УДК 517.958

Д.М.Курманбаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: kurmanbaev@gmail.com

Построение разрушающих решений модифицированного уравнения Веселова-Новикова с помощью поверхности Эннепера второго порядка

В данной статье построены разрушающие решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова (являющегося двумеризацией модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза) с помощью инверсий минимальной поверхности Эннепера второго порядка. И эти решения имеют сингулярность в одной точке пространства-времени, аналогично работе [1].Алгоритм решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова был приведен в работе [2], и в работе [3] была получена геометрическая интерпретация преобразования Мутара. Оно задается решением уравнения Дирака $D\psi = 0$ и тремя вещественными константами. И любое решение этого уравнения определяет поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданную с точностью до сдвигов, с помощью представления Вейерштрасса. Фиксируя три константы, мы полностью фиксируем поверхность. На этой поверхности задается конформный параметр, и потенциал U оператора Дирака является потенциалом представления этой поверхности. Применив к этой поверхности инверсию с центром вначале координат, мы получаем новую поверхность с тем же самым конформным параметром и новым потенциалом.Оказывается, что потенциал инверсированной поверхности и есть в точности потенциал, построенный с помощью преобразования Мутара по указанным данным [3]. В результате данной статьи этот потенциал был построен (теорема 1) для неизвестных пока решений линейной системы уравнений (8) с помощью алгоритма преобразования Мутара; была получена геометрическая интерпретация преобразования Мутара на примере поверхности Эннепера второго порядка, т.е. для явных решений данной линейной системы уравнений найдены потенциалы (теорема 2), которые удовлетворяют модифицированному уравнению Веселова-Новикова.

Ключевые слова: оператор Дирака, модифицированное уравнение Веселова-Новикова,преобразование Мутара, разрушающие решения, поверхность Эннепера.

D.M.Kurmanbaev

Construction blowing up solutions of modified Novikov-Veselov equation by second order Enneper surface

In this paper, we constructed blowing-up solutions of the modified Veselov-Novikov equation (which is a two-dimensionalization of modified Korteweg-de Vries equation) using inversions of the second order Enneper minimal surface. As [1] these solutions have a singularity at one point in space-time. Algorithm for solving the modified Veselov-Novikov equation was given in [2] and in [3] obtained a geometrical interpretation of Moutard transformation. It is given by the solution of the Dirac equation $D\psi = 0$ and three real constants. And any solution of this equation defines a surface in three-dimensional Euclidean space, given up accurate to translations, with the help of the Weierstrass representation. Fixing the three constants, we completely fix the surface. On this surface given a conformal parameter, and the potential U of the Dirac operator is the potential of representation of the surface.Applying inversion to this surface with center at the origin, we obtain a new surface with the same conformal parameter and new potential. It turns out that the potential of inverted surface is exactly the potential constructed by Moutard transformation from the data of [3]. In a result of this article, this potential has been built (theorem 1) for yet unknown solutions of a linear system of equations (8) by algorithm of Moutard transformations; was obtained geometric interpretation of Moutard transformations on the example of second order Enneper surface, i.e, for explicit solutions of linear system of equations found potentials (theorem 2) that satisfy the modified Veselov-Novikov equation.

Key words: Dirac operator, modified Novikov-Veselov equation , Mutard transformation, blowing up solutions, Enneper surface.

Д.М.Курманбаев

Екінші ретті Эннепер бетінің көмегімен модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуінің жоюшы шешімдерін құрастыру

