1-бөлім Математика

Раздел 1 Математика

Section 1 Mathematics

УДК 517.968.72

Существование решения задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77272211573,
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Айсагалиева С.С. – к.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт математики и механики Казахского национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Рассматривается управляемый процесс, описываемый линейным интегро-дифференциальным уравнением с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов управления. Исследование управляемости интегро-дифференциальных уравнений является новым направлением в теории интегро-дифференциальных уравнений. Проблема управляемости, возникшая от потребности решения актуальных задач в области естественных наук, медицине, экономике, технических наук, ставит более сложные задачи для интегро-дифференциальных уравнений. В предыдущих работах автора исследованы проблемы управляемости процессов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов управления. В данной работе делается попытка распространить эти результаты на интегро-дифференциальные уравнения. Получены необходимые и достаточные условия управляемости процессов для линейных интегро-дифференциальных уравнений путем неособого преобразования и построения общего решения одного класса интегральных уравнений.
Ключевые слова: управляемость, интегро-дифференциальные уравнения, оптимальное управление, минимизирующие последовательности.

Шектеулері бар сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулері үшін басқарымдылық есебінің шешімінің бар болуы

Айсағалиев С.Ә. – т. ғ. д., профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Айсағалиева С.С. - ф.-м. ғ. к., доцент, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика ғызыми-зерттеу институтының бас ғылыми қызметкері, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Фазалық және интегралдық, сондай-ақ, басқару мәніне қойылған шектеулері бар шекаралық шарттарында сызықты интегро-дифференциалдық теңдеумен сипатталатын басқарылатын үдеріс қарастырылады. Интегро-дифференциалдық теңдеулердің басқарымдылығын зерттеу интегро-дифференциалдық теңдеулер теориясындағы жаңа бағыт болып табылады. Жаратылыстану ғылымы, медицина, экономика, техникалық ғылымы аясындағы актуалды есептерді шешуді қажетсінуден туындаған басқарымдылық есебі интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін неғұрлым күрделі есептерді қарастыруға мүмкіндік береді.

Автордың алдыңғы жұмыстарында фазалық және интегралдық, сонымен қатар, басқару мәніне қойылған шектеулері бар шекаралық шарттарында қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үдерістің басқарымдылық есебі зерттелінген. Бұл жұмыста да сол нәтижелерді интегро-дифференциалдық теңдеулеріне қолдану әрекет етіледі. Сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін ерекше емес түрлендіру және бір классты интегралдық теңдеулердің жалпы шешімін құру жолымен үдерістердің басқарымдылығының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Түйін сөздер: басқарымдылық, интегро-дифференциалдық теңдеулер, тиімді басқару, минимумдаушы тізбектер.

The existence of a solution of the controllability problem for linear integral and differential equations with restrictions

Aisagaliev S.A. – Dr.Sci.(Tech.), Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Aisagalieva S.S. – Can. Sci.(Phys-Math.), Associate Professor, Chief Researcher, Research Institute of Mathematics and Mechanics of the al-Farabi Kazakh National University, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

A controlled process described by linear integral and differential equation with boundary conditions in the presence of phase and integral constraints with the limited control resources is considered. Research of controllability of integral and differential equations is a new direction in the theory of integral and differential equations. The controllability problem that arose from the need to solve urgent problems in the field of natural sciences, medicine, economics, technical sciences sets more sophisticated problems for integral and differential equations. In the previous works, the author studied the controllability problems of the processes described by ordinary differential equations with boundary conditions in the presence of phase and integral constraints with the limited control resources. In this paper an attempt is made to extend these results to the integral and differential equations. The necessary and sufficient conditions for the controllability processes for linear integral and differential equations by non-singular transformation and construction of the general solution of a class of integral equations are obtained.

Key words: controllability, integral and differential equations, optimal control, minimizing sequences.

1 Введение

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый линейным интегро - дифференциальным уравнением следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t)\int\limits_a^b K(t,\tau)v(\tau)d\tau + \\ +D(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)x(\lambda)d\lambda + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \end{aligned} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \gamma(t) \le L(t)x \le \delta(t), \ \ t \in I\}, \tag{3}$$

интегральных ограничений

$$g_j(x,u) \le c_j, \quad j=\overline{1,m_1}, \quad g_j(x,u) = c_j, \quad j=\overline{m_1+1,m_2}, \tag{4}$$

$$g_j(x,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [< a_j(t), x(t) > + < b_j(t), u(t) >]dt, \quad j=\overline{1,m_2}, \tag{5}$$

а также ограничений на значения управлений

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I,R^m)/u(t) \in U_1(t) \subset R^m \text{ п.в. } t \in I\}, \tag{6}$$

$$v(\tau) \in V(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_1,R^p)/v(\tau) \in V_1(\tau) \subset R^p \text{ п.в. } \tau \in I_1 = [a,b]\}. \tag{7}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами размерностей $n\times n$, $n\times m$, $n\times s$, $n\times k$ соответственно, матрицы $K(t,\tau) = \|K_{ij}(t,\tau)\|$, $i=\overline{1,s}$, $j=\overline{1,p}$, $t\in I$, $\tau \in I_1 = [a,b]$, $\Lambda(t,\lambda) = \|\Lambda_{ij}(t,\lambda)\|$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$ с элементами из L_2 на множествах $E_0 = \{(t,\tau)\in R^2/t_0 \le t \le t_1,\ a \le \tau \le b\}$, $E_1 = \{(t,\lambda) \in R^2/t_0 \le t, \lambda \le t_1\}$,

$$\int\limits_a^b \int\limits_{t_0}^{t_1} |K_{ij}(t,\tau)|^2 dt d\tau < \infty, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1} |\Lambda_{ij}(t,\lambda)|^2 dt d\lambda < \infty,$$

функция $\mu(t) \in L_2(I,R^n)$ – заданная, $L(t)$, $t\in I$ – заданная матрица порядка $s_1 \times n$ с непрерывными элементами. Полагаем, что S_0, S_1 – заданные выпуклые замкнутые множества, определяющие ограничения на начальное и конечное состояния фазовых переменных. Векторы $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ldots,\gamma_{s_1})$, $\delta(t) = (\delta_1(t),\ldots,\delta_{s_1})$, $t\in I$ – являются заданными функциями с непрерывными элементами, величины c_j, $j=\overline{1,m_2}$ – заданные постоянные, $a_j(t) = (a_{1j}(t),\ldots,a_{nj}(t))$, $b_j(t) = (b_{1j}(t),\ldots,b_{m_j}(t))$, $j=\overline{1,m_2}$ – заданные вектор функции с непрерывными элементами, $U_1(t) \subset R^m$, $V_1(\tau) \subset R^p$ – заданные выпуклые замкнутые множества.

