен удовлетворительный результат при $\alpha = 10$, $T = 1$, $K = 50$, $\mu = 1 \cdot 10^{-11}$ с относительной ошибкой восстановления 10%.

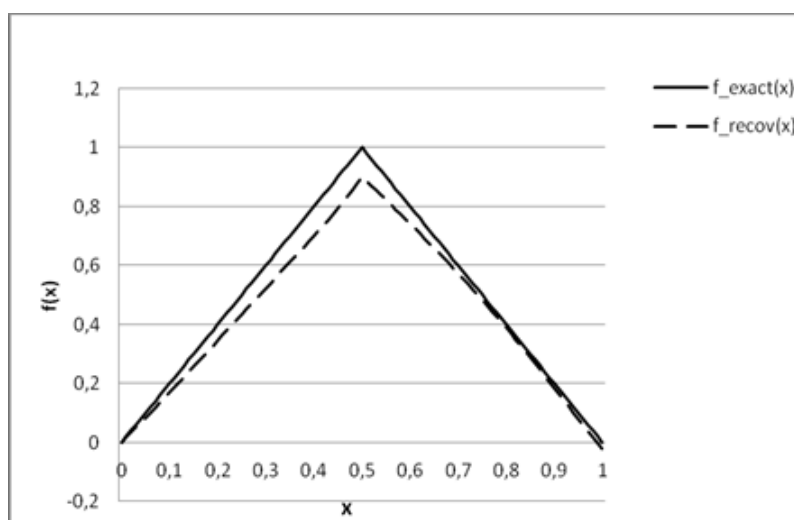


Рисунок 6 – Восстановление негладкой функции источника.

Таким образом, численные эксперименты с разнообразным поведением искомой функции показывают, что метод улавливает существенные особенности в поведении искомой функции — убывание, возрастание, области максимума, либо минимума.

Литература

- [1] *Alifanov O.M.* Inverse Heat Transfer Problems. Springer-Verlag, 1994. 348 p.
- [2] *Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клар Ч.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 309 с.
- [3] *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. // Дифференц. уравнения, 1977. № 13, с. 293-304.
- [4] *Мокин А.Ю.* Корректность семейства задач с неклассическим краевым условием. // Компьютерные исследования и моделирование, 2009. Т. 1, № 2. с. 139-146.
- [5] *Мокин А.Ю.* Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. // Дифференц. Уравнения, 2009. 45(1). с. 123-137.
- [6] *Оразов И., Садыбеков М.А.* Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла. // Известия вузов. Математика, 2012. № 2, с. 70-75.
- [7] *Кулбай М.Н., Суйсинбаев Д.К.* Методика решения обратной задачи для уравнения диффузии. // Труды I научно-практической конференции «Интеллектуальные информационные технологии», Астана, 2013. с. 363-364.
- [8] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
- [9] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
- [10] *Муканова Б.Г.* Восстановление распределения источников тепла по граничным измерениям температуры: численный метод. Вестник ЕНУ, Серия естественно-технических наук, - № 6(97) 2013 г. с. 12-17.

References

- [1] *Alifanov O.M.* Inverse Heat Transfer Problems. Springer-Verlag, 1994. 348 p.
- [2] *Bek Dzh., Blakuell B., Sent-Kler Ch.* Nekorrektnyie obratnyie zadachi teploprovodnosti. M.: Mir, 1989. 309 s.
- [3] *Ionkin N.I.* Reshenie odnoy kraevoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem. // Differents. uravneniya, 1977. No 13, s. 293-304.
- [4] *Mokin A.Yu.* Korrektnost semeystva zadach s neklassicheskim kraevym usloviem. // Kompyuternyie issledovaniya i modelirovanie, 2009. T. 1, No 2. s. 139-146.
- [5] *Mokin A.Yu.* Ob odnom semeystve nachalno-kraevyih zadach dlya uravneniya teploprovodnosti. // Differents. Uravneniya, 2009. 45(1). s. 123-137.
- [6] *Orazov I., Sadyibekov M.A.* Ob odnoy nelokalnoy zadache opredeleniya temperatury i plotnosti istochnikov tepla. // Izvestiya vuzov. Matematika, 2012. No 2, s. 70-75.
- [7] *Kulbay M.N., Suysinbaev D.K.* Metodika resheniya obratnoy zadachi dlya uravneniya diffuzii. // Trudy I nauchno-prakticheskoy konferentsii «Intellectualnyie informatsionnyie tehnologii», Astana, 2013. s. 363-364.
- [8] *Pontryagin L.S., Boltjanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimalnyih protsessov. M.: Nauka, 1983. 393 s.
- [9] *Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.* Metodyi resheniya nekorrektnyih zadach. M.: Nauka, 1974. 224 s.
- [10] *Mukanova B.G.* Vosstanovlenie raspredeleniya istochnikov tepla po granichnyim izmereniyam temperatury: chislennyiy metod. Vestnik ENU, Seriya estestvenno-tehnicheskikh nauk, - No 6(97) 2013 g. s. 12-17.