Бұл мақалада модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуінің (яғни, модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің екіөлшемді жағдайы) жоюшы шешімдері құрастырылған және де бұл шешімдердің [1] жұмысындағы алынған нәтижелерге ұқсас кеңістік-уақыттың бір нүктесінде сингулярлығы бар болады.Модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуінің шешімінің алгоритмі [2] жұмысында келтірілген және де [3] жұмысында Мутар түрлендіруінің геометриялық мағынасы көрсетілген. Ол $D\psi = 0$ Дирак теңдеуінің шешімімен және де үш нақты тұрақтылармен беріледі.Бұл теңдеудің кез келген шешімі Вейерштрасс көрсетімі көмегімен, берілген ығыстыруға дейінгі дәлдікпен болатындай, үшөлшемді евклидтік кеңістіктегі бетті анықтайды. Біз үш тұрақтыны бекіту арқылы барлық бетті бекітуімізге болады. Яғни, бұл бетте конформды параметр берілген және Дирак операторының U потенциалы осы беттегі көрсетімнің потенциалы болады.Сонымен қатар, бұл бетке центрі координаттар басында болатын инверсияны қолдану арқылы біз дәл сондай конформды параметрімен берілген және жаңа потенциалымен жаңа бетті аламыз. Инверсияланған беттің потенциалы - Мутар түрлендіруінің көмегі арқылы (бұл түрлендіру [3] жұмыста көрсетілген нұсқаулармен берілген) құрастырылған потенциалдың дәл өзі болады екен. Бұл мақаланың нәтижесінде (8) сызықты теңдеулер жүйесінің әзірге белгісіз шешімдері үшін аталған потенциал Мутар түрлендіруінің көмегімен құрастырылған (1-теорема); сонымен қатар екінші ретті Эннепер бетінің мысалы арқылы Мутар түрлендіруінің геометриялық мағынасы алынған, яғни берілген сызықты теңдеулер жүйесінің айқын шешімдері үшін модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін қанағаттандыратын потенциалдар (2-теорема) табылған.
Түйін сөздер: Дирак операторы, модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуі, Мутар түрлендіруі, жоюшы шешімдер, Эннепер беті.

1. Введение

Модифицированное уравнение Веселова- Новикова (мВН) было введено в работе [4] и имеет вид

$$U_t = U_{zzz} + 3U_zV + \frac{3}{2}UV_z + U_{\overline{zzz}} + 3U_{\overline{z}}\overline{V} + \frac{3}{2}U\overline{V}_{\overline{z}} \tag{1}$$

где $V_{\overline{z}} = (U^2)_z$
и $z = x + iy$, $U(z, \bar{z}, t)$ - вещественнозначная функция.
Уравнение мВН допускает представление в виде L,A,B - тройки Манакова [6]:

$$\mathcal{D}_t + [\mathcal{D}, \mathcal{A}] - \mathcal{B}\mathcal{D} = 0. \tag{2}$$

где $\mathcal{D}$ - двумерный оператор Дирака:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

здесь обозначены через $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ и $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.
Явные формулы для операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, из уравнений (2) имеют вид:

$$\mathcal{A} = \partial^3 + \overline{\partial}^3 + 3\begin{pmatrix} V & 0 \\ U_z & 0 \end{pmatrix}\partial + 3\begin{pmatrix} 0 & -U_{\overline{z}} \\ 0 & \overline{V} \end{pmatrix}\overline{\partial} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} V_z & 2U\overline{V} \\ -2UV & \overline{V_{\overline{z}}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = 3\begin{pmatrix} -V & 0 \\ -2U_z & V \end{pmatrix}\partial + 3\begin{pmatrix} \overline{V} & 2U_{\overline{z}} \\ 0 & -\overline{V} \end{pmatrix}\overline{\partial} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \overline{V_{\overline{z}}} - V_z & 2U_{\overline{zz}} \\ -2U_{zz} & V_z - \overline{V_{\overline{z}}} \end{pmatrix}.$$

2. Преобразование Мутара

Пусть $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ - решение уравнения Дирака, т.е.

$$\mathcal{D}\psi = 0 \tag{3}$$

тогда сопряженное к этому решению $\psi^* = \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ тоже является решением уравнения (3).

Составим из ψ, ψ^* матрицу $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ то получим, что $\mathcal{D}\Psi = 0$. Тоже самое можно проверить и для $\varphi = \psi^T$.

Чтобы применить преобразование Мутара для уравнения мВН, каждой паре решений ψ, φ уравнений (3) и $\mathcal{D}\varphi = 0$ сопоставим матрицы Ψ и $\Phi = \Psi^T$, а по ним составим матричную 1-форму:

$$\omega(\Phi,\Psi) = -\frac{i}{2}(\Phi\sigma_3\Psi + \Phi\Psi)dz - \frac{i}{2}(\Phi\sigma_3\Psi - \Phi\Psi)d\overline{z} +$$
$$+[-i((\Phi_{zz} + \Phi_{\overline{zz}} - 2\Phi_{z\overline{z}})\sigma_3\Psi + \Phi\sigma_3(\Psi_{zz} + \Psi_{\overline{zz}} - 2\Psi_{z\overline{z}}) - (\Phi_z - \Phi_{\overline{z}})\sigma_3(\Psi_z - \Psi_{\overline{z}})) -$$
$$-2U((\Phi_z - \Phi_{\overline{z}})\sigma_3\Psi - \Phi\sigma_2(\Psi_z - \Psi_{\overline{z}})) + \Phi\begin{pmatrix} iU^2 - 3iV & -i(U_z + U\overline{z}) \\ -i(U_z + U\overline{z}) & -iU^2 + 3i\overline{V} \end{pmatrix}\Psi]dt$$