Определение 1 *Процесс описываемый уравнением* (1) *называется управляемым в момент времени* t_0, *если существуют управления* $u(t) \in U(t)$, $v(\tau) \in V(\tau)$ *которые проводят траекторию системы* (1) *из точки* $x_0 = x(t_0) \in S_0$ *в точку* $x_1 = x(t_1) \in S_1$ *при фиксированных* t_0, t_1, $t_1 > t_0$ *и условиях* (3) – (5).

Определение 2 *Четверка* $(u(t), v(\tau), x_0, x_1) \in U\times V\times S_0\times S_1$ *называется допустимой, если функция* $x(t;t_0,x_0,x_1,u,v)$, $t\in I$ *решение интегро - дифференциального уравнения* (1) *удовлетворяет условиям* (2) – (7). *Множество всей допустимой четверки обозначим через* Σ, *т.е.* $(u(t), v(\tau), x_0, x_1) \in \Sigma \subset U\times V\times S_0\times S_1$.

Таким образом, процесс описываемый интегро-дифференциальным уравнением (1) является управляемым, если множество $\Sigma \ne \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество. В дальнейшем, процесс порожденный соотношениями (1) – (7) назовем задачей управляемости.

Задача 1 *Найти необходимое и достаточное условия управляемости для процесса описываемого интегро-дифференциальным уравнением* (1) *при условиях* (2) – (7).

Иными словами, найти необходимое и достаточное условия, чтобы множество Σ было не пусто.

Задача 2 *Пусть множество $\Sigma \neq \emptyset$. Найти четверку $(u(t), v(\tau), x_0, x_1) \in \Sigma$ т.е. найти управления $u(t) \in U(t)$, $v(\tau) \in V(\tau)$ которые переводят траекторию системы* (1), *исходящую из точки $x_0 = x(t_0) \in S_0$ в момент времени t_0 в точку $x_1 = x(t_1) \in S_1$, $t_1 > t_0$ при этом решение уравнения* (1), *функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, x_1, u, v)$, $t \in I$, $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$ находится на множестве $G(t) \subset R^n$, а также вдоль решения системы* (1) *выполнены интегральные ограничения* (4), (5).

Решения проблем управляемости динамических систем, математической теории оптимальных процессов, краевых задач дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями, а также задач управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями сводятся к разрешимости и построению общего решения интегрального уравнения

$$\Gamma w = \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t_0, t) w(t) dt = a, \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{8}$$

где $\Gamma(t_0, t) = \|\Gamma_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, n_2}$ – известная матрица порядка $n_1 \times n_2$ с кусочно непрерывными элементами по t при фиксированных t_0, t_1, $t_1 > t_0$, $w(\cdot) \in L_2(I, R^{n_2})$ – искомая функция, $a \in R^{n_1}$ любой вектор, $\Gamma : L_2(I, R^{n_2}) \to R^{n_1}$ – оператор.

Задача 3 *Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения* (8) *для любых $a \in R^{n_1}$.*

Задача 4 *Найти общее решение интегрального уравнения* (8) *для любого $a \in R^{n_1}$.*

Решения задач 3, 4 для любого $a \in R^{n_1}$ налагают жесткие требования на ядро интегрального уравнения (8) и они необходимы для случаев, когда S_0, S_1 заданные множества из R^n. Для случая, когда множества S_0, S_1 содержат единственные точки требуются решения следующих задач:

Задача 5 *Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения* (8) *при заданном $a \in R^{n_1}$;*

Задача 6 *Найти общее решение интегрального уравнения* (8) *при заданном $a \in R^{n_1}$.*

Решения задач 3 – 6 имеют многочисленные приложения в математике. В данной работе эти результаты имеют вспомогательные значения.

Цель работы – создание нового метода решения задачи управляемости для линейного интегро-дифференциального уравнения при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограничений на значения управления.

2 Обзор литературы

Математическими моделями многих явлений в различных областях науки: в биологии (Вольтерра, 1976 : 320), в медицине (Беллман, 1987 : 282), в биофизике (Романовский, 1984 : 290), в термодинамике биологических процессов (Рубин, 1984 : 352), в механике и электродинамике (Иманалиев, 1977 : 302), в экономике (Глушков, 1983 : 285), в синергетике (Николис, 1979 : 245) являются интегро-дифференциальные уравнения.

Общей теории интегро-дифференциальных уравнений, обобщенных решений интегральных уравнений посвящены монографии (Быков, 1957 : 312), (Lakshmikantham, 1995 : 304), (Иманалиев, 1981 : 265), (Краснов, 1975 : 304). В указанных работах рассматриваются вопросы существования, единственности и методы построения приближенных решений интегро-дифференциальных уравнений.

Исследование управляемости процессов описываемых интегро- дифференциальными уравнениями при наличии краевых условий, фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов системы является новым направлением в теории интегро-дифференциальных уравнений. Проблема управляемости возникшая от потребности решения актуальных задач в области естественных наук, медицине, экономике, технических наук ставит более сложные задачи для интегро-дифференциальных уравнений. В работах автора (Айсагалиев, 1991 : 11), (Айсагалиев, 2005 : 17), (Айсагалиев, 2012а : 11), (Айсагалиев, 2012б : 17), (Айсагалиев, 2015а : 15), (Айсагалиев, 2014 : 158), (Айсагалиев, 2015б : 207) исследованы проблемы управляемости процессов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов управления. В данной работе делается попытка распространить эти результаты на интегро-дифференциальные уравнения.