где $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ - матрицы Паули, для которых $Tr\sigma_i = 0, i = 1,2,3.$

Прямыми вычислениями доказывается, что 1-форма $\omega(\Phi,\Psi)$ замкнута, т.е.$d\omega(\Phi,\Psi) = 0$. Затем можно определить следующую симметричную матрицу:

$$\Omega(\Phi,\Psi) = \int_{(0,0,0)}^{(z,\bar{z},t)} \omega + \begin{pmatrix} a+bi & ci \\ ci & a-bi \end{pmatrix} \tag{4}$$

где a,b и c -вещественные постоянные.
Пусть матрицы K и N определяются следующим образом:

$$K(\Psi) = \Psi\Omega^{-1}(\Psi^T,\Psi)\Gamma\Psi^T\Gamma^{-1} \tag{5}$$

$$N(\Psi) = \Gamma\Psi_y\Psi^{-1}\Gamma^{-1} = i\Gamma(\Psi_z - \Psi_{\overline{z}})\Psi^{-1}\Gamma^{-1} \tag{6}$$

Матрицы K и N удовлетворяют свойствам инволюции [2], являются симметричными и $\Gamma = i\sigma_2$.
В работе [7] показано, что уравнение мВН деформирует ядро оператора $L = \begin{pmatrix} \partial & -U \\ U & \bar{\partial} \end{pmatrix}$.
Тогда оно деформирует и ядро оператора Дирака $\mathcal{D} = L\Gamma$ с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\Psi &= 0 \\ \Psi_t &= \mathcal{A}\Psi. \end{aligned} \tag{7}$$

Эта система эквивалентна следующей системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \Psi_x &= J\Psi_y + P\Psi \\ \Psi_t &= -J\Psi_{yyy} - P\Psi_{yy} + Q\Psi_y + S\Psi \end{aligned} \tag{8}$$

где Ψ матричное решение данной системы и матрицы J, P, Q, S полученные из эквивалентности систем уравнений (7) и (8), тоже являются матрицами Паули.
Для обоснования алгоритма преобразования Мутара, получена одна важная теорема в работе [2] для заданных решений системы (8) при $U(z,\bar{z},t) = 0, V(z,\bar{z},t) = 0$. И эту теорему сформулируем и докажем для неизвестных пока решений системы (8) при любых потенциалах $U(z,\bar{z},t)$ и $V(z,\bar{z},t)$.
Теорема 1 *Пусть Ψ_0 и Ψ — решения линейной системы (8) и $U(z,\bar{z},t)$, $V(z,\bar{z},t)$ удовлетворяют уравнению (1) мВН . Если матрица $\Omega^{-1}(\Psi^T, \Psi)$ - невырожденная,тогда*

1) новое решение системы (8)

$$\tilde{\Psi} = \Psi_0 - \Psi\Omega^{-1}(\Psi^T, \Psi)\Omega(\Psi^T, \Psi_0) \tag{9}$$

удовлетворяет уравнению Дирака $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\Psi} = 0$ оператора $\tilde{\mathcal{D}}$ с потенциалом

$$\tilde{U} = U + ik_{12}, \tag{10}$$

и уравнению $\tilde{\Psi}_t = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Psi}$ оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ с потенциалами $\tilde{U}$ и

$$\tilde{V} = V - 2iUk_{12} + k_{11}^2 - 2(n_{12}k_{12} + n_{11}k_{11}) \tag{11}$$

где k_{11}, k_{12} и n_{11},n_{12} элементы матриц K, N соответственно и $U(z,\bar{z},t)$, $V(z,\bar{z},t)$ - вещественнозначные потенциалы.

2) новые потенциалы $\tilde{U}(z,\bar{z},t)$ и $\tilde{V}(z,\bar{z},t)$ удовлетворяют уравнению (1) мВН .
Доказательство.