Теория управляемости берет свое начало с работы Р.Е. Калмана (Калман, 1961 : 26). Им построено управление с минимальной нормой и получен ранговый критерий управляемости для линейных систем с постоянными коэффициентами. Решение задачи управляемости на основе l – проблемы моментов было предложено Н.Н. Красовским (Красовский, 1968 : 475). Отдельные вопросы управляемости исследованы в работах (Габасов, 1971 : 502), (Зубов, 1975 : 502).

Вопросам управляемости, наблюдаемости и устойчивости управляемых систем посвящена работа (Ли, 1972 : 575). В последние годы опубликован ряд научных статей, посвященных проблемам управляемости и оптимального быстродействия динамических систем. Синтезу ограниченного управления на основе функций Ляпунова посвящена работа (Ананьевский, 2010 : 4). Геометрический подход к проблеме управляемости неавтономных линейных систем исследован в (Семенов, 2012 : 14).

Проблема управляемости тесно связана с решением проблем стабилизации динамических систем. В работе (Емельянов, 2012 : 8) рассматривается задача стабилизации нулевого положения равновесия билинейных и аффинных систем канонического вида. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем исследованы в (Коровин, 2011 : 5). Аналитическому исследованию проблем управляемости и оптимального управления посвящена монография (Варга, 1977 : 585). Следует отметить, что в указанных работах (Калман, 1961 : 26), (Красовский, 1968 : 475), (Габасов, 1971 : 502), (Зубов, 1975 : 502), (Ли, 1972 : 575), (Ананьевский, 2010 : 4), (Семенов, 2012 : 14), (Емельянов, 2012 : 8), (Коровин, 2011 : 5), (Варга, 1977 : 585) исследованы частные случаи общей задачи управляемости и быстродействия динамических систем без фазовых и интегральных ограничений.

В работе (Айсагалиев, 1991 : 11) приведен метод построения множества управлений каждый элемент которого переводит траекторию линейной системы из любой начальной точки в любое желаемое конечное состояние. В (Айсагалиев, 2005 : 17) найдены условия разрешимости и построения общего решения интегрального уравнения для решения проблем управляемости динамических систем. Решения задачи оптимального управления с краевыми условиями и фазовыми и интегральными ограничениями на основе решения проблем управляемости содержатся в (Айсагалиев, 2012а : 11). Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением исследованы в (Айсагалиев, 2012б : 17). В работах (Айсагалиев, 2015а : 15), (Айсагалиев, 2014 : 158), (Айсагалиев, 2015б : 207) рассмотрены методы решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений на основе решения проблем управляемости динамических систем.

Данная работа является продолжением научных исследований работ (Айсагалиев, 1991 : 11), (Айсагалиев, 2005 : 17), (Айсагалиев, 2012а : 11), (Айсагалиев, 2012б : 17), (Айсагалиев, 2015а : 15), (Айсагалиев, 2014 : 158), (Айсагалиев, 2015б : 207).

3 Материал и методы

Суть предлагаемого метода состоит в том, что на первом этапе исследования путем преобразования интегральные ограничения (4), (5) приводятся к дифференциальным уравнениям с краевыми условиями и введением фиктивного управления. Исходная задача погружается в краевую задачу линейного дифференциального уравнения. Далее, используя результаты исследования интегрального уравнения (8) находим все множества управлений, каждый элемент которого переводит траекторию линейной системы из любой начальной точки множества S_0 в конечное состояние из множества S_1. Такой подход позволяет получить равносильные тождества к исходной задаче управляемости и свести решения задач 1, 2 к начальной задаче оптимального управления. Необходимое и достаточное условия разрешимости исходной задачи управляемости определяются требованием на значение нижней грани функционала и строятся решения на основе предельной точки минимизирующих последовательностей.

3.1 Преобразования

Пусть матрицы A_0, $B_0(t)$, $t \in I$ такие, что

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} a_1^*(t) \\ \cdots \\ a_{m_2}^*(t) \end{pmatrix}, \quad B_0(t) = \begin{pmatrix} b_1^*(t) \\ \cdots \\ b_{m_2}^*(t) \end{pmatrix},$$

$$a_j(t) = \begin{pmatrix} a_{1j}(t) \\ \cdots \\ a_{nj}(t) \end{pmatrix}, \quad b_j(t) = \begin{pmatrix} b_{1j}(t) \\ \cdots \\ b_{mj}(t) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m_2}.$$

где $(*)$ – знак транспонирования. Введем вектор функцию

$$\eta(t) = \int\limits_{t_0}^{t} [A_0(\lambda)x(\lambda) + B_0(\lambda)u(\lambda)]d\lambda, \ \ t \in I,$$

Тогда интегральные ограничения (4), (5) могут быть представлены в виде

$$\dot{\eta}(t) = A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t), \ \ t \in I, \tag{9}$$

$$\eta(t_0) = 0, \ \ \eta(t_1) = \overline{c} \in Q, \tag{10}$$

$$Q = \{\overline{c} \in R^{m_2} / \overline{c}_j = c_j - d_j, \ \ j = \overline{1, m_1}, \ \ \overline{c}_j = c_j, \ \ j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \ \ d_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, m_1}\}, \tag{11}$$

где $\overline{c} = (\overline{c}_1, \dots, \overline{c}_{m_2})$, $d = (d_1, \dots, d_{m_1})$, $g_j(x,u) = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $d \geq 0$ – неизвестный вектор. Теперь задача управляемости (1) – (7) запишется в виде (см. (9) – (11))

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)u(t) + C_1(t)\int\limits_{a}^{b} K(t,\tau)v(\tau)d\tau + D_1(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)P\xi(\lambda)d\lambda + \overline{\mu}(t), \ \ t \in I, \tag{12}$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S, \ \ x(t) \in G(t), \ \ u(t) \in U(t), \ \ v(t) \in V(t), \tag{13}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2 1}) \in S_0 \times O_{m_2 1}, \ \ \xi(t_1) = \xi_1 = (x_1, \overline{c}) \in S_1 \times Q, \tag{14}$$