Пусть $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ - решение линейной системы (8) и в формуле (9) для определенности возьмем $\Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. По алгоритму преобразования Мутара, сначала вычислим матрицу $\Omega(\Psi^T, \Psi)$ (берется криволинейный интеграл и его значение не зависит от пути интегрирования) по формуле (5) с учетом формулы 1-формы $\omega(\Psi^T, \Psi)$:

$$\Omega_{11}(z,\bar{z},t) = -i\int_0^z \psi_1^2(l,0,0)dl + i\int_0^{\bar{z}} \psi_2^2(z,l,0)dl+$$

$$+i\int_0^t [\psi_{1z}(z,\bar{z},l)^2 - 2\psi_1(z,\bar{z},l)\psi_{1zz}(z,\bar{z},l) - 3\psi_1^2(z,\bar{z},l)V(z,\bar{z},l)]dl-$$

$$-i\int_0^t [\psi_{2\bar{z}}(z,\bar{z},l)^2 - 2\psi_2(z,\bar{z},l)\psi_{2\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z},l) - 3\psi_2^2(z,\bar{z},l)\overline{V}(z,\bar{z},l)]dl + a + bi,$$

$$\Omega_{12}(z,\bar{z},t) = \Omega_{21}(z,\bar{z},t) = i\int_0^z \psi_1(l,0,0)\overline{\psi_2}(l,0,0)dl + i\int_0^{\bar{z}} \overline{\psi_1}(z,l,0)\psi_2(z,l,0)dl+$$

$$+i\int_0^t \overline{\psi_2}(z,\bar{z},l)\psi_{1zz}(z,\bar{z},l)dl + \overline{\psi_{1\bar{z}\bar{z}}}(z,\bar{z},l)\psi_2(z,\bar{z},l)dl+$$

$$+i\int_0^t \overline{\psi_1}(z,\bar{z},l)\psi_{2\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z},l)dl + \psi_1(z,\bar{z},l)\overline{\psi_{2zz}}(z,\bar{z},l)dl+$$

$$+i\int_0^t [3\overline{\psi_1}(z,\bar{z},l)\psi_2(z,\bar{z},l)\overline{V}(z,\bar{z},l) + 3\psi_1(z,\bar{z},l)\overline{\psi_2}(z,\bar{z},l)V(z,\bar{z},l)] + ci,$$

$$\Omega_{22}(z,\bar{z},t) = -i\int_0^z \overline{\psi_2}^2(l,0,0)dl + \int_0^{\bar{z}} \overline{\psi_1}^2(z,l,0)dl-$$

$$-i\int_0^t [\overline{\psi_{1\bar{z}}}^2(z,\bar{z},l) - 2\overline{\psi_1(z,\bar{z},l)\psi_{1\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z},l)} - 3\overline{\psi_1^2(z,\bar{z},l)V(z,\bar{z},l)}]dl+$$

$$-i\int_0^t [\overline{\psi_{2\bar{z}}}^2(z,\bar{z},l) - 2\overline{\psi_2(z,\bar{z},l)\psi_{2zz}(z,\bar{z},l)} - 3\overline{\psi_2^2(z,\bar{z},l)}V(z,\bar{z},l)]dl + a - bi.$$

Далее выпишем элементы матриц K, N (из формул (5), (6)) в следующем виде:
$k_{11}(z,\bar{z},t) = \frac{1}{|\Omega(z,\bar{z},t)|}(\psi_1^2\Omega_{22}(z,\bar{z},t) + \psi_1\bar{\psi}_2(\Omega_{12}(z,\bar{z},t) + \Omega_{21}(z,\bar{z},t)) + \bar{\psi}_2^2\Omega_{11}(z,\bar{z},t)),$
$k_{12}(z,\bar{z},t) = \frac{1}{|\Omega(z,\bar{z},t)|}(\psi_1\psi_2\Omega_{22}(z,\bar{z},t) + |\psi_2|^2\Omega_{21}(z,\bar{z},t) - |\psi_1|^2\Omega_{12}(z,\bar{z},t) + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\Omega_{11}(z,\bar{z},t)),$

$n_{11}(z,\bar{z},t) = \frac{1}{|\Psi(z,\bar{z},t)|}(\bar{\psi}_1\psi_{1z} - \psi_2\bar{\psi}_{2z} - 2U(z,\bar{z},t)\bar{\psi}_1\psi_2),$
$n_{12}(z,\bar{z},t) = \frac{i}{|\Psi(z,\bar{z},t)|}(\psi_{1z}\bar{\psi}_2 + \psi_1\bar{\psi}_{2z} + U(z,\bar{z},t)(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2))$

здесь $|\Omega(z,\bar{z},t)|$, $|\Psi(z,\bar{z},t)|$ - определители матриц $\Omega(z,\bar{z},t)$, $\Psi(z,\bar{z},t)$ соответственно.