где

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \ \ A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{nm_2} \\ A_0(t) & O_{m_2 m_2} \end{pmatrix}, \ \ B_1(t) \begin{pmatrix} B(t) \\ B_0(t) \end{pmatrix},$$

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} C(t) \\ O_{m_2 s} \end{pmatrix}, \ \ D_1(t) = \begin{pmatrix} D(t) \\ O_{m_2 k} \end{pmatrix}, \ \ \overline{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) \\ O_{m_2 1} \end{pmatrix},$$

$$x(t) = P\xi(t), \ \ P = (I_n, \ O_{nm_2}),$$

O_{nq} – прямоугольная матрица порядка $r \times q$ с нулевыми элементами. I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

3.2 Интегральное уравнение

Рассмотрим решения задач 3, 4 для интегрального уравнения (8). Для решения задач 1, 2 необходимы следующие теоремы о существовании и общем виде решения интегрального уравнения (8).

Теорема 1 *Интегральное уравнение* (8) *при любом фиксированном* $a \in R^{n_1}$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$W(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Gamma(t_0, t)\Gamma^*(t_0, t)dt, \ \ t_1 > t_0 \tag{15}$$

порядка $n_1 \times n_1$ *является положительно определенной, где* $(*)$ *– знак транспонирования.*

Теорема 2 *Пусть матрица* $W(t_0,t_1)$ *из* (15) *положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения* (8) *при любом* $a \in R^{n_1}$ *имеет вид*

$$w(t) = \Gamma^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a + p(t) - \Gamma^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Gamma(t_0,\eta)p(\eta)d\eta, \quad t \in I, \quad (16)$$

где $p(\cdot) \in L_2(I,R^{n_2})$ *– произвольная функция,* $a \in R^{n_1}$ *– любой вектор.*

Рассмотрим решения задач 5, 6 для интегрального уравнения (8). Возникает вопрос: если матрица $W(t_0,t_1)$ не является положительно определенной, имеет ли решение интегральное уравнение (8)? В этом случае интегральное уравнение (8) может иметь решение, однако не для любого вектора $a \in R^{n_1}$. Условие $W(t_0,t_1) > 0$ является жестким условием на ядро интегрального уравнения. Аналогом данного условия является существование обратной матрицы A^{-1} для линейного алгебраического уравнения $Ax = b$, гарантирующая существование решения для любого $b \in R^n$. Алгебраическое уравнение $Ax = b$ может иметь решение и в случае, когда не существует обратной матрицы, однако не для любого вектора $a \in R^n$ $(rankA = rank(A,b))$.

Для решения задач 5, 6 необходимо исследовать экстремальную задачу: минимизировать функционал

$$J(w) = |a - \int_{t_0}^{t_1}\Gamma(t_0,t)w(t)dt|^2 \to \inf \quad (17)$$

при условии

$$w(\cdot) \in L_2(I,R^{n_2}), \quad (18)$$

где $a \in R^{n_1}$ – заданный вектор.

Теорема 3 *Пусть ядро оператора* $\Gamma(t) = \Gamma(t_0,t)$ *измеримо и принадлежит классу* L_2. *Тогда:*

1) функционал (17) *при условии* (18) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала* $J'(w) \in L_2(I,R^{n_2})$ *в любой точке* $w(\cdot) \in L_2(I,R^{n_2})$ *определяется по формуле*

$$J'(w) = -2\Gamma^*(t_0,t)a + 2\int_{t_0}^{t_1}\Gamma^*(t_0,t)\Gamma(t_0,\sigma)w(\sigma)d\sigma, \quad t \in I; \quad (19)$$

2) градиент функционала $J'(w) \in L_2(I,R^{n_2})$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J'(w+h) - J'(w)\| \le l\|h\|, \quad \forall w, \quad w+h \in L_2(I,R^{n_2}); \quad (20)$$

3) функционал (17) *при условии* (18) *является выпуклым, т.е.*

$$J(\alpha w + (1-\alpha)u) \le \alpha J(w) + (1-\alpha)J(u), \quad \forall w, \ u \in L_2(I,R^{n_2}), \quad \forall \alpha, \quad \alpha \in [0,1]; \quad (21)$$

4) вторая производная Фреше равна

$$J''(w) = 2\Gamma^*(t_0,\sigma)\Gamma(t_0,t), \ \ \forall\sigma, \ t \in I; \tag{22}$$

5) если выполнено неравенство

$$\begin{gathered}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1} \xi^*(\sigma)\Gamma^*(t_0,\sigma)\Gamma(t_0,t)\xi(t)dtd\sigma = \left[\int\limits_{t_0}^{t_1}\Gamma(t_0,t)\xi(t)dt\right]^2 \geq \\ \geq \mu\int\limits_{t_0}^{t_1}|\xi(t)|^2dt, \ \ \mu>0, \ \ \forall\xi, \ \xi(t)\in L_2(I,R^{n_2}),\end{gathered} \tag{23}$$

то функционал (17) *при условии* (18) *является сильно выпуклым.*

Теорема 4 *Пусть для экстремальной задачи* (17), (18) *построена последовательность* $\{w_n(t)\} \subset L_2(I,R^{n_2})$ *по алгоритму (см.* (19) – (23)*)*

$$w_{n+1}(t) = w_n(t) - \alpha_n J'(w_n), \quad g_n(\alpha_n) = \min_{\alpha>0} g_n(\alpha),$$

$$g_n(\alpha) = J(w_n - \alpha J'(w_n)), \ \ n = 0,1,2,\ldots.$$

Тогда числовая последовательность $\{J(w_n)\}$ *монотонно убывает, предел* $\lim\limits_{n\to\infty} J'(w_n) = 0.$

Если, кроме того, множество $M(w_0) = \{w(\cdot) \in L_2(I,R^{n_2})/J(w) \leq J(w_0)\}$ *ограничено, то:*

1) последовательность $\{w_n(t)\}$ *является минимизирующей, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} = J_* = \inf J(w), \ w(\cdot) \in L_2(I,R^{n_2})$;

2) $w_n \overset{сл}{\to} w_*$ *при* $n \to \infty$, *где* $w_* = w_*(t) \in W_* = \{w_*(\cdot) \in L_2(I,R^{n_2})/J(w_*) = \min\limits_{w\in M(w_0)} J(w) = J_* = \inf\limits_{w\in L_2(I,R^{n_2})} J(w)\}$;

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(w_n) - J(w_*) \leq \frac{m_0}{n}, \ \ m_0 = const > 0, \ \ n = 1,2,\ldots$$

4) для того, чтобы интегральное уравнение (8) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(w_*) = 0$, $w_* \in W_*$. *В этом случае* $w_* \in W_*$ *– решение интегрального уравнения* (8).

5) если значение $J(w_*) > 0$, *то интегральное уравнение* (8) *не имеет решения для данной правой части* $a \in R^{n_1}$;

6) если выполнено неравенство (23), *то* $\|w_n - w_*\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство теорем 1 – 4 аналогичные доказательствам теорем из [23].

3.3 Существование решения задачи управляемости

Наряду с линейным интегро-дифференциальным уравнением (12) с условиями (13), (14) рассмотрим линейную систему дифференциального уравнения

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + C_1(t)w_2(t) + D_1(t)w_3(t) + \overline{\mu}(t), \quad t \in I, \tag{24}$$

$$y(t_0) = \xi_0 = \xi(t_0), \quad y(t_1) = \xi_1 = \xi(t_1), \tag{25}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \; w_2(\cdot) \in L_2(I, R^s), \; w_3(\cdot) \in L_2(I, R^k) \tag{26}$$

где $\xi_0 = (x_0, O_{m_2 1}) \in S_0 \times O_{m_2 1}$, $\xi_1 = (x_1, \overline{c}) \in S_1 \times Q$. Заметим, что

$$\int_a^b K(t,\tau)v(\tau)d\tau \in L_2(I, R^s), \quad \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)x(\lambda)d\lambda \in L_2(I, R^k).$$

Пусть матрица $B_2(t) = (B_1(t), C_1(t), D_1(t))$ порядка $(n + m_2) \times (m + s + k)$, вектор функция $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \in L_2(I, R^{s+m+k})$. По исходным данным (24) – (26), определим следующие матрицы и векторы

$$a = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t_1)\overline{\mu}(t)dt, \; W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_(t)B_2^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt,$$

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)B_2(\tau)B_2^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau, \; W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t), \; t \in I,$$

$$\Lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = B_2^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)a, \; N_1(t) = -B_2^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} -B_1^*(t)\Phi^*(t_0, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) \\ -C_1^*(t)\Phi^*(t_0, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) \\ -D_1^*(t)\Phi^*(t_0, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11}(t) \\ N_{12}(t) \\ N_{13}(t) \end{pmatrix}, \; \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) =$$

$$= \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\xi_0 + \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1)\xi_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\overline{\mu}(\tau)d\tau - \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\overline{\mu}(t)dt,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \; t \in I,$$

где $\Phi(t, \tau) = \kappa(t)\kappa^{-1}(\tau)$, $\kappa(\tau)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1(t)\zeta$.

Теорема 5 *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определенная. Тогда управление $w(\cdot)\in L_2(I,R^{s+m+k})$ переводит траекторию системы* (24) *из любой начальной точки $\xi_0\in R^{n+m_2}$ в любое заданное конечное состояние $\xi_1\in R^{n+m_2}$, тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} w(t)\in\Sigma_1=\{w(\cdot)\in L_2(I,R^{s+m+k})/w(t)=p(t)+\Lambda_1(t,\xi_0,\xi_1)+ \\ +N_1(t)z(t_1,p),\ \ \forall p(\cdot)\in L_2(I,R^{s+m+k}),\ t\in I\}, \end{gathered} \tag{27}$$

где $p(\cdot)\in L_2(I,R^{s+m+k})$ – произвольная функция, а функция $z(t)=z(t,p)$, $t\in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot z=A_1(t)z+B_2(t)p(t),\ z(t_0)=0,\ t\in I. \tag{28}$$

Решение дифференциального уравнения (24)*, соответствующее управлению $w(t)\in\Sigma_1$ имеет вид*

$$y(t)=z(t,p)+\Lambda_2(t,\xi_0,\xi_1)+N_2(t)z(t_1,p),\ t\in I. \tag{29}$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1, 2. Действительно, из решения уравнения (24) при условиях (25), (26) имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_2(t)w(t)dt=a. \tag{30}$$

Данное интегральное уравнение относительно искомой функции $w(t){\in}L_2(I,R^{s+m+k})$ является частным случаем (8), где $\Gamma(t_0,t)=\Phi(t_0,t)B(t)$. Для существования решения интегрального уравнения (30) необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0,t_1)$ была положительно определенной. Далее, путём замены $\Gamma(t_0,t)$ на $\Phi(t_0,t)B_2(t)$ из (15) получим

$$W(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_2(t)B_2^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt.$$

Из (16) следует (27). Дифференциальное уравнение (28) и соотношение (29) непосредственно следуют из формул

$$z(t,p)=\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B_2(\tau)p(\tau)d\tau,\ z(t_1,p)=\Phi(t_1,t_0)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_2(t)p(t)dt.$$

Легко убедиться в том, что $y(t_0)=\xi_0$, $y(t_1)=\xi_1$. Теорема доказана.

Заметим, что компоненты вектор функции $w(t)\in\Sigma_1$ равны:

$$w_1(t)=p_1(t)+B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a+N_{11}(t)z(t_1,p),\ t\in I, \tag{31}$$

$$w_2(t)=p_2(t)+C_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a+N_{12}(t)z(t_1,p),\ t\in I, \tag{32}$$

$$w_3(t)=p_3(t)+D_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a+N_{13}(t)z(t_1,p),\ t\in I, \tag{33}$$

где $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$, $p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s)$, $p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k)$.