Подставляя эти элементы в формулы (10),(11), мы получим новые потенциалы, которые удовлетворяют уравнению (1) мВН . Чтобы наглядно увидеть доказательство этой теоремы, приведем пример.

Пример

Для того чтобы объяснить геометрический смысл преобразования Мутара, сначала введем следующую поверхность, полученный из (4) умножением на матрицу Γ :

$$\tilde{S}(\Phi, \Psi) = \Gamma\Omega(\Phi, \Psi),$$

введем следующие обозначения:
$v = \psi_{1z}^2 - \psi_{2\bar{z}}^2 - 2(\psi_1\psi_{1zz} - \psi_2\psi_{2\bar{z}\bar{z}}), w = \psi_{1z}\bar{\psi}_{2z} + \bar{\psi}_{1\bar{z}}\psi_{2\bar{z}} - \psi_{1zz}\bar{\psi}_2 - \psi_1\bar{\psi}_{2zz} - \bar{\psi}_{1\bar{z}\bar{z}}\psi_2 - \bar{\psi}_1\psi_{2\bar{z}\bar{z}},$

$$S_0 = \begin{pmatrix} iu^3 & -x^1 - ix^2 \\ u^1 - ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим поверхность $\tilde{S}$ с помощью представления Вейершрасса [1,8]:

$$\tilde{S} = S_0 + i\int_0^t \begin{pmatrix} w & \bar{v} \\ v & -w \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} ci & a - bi \\ -a - bi & -ci \end{pmatrix} \tag{12}$$

Поверхность Эннепера является минимальной поверхностью, которая задается представлением Вейерштрасса следующей вектор-функцией:

$$\psi_1 = z^2, \psi_2 = 1.$$

Теперь подставляя данные ψ_1, ψ_2, получим

$$x^1(z, \bar{z}) = \frac{i}{2}((\frac{1}{5}(z^5 - \bar{z}^5) + z - \bar{z}) + x_0^1,$$

$$x^2(z, \bar{z}) = -\frac{1}{10}(z^5 + \bar{z}^5) + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + x_0^2,$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \frac{1}{3}(z^3 + \bar{z}^3) + x_0^3,$$

где $X_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ начало координат при $x = y = 0$.

Для получения разрушающегося решения уравнения мВН выберем начало координат в следующих точках:

$$x_0^1 = a, x_0^2 = c, x_0^3 = b,$$

полагая здесь

$$c = -b.$$

Подставляя в формуле (12) вместо $c = -b$ вычислим $\tilde{S}$ и v, w:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{i}{3}(z^3 + \bar{z}^3 + 12t) & i(\frac{\bar{z}^5}{5} - z) \\ i(\frac{z^5}{5} - \bar{z}) & -\frac{i}{3}(z^3 + \bar{z}^3 + 12t) \end{pmatrix}$$

$$v = 0, w = -4.$$

Формулу (5) перепишем в виде:

$$K = \begin{pmatrix} z^2 & -1 \\ 1 & \bar{z}^2 \end{pmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{z}^2 & 1 \\ -1 & z^2 \end{pmatrix}$$

и по формуле (6) вычислим элементы $k_{11}(z,\bar{z},t), k_{12}(z,\bar{z},t), n_{11}(z,\bar{z},t), n_{22}(z,\bar{z},t)$:

$$k_{11}(z,\bar{z},t) = \frac{30i(5z^3 + z^2\bar{z}^5 + z^5\bar{z}^2 + 30z^2\bar{z}^2t + 5\bar{z}^3 - 30t)}{Q(z,\bar{z},t)},$$

$$k_{12}(z,\bar{z},t) = \frac{15i(-8z^5 + 3z^4\bar{z}^5 + 10z^2\bar{z}^3 + 120z^2t + 15\bar{z})}{Q(z,\bar{z},t)},$$