Из (29), (31) – (33) с учетом того, что $a = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\overline{\mu}(t)dt$, получим

$$w_1(t) = p_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)x_1 + T_1(t)d + \mu_{11}(t) + N_{11}(t)z(t_1, p),\ t \in I, \tag{34}$$

$$w_2(t) = p_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)d + \mu_{12}(t) + N_{12}(t)z(t_1, p),\ t \in I. \tag{35}$$

$$w_3(t) = p_3(t) + D_3(t)x_0 + T_4(t)x_1 + T_5(t)d + \mu_{13}(t) + N_{13}(t)z(t_1, p),\ t \in I. \tag{36}$$

$$y(t) = z(t, p) + \pi_1(t)x_0 + \pi_2(t)x_1 + \pi_3(t)d + \mu_{14}(t) + N_2(t)z(t_1, p),\ t \in I. \tag{37}$$

где $\mu_{11}(t)$, $\mu_{12}(t)$, $\mu_{13}(t)$, $\mu_{14}(t)$, $t \in I$ – известные функции.

Лемма 1 *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная. Тогда задача управляемости определяемая соотношениями* (12) – (14) *(либо* (1) – (7)*) равносильна тождествам*

$$w_1(t) = u(t),\ \ w_2(t) = \int\limits_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau,\ \ w_3(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)Py(\lambda)d\lambda,\ \ t \in I, \tag{38}$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)p_1(t) + C_1p_2(t) + D_1(t)p_3(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in I, \tag{39}$$

$$p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m),\ p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s),\ p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k),$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n},\ d \in D_0 = \{d \in R^{m_1} | d \geq 0\},$$

$$u(t) \in U(t),\ \ v(\tau) \in V(\tau),\ \ Py(t) = x(t) \in G,\ \ t \in I,$$

где $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$, $y(t)$, $t \in I$ определяются формулами (34) – (37) *соответственно.*

Доказательство. Если выполнены тождества (38), то функция $y(t)$, $t \in I$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = A_1(t)y(t) + B_1(t)u(t) + C_1(t)\int\limits_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau + D_1(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)Py(\lambda)d\lambda +$$

$$+\overline{\mu}(t),\ \ t \in I,\ \ y(t_0) = \xi_0,\ \ y(t_1) = \xi_1.$$

Как следует из формулы (29) функция $y(t) = z(t, p) + \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) + N_2(t)z(t_1, p)$, $t \in I$, где $z(t) = z(t, p)$, $t \in I$ удовлетворяет тождеству (39) для любых $p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s)$, $p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k)$. В частности, $\xi_0 = (x_0, O_{m_2 1}) \in S_0 \times O_{m_2 1}$, $\xi_1 = (x_1, \overline{c}) \in S_1 \times Q$. Далее, из включений $d \in D_0$, $u(t) \in U(t)$, $v(\tau) \in V(\tau)$ следует, что $y(t) \equiv \xi(t)$, $t \in I$, где $Py(t) = P\xi(t) = x(t) \in G(t)$, $t \in I$. Итак, при выполнении тождеств (38) – (39) верны соотношения (12) – (14). Лемма доказана.

Из теоремы 3 и леммы 1 следует, что решение задачи управляемости может быть сведено к решению следующей задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$
\begin{gathered}
J(u,v,p_1,p_2,p_3,\omega,x_0,x_1,d)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\{|w_1(t)-u(t)|^2+\\
+|\int\limits_a^b K(t,\tau)v(\tau)d\tau-w_2(t)|^2+|\int\limits_{t_0}^{t_1}\Lambda(t,\lambda)Py(\lambda)d\lambda-w_3(t)|^2+\\
+|\omega(t)-L(t)Py(t)|^2\}dt\to\inf
\end{gathered}
\tag{40}
$$

при условиях

$$\dot z=A_1(t)z+B_1(t)p_1(t)+C_1(t)p_2(t)+D_1(t)p_3(t),\ \ z(t_0)=0,\ \ t\in I, \tag{41}$$

$$p_1(\cdot)\in L_2(I,R^m),\ \ p_2(\cdot)\in L_2(I,R^s),\ \ p_3(\cdot)\in L_2(I,R^k), \tag{42}$$

$$(x_0,x_1)\in S_0\times S_1\subset R^{2n},\ \ d\in D_0=\{d\in R^{m_1}|d\geq 0\}, \tag{43}$$

$$u(t)\in U(t),\ \ \ v(\tau)\in V(\tau),\ \ \ \omega(t)\in\Omega(t),\ \ \ t\in I, \tag{44}$$

где множество

$$\Omega(t)=\{\omega(\cdot)\in L_2(I,R^{s_1})/\gamma(t)\leq\omega(t)\leq\delta(t)\ \ \text{п.в.}\ \ t\in I\}, \tag{45}$$

матрица $P=(I_n,O_{nm_2},)$ функции $w_1(t),w_2(t),w_3(t),y(t),t\in I$ определяются формулами (34) – (37) соответственно.

Введем следующие обозначения

$$
\begin{gathered}
\theta=\theta(\cdot,\cdot)=(u(t),v(\tau),p_1(t),p_2(t),p_3(t),\omega(t),x_0,x_1,d)\in X=\\
=U(t)\times V(\tau)\times L_2^\alpha(I,R^m)\times L_2^\alpha(I,R^s)\times L_2^\alpha(I,R^k)\times\Omega(t)\times S_0\times S_1\times D_0^\alpha\subset H=\\
=L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^p)\times L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^s)\times L_2(I,R^k)\times\\
\times L_2(I,R^{s_1})\times R^n\times R^n\times R^{m_1},\\
L_2^\alpha(I,R^m)=\{p_1(\cdot)\in L_2(I,R^m)/\|p_1\|\leq\alpha\},\\
L_2^\alpha(I,R^s)=\{p_2(\cdot)\in L_2(I,R^s)/\|p_2\|\leq\alpha\},\\
L_2^\alpha(I,R^k)=\{p_3(\cdot)\in L_2(I,R^k)/\|p_3\|\leq\alpha\},\\
D_0^\alpha=\{d\in R^{m_1}/|d|\leq\alpha\},
\end{gathered}
$$

где $\alpha>0$ – достаточно большое число $\alpha<\infty$.

Теперь оптимизационная задача (40) – (45) запишется в виде: минимизировать функционал

$$J(\theta)=\int\limits_{t_0}^{t_1}F_0(\theta(\cdot,\cdot),z(t,p),z(t_1,p),t)dt\to\inf,\ \ \theta\in X\subset H, \tag{46}$$

где

$$F_0 = |w_1 - u|^2 + |\int\limits_a^b K(t,\tau)v(\tau)d\tau - w_2|^2 + |\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)Py(\lambda)d\lambda - w_3|^2 + |\omega - LPy|^2.$$

Заметим, что $U(t)$, $V(\tau)$, $L_2^\alpha(I,R^m)$, $L_2^\alpha(I,R^s)$, $L_2^\alpha(I,R^k)$, $\Omega(t)$ – ограниченные выпуклые замкнутые множества в рефлексивном банаховом пространстве. Так как D_0^α, S_0, S_1 – ограниченные выпуклые замкнутые множества, то множество X – слабобикомпактно в H. Следует отметить, что функционал $J(\theta)$, $\theta \in X$ является непрерывным выпуклым функционалом в слабобикомпактном множестве X. Следовательно, множество $X_* = \{\theta_* \in X / J(\theta_*) = J_* = \inf\limits_{\theta \in X} J(\theta)\}$ – не пусто. Иными словами, слабополунепрерывный снизу функционал $J(\theta)$ достигает нижней грани на слабобикомпактном множестве X.

Лемма 2 *Пусть матрица* $W(t_0,t_1)$ *положительно определенная. Для того, чтобы задача управляемости* (1) – (7) *имело решение необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(\theta_*) = 0$, *где* $\theta_* = (u_*(t), v_*(\tau), p_{1*}(t), p_{2*}(t), p_{3*}(t),\ \omega_*(t), x_{0*}, x_{1*}, d_*) \in X_* \subset X$ *оптимальное управление в задаче* (46).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть задача управляемости (1) – (7) (либо (12) – (14)) имеет решение. Пусть $x_*(t) = x_*(t; t_0, x_0^*, x_1^*, u_*, v_*)$, $t \in I$ – решение интегро-дифференциального уравнения (1).

Покажем, что значение $J(\theta_*) = 0$. Как следует из леммы 1 соотношения (1) – (7) равносильны тождествам (38) – (39). Следовательно, $w_{1*}(t) = u_*(t) \in U(t)$, $w_{2*}(t) = \int\limits_a^b K(t,\tau)v_*(\tau)d\tau$, $v_*(\tau) \in V(\tau)$, $\tau \in I_1$, $w_{3*}(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)Py_*(\lambda)d\lambda$, $y_*(t) = z(t,p_*) + \Lambda_2(t,\xi_0^*,\xi_1^*) + N_2(t)z(t_1,p_*) = \xi_*(t)$, $\xi_0^* = (x_{0*}, O_{m_21})$, $\xi_1^* = (x_{1*}, \overline{c}_*)$, $\overline{c}_* = (\overline{c}_1^*, \ldots, \overline{c}_{m_2}^*)$, $\overline{c}_j^* = c_j - d_j^*$, $j = \overline{1,m_1}$, $P\xi_*(t) = x_*(t) = x_*(t;t_0;x_{0*},x_{1*},u_*,v_*)$, $t \in I$, $\omega_*(t) = L(t)Py_*(t)$, $t \in I$, где

$$w_{1*} = p_{1*}(t) + D_0(t)x_{0*} + T_0(t)x_{1*} + T_1(t)d_* + \mu_{11} + N_{11}(t)z(t_1,p_*),$$

$$w_{2*} = p_{2*}(t) + D_2(t)x_{0*} + T_2(t)x_{1*} + T_3(t)d_* + \mu_{12} + N_{12}(t)z(t_1,p_*),$$

$$w_{3*} = p_{3*}(t) + D_3(t)x_{0*} + T_4(t)x_{1*} + T_5(t)d_* + \mu_{13} + N_{13}(t)z(t_1,p_*),$$

$$y_*(t) = z(t,p_*) + \pi_1(t)x_{0*} + \pi_2(t)x_{1*} + \pi_3(t)d_* + \mu_{14} + N_2(t)z(t_1,p_*),\ \ t \in I,$$

$$Py_*(t) = x_*(t),\ \ \omega_*(t) = L(t)Py_*(t) = L(t)x_*(t),\ \ t \in I.$$

Тогда

$$J(\theta_*) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [|w_{1*}(t) - u_*(t)|^2 + |\int\limits_a^b K(t,\tau)v_*(\tau)d\tau - w_*(t)2|^2 +$$

$$+|\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)Py_*(\lambda)d\lambda - w_{3*}(t)|^2 + |\omega_*(t) - L(t)Py_*(t)|^2]dt = 0$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть значение $J(\theta_*) = 0$, $\theta_* \in X_* \subset X$. Покажем, что задача управляемости (1) – (7) имеет решение. В самом деле, значение $J(\theta_*) = 0$ тогда и только тогда, когда $w_{1*}(t) = u_*(t)$, $\int\limits_a^b K(t,\tau)v_*(\tau)d\tau = w_{2*}(t)$, $\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)Py_*(\lambda)d\lambda = w_{3*}(t)$, $\omega_*(t) = L(t)Py_*(t)$, $t \in I$, где $u_*(t) \in U(t)$, $v_*(\tau) \in V(\tau)$, $\omega_*(t) \in \Omega(t)$, $t \in I$, $x_{0*} \in S_0$, $x_{1*} \in S_1$, $d_* \in D_0$. Тогда $y_*(t) = \xi_*(t) = (x_*(t), \eta_*(t))$, $t \in I$. Отсюда следует, что $x_*(t)$, $t \in I$ – решение интегро - дифференциального уравнения (1). Достаточность доказана. Теорема доказана.