так как данные ψ_1, ψ_2 не зависят от t, поэтому

$$n_{11}(z,\bar{z}) = -\frac{2iz^2\bar{z}}{z^2\bar{z}^2 + 1},$$

$$n_{12}(z,\bar{z}) = -\frac{2i\bar{z}}{z^2\bar{z}^2 + 1},$$

где

$$Q(z,\bar{z},t) = 20z^6 - 50z^3\bar{z}^3 - 600z^3t + 20\bar{z}^6 - 600\bar{z}^3t - 3600t^2 - 225z\bar{z} - 9\bar{z}^5z^5.$$

$\psi_1 = z^2, \psi_2 = 1$ удовлетворяют уравнению (7) только при $U(z,\bar{z},t) = 0$, $V(z,\bar{z},t) = 0$, поэтому определим $\tilde{U}(z,\bar{z},t)$, $\tilde{V}(z,\bar{z},t)$ по формулам (10), (11) соответсвенно в следующем виде:

$$\tilde{U}(z,\bar{z},t) = \frac{30(5z^3 + z^2\bar{z}^5 + z^5\bar{z}^2 + 30z^2\bar{z}^2t + 5\bar{z}^3 - 30t)}{Q(z,\bar{z},t)},$$

$$\tilde{V}(z,\bar{z},t) = \frac{-15(240z^3\bar{z}^{11} + 27z^8\bar{z}^{10} + 400z\bar{z}^9 - 1650z^4\bar{z}^6 + 1440z^6\bar{z}^5t - 43200z^3\bar{z}^5t^2 + 36000z^4\bar{z}^3t + 5400\bar{z}z^5 - 864000zt^3 + P(z,\bar{z},t))}{Q^2(z,\bar{z},t)},$$

где $P(z,\bar{z},t) = 160z^{10} + 3375\bar{z}^5 + 120(z^6\bar{z}^8 - z^9\bar{z}^5) + 216000zt^2(z^3 - \bar{z}^3) - 7200z\bar{z}t(z^2\bar{z}^7 + \bar{z}^5)$.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема:
Теорема 2 Для поверхности Эннепера второго порядка $\psi_1 = z^2, \psi_2 = 1$, функции $\tilde{U}(z,\overline{z},t), \tilde{V}(z,\overline{z},t)$:
1) удовлетворяют модифицированному уравнению Веселова-Новикова;
2) убывают при $r \to \infty$, $\tilde{U} = O(\frac{1}{r^3}), \tilde{V} = O(\frac{1}{r^2})$, $z = re^{i\varphi}, |z| = r$;
3) являются вещественно-аналитическими при $t \neq 0$; и имеют особенности в точке $x = y = 0, t = 0$ при $c = -b$. Потенциал $\tilde{U}(z,\overline{z},t)$ в этой точке не определен и имеет конечное предельное значение

$$\lim_{r\to 0, \varphi=const} \tilde{U}(z,\bar{z},0) = 16\frac{2}{3}cos3\varphi.$$

Доказательство.
Утверждения 1-2 данной теоремы вытекают из теоремы 1 и после подстановки вместо переменных $z = re^{i\varphi}, \bar{z} = re^{-i\varphi}, t = 0$ новых потенциалов $\tilde{U}(z,\overline{z},t), \tilde{V}(z,\overline{z},t)$.
Утверждение 3 вытекает из явного вида нового потенциала $\tilde{U}(z,\overline{z},t)$ при $t = 0$, переходом на полярные координаты (r,φ) и подстановкой $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ в следующем виде:

$$\tilde{U}(r,\varphi) = \frac{60rcos\varphi(4cos^3\varphi - 3)(r^4+5)}{80r^4cos^2\varphi(4cos^2\varphi-3)^2 - 9(r^4+5)^2}.$$

Применением правила Лопиталя несколько раз в пределе от последнего потенциала, полностью доказывается теорема 2.

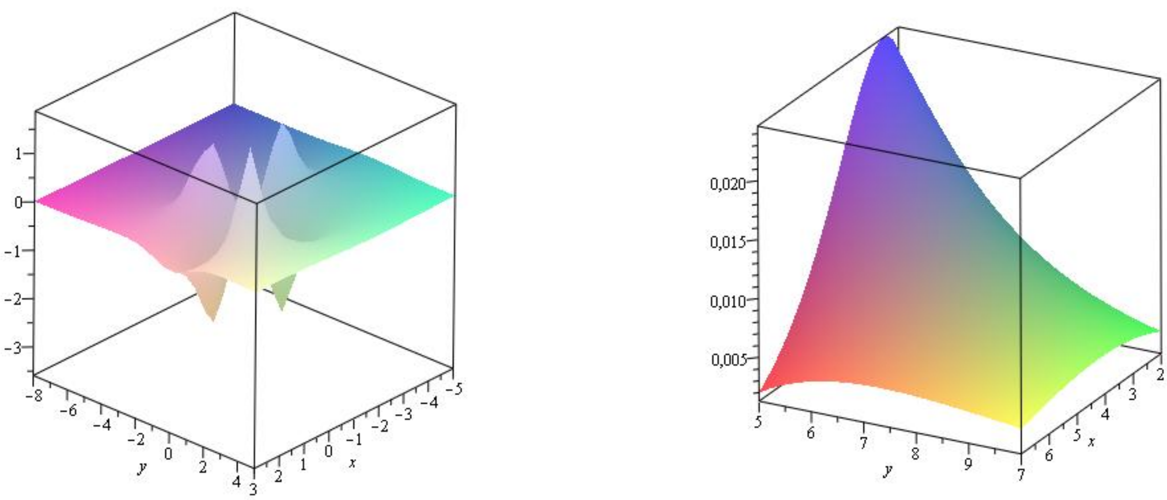

Рисунок 1 - Потенциал $\tilde{U}(x,,y,t)$ для поверхности Эннепера 2-го порядка, который проходит через особую точку $x \in [-5,3], y \in [-8,5], t \in [0,10]$ и вне промежутка особой точки $x \in [2,7], y \in [5,10], t \in [4,7]$.

3. Заключение

Поверхность Эннепера большего порядка ($k \geq 3$) будет жестко двигаться, когда потенциал имеет особенность в точке $x = 0, y = 0, t = const > 0$ при условии, что начальную точку поверхности можно выбрать $X_0 = (a, -b, b)$. На рис.1 (справа) видно, что поверхность Эннепера второго порядка будет изгибаться вне промежутка особой точки $x = y = 0, t = 0$ (и большего порядка вне $x = 0, y = 0, t = const > 0$).

Литература

[1] *И.А.Тайманов* Разрушающиеся решения модифицированного уравнения Веселова–Новикова и минимальные поверхности.// Теор. и матем. физика. 2015. Т. 182, N. 2. С. 213–222.

[2] *Delong Yu, Q.P. Liu, and Shikun Wang* Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation. // J. of Physics A 35 (2001), 3779-3785.

[3] *И.А.Тайманов* Преобразование Мутара двумерных операторов Дирака и геометрия Мебиуса.//Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 1, С. 129–141.

[4] *Bogdanov L.V.* Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation.// Theor. Math. Phys. 70 (1987), 309-314.

[5] *Л. В. Богданов* О двумерной задаче Захарова-Шабата.// ТМФ,72:1 (1987), 155-159.

[6] *Manakov S.V.* Method of inverse scattering and two-dimensional evolution equations. // Uspekhi matematicheskikh nauk 31 (5) (1976), 245-246. (Russian).

[7] *I. A. Taimanov* Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces.// Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179 (1997), 133-151.

[8] *Taimanov, I.A.* Two-dimensional Dirac operator and the theory ofsurfaces. // Russian Math. Surveys 61 (2006), no. 1, 79-159.

References

[1] *Taimanov, I.A.* Blowing up solutions of the modified Novikov-Veselov equation and minimal surfaces. // Theoret. and Math. Phys. 182:2 (2015), 173-181.

[2] *Delong Yu, Q.P. Liu, and Shikun Wang* Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation. // J. of Physics A 35 (2001), 3779-3785.

[3] *Taimanov, I.A.* The Moutard transformation of two-dimensional Dirac operators and the Mobius geometry.// Math. Notes 97:1 (2015), 124–135.

[4] *Bogdanov L.V.* Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation.// Theor. Math. Phys. 70 (1987), 309-314.

[5] *Bogdanov L.V.* About two dimensional Zakharav-Shabat problem.// Theor. Math. Phys.,72:1 (1987), 155-159.

[6] *Manakov S.V.* Method of inverse scattering and two-dimensional evolution equations. // Uspekhi matematicheskikh nauk 31 (5) (1976), 245-246. (Russian).

[7] *I. A. Taimanov* Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces.// Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179 (1997), 133-151.

[8] *Taimanov, I.A.* Two-dimensional Dirac operator and the theory ofsurfaces. // Russian Math. Surveys 61 (2006), no. 1, 79-159.