4 Результаты и обсуждение

В статье получены следующие результаты: путем преобразования интегральные ограничения приводятся к дифференциальным уравнениям с краевыми условиями; введением фиктивного управления исходная задача погружается в краевую задачу линейного дифференциального уравнения; найдены все множества управлений, каждый элемент которого переводит траекторию линейной системы из любой начальной точки заданного множества в конечное состояние из известного множества; получены равносильные тождества к исходной задаче управляемости; решение задачи управляемости сведено к начальной задаче оптимального управления; найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управляемости в виде требования на значение нижней грани функционала.

Интегро-дифференциальное уравнение связывает воедино настоящее, будущее и прошлое процесса. Такие математические модели явлений более адекватно описывают их свойства. Один из создателей квантовой механики, В. Гейзенберг, с своей книге "Физика и философия"делает следующие предположение: "... основное уравнение материи, рассматриваемое, как математическое представление всей материи, должно иметь вид сложной системы интегро-дифференциальных уравнений".

5 Заключение

Создание общей теории краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений со сложными краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений является актуальной проблемой с многочисленными приложениями в естественных науках, экономики и экологии.

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений при наличии фазовых и интегральных ограничений.

Принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов состоит в том, что исходная краевая задача в начале погружается в задачу управляемости с фиктивными управлениями из функциональных пространств, с последующим сведением к начальной задаче оптимального управления.

Список литературы

[1] Lakshmikantham V., Rao M.R. Theory of integro-differential equations. – London, 1995. – 402 с.

[2] Айсагалиев С. А., Кабидолданова А. А. Оптимальное управление линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. Т. 48, Вып. 6. – С. 826–836.

[3] Айсагалиев С. А. Конструктивная теория краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алматы: Қазақ университетi, 2015. – 207 с.

[4] Айсагалиев С. А., Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. – 2005. Т. 5, Вып. 4. – С. 17–34.

[5] Айсагалиев С. А. Теория управляемости динамических систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2014. – 158 с.

[6] Айсагалиев С. А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1991. Т. 27, Вып. 9. –С. 1037–1045.

[7] Айсагалиев С. А., Белогуров А. П. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012. Т. 53, Вып. 1.– С. 13–28.

[8] Айсагалиев С. А., Калимолдаев М. Н. Конструктивный метод решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2015. Т. 51, Вып. 2. – С. 149–162.

[9] Ананьевский И. М., Анохин Н. В., Овсеевич А. И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады РАН. – 2010. Т. 434, Вып. 3. – С. 319-323.

[10] Беллман Р. Математические методы в медицине. – М.: Мир, 1987. – 282 с.

[11] Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. –Фрунзе: Илим, 1957. – 312 с.

[12] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 585 с.

[13] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существования. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

[14] Габасов Р., Кириллов Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 421 с.

[15] Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 285 с.

[16] Емельянов С. В., Крищенко А. П. Стабилизация нерегулярных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. Т. 48, Вып. 11. – С. 1515-1524.

[17] Зубов В. И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 502 с.

[18] Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977. – 302 с.

[19] Иманалиев М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. – Фрунзе: Илим, 1981. – 265 с.

[20] Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды Конгресса ИФАК. – М.: АН СССР. – 1961. Т. 2. – С. 521-547.

[21] Коровин С. К., Капалин И. В., Фомичев В. В. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем // Доклады РАН. – 2011. Т. 441, № 5. – С. 606-611.

[22] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

[23] Красовский Н. Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.

[24] Ли Э. В., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 575 с.

[25] Николис Г., Пригожин И. Саморганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 245 с.

[26] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984. – 290 с.

[27] Рубин А.Б. Термодинамика биологических процессов. – Изд-во МГУ, 1984. – 352 с.

[28] Семенов Ю. М., О полной управляемости линейных неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. Т. 48, Вып. 9. – С. 1265-1277.

References

[1] Lakshmikantham V., Rao M.R. *Theory of integro-differential equations* (London, 1995), 402.

[2] Aisagaliev S. A., Kabidoldanova A. A. «Optimalnoe upravlenie lineynyimi sistemami s lineynyim kriteriem kachestva i ogranicheniyami [On the optimal control of linear systems with linear performance criterion and constraints]», *Differentsialnyie uravneniya,* vol. 48, Issue 6 (2012) : 826–836.

[3] Aisagaliev S. A. *Konstruktivnaya teoriya kraevyih zadach obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy* [Constructive theory of boundary value problems for ordinary differential equations](Almaty: Kazakh universiteti, 2015), 207.

[4] Aisagaliev S. A., «Obschee reshenie odnogo klassa integralnyih uravneniy [The general solution of a class of integral equations]», *Matematicheskiy zhurnal,* vol. 5, No 4 (2005) : 17–34.

[5] Aisagaliev S. A. *Teoriya upravlyaemosti dinamicheskih sistem* [Controllability theory of dynamical systems] (Kazakh universiteti, 2014), 158.

[6] Aisagaliev S. A., «Upravlyaemost nekotoroy sistemyi differentsialnyih uravneniy» [Controllability of a differential-equation system], *Differentsialnyie uravneniya,* vol. 27, Issue 9 (1991) : 1037–1045.

[7] Aisagaliev S. A., Belogurov A. P., «Upravlyaemost i byistrodeystvie protsessa, opisyivaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennyim upravleniem [Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control]», *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal,* vol. 53, Issue 1 (2012) : 13–28.

[8] Aisagaliev S. A., Kalimoldaev M. N., «Konstruktivnyiy metod resheniya kraevoy zadachi dlya obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy [Constructive method for solving a boundary value problem for ordinary differential equations]», *Differentsialnyie uravneniya,* vol. 51, Issue 2 (2015) : 149–162.

[9] Ananevskiy I. M., Anahin N. V., Ovseevich A. I., «Sintez ogranichennogo upravleniya lineynyimi dinamicheskimi sistemami s pomoschyu obschey funktsii Lyapunova [Synthesis of limited control for linear dynamical systems with the using of the general Lyapunov function]», *Dokladyi RAN,* vol. 434, No 3 (2010) : 319-323.

[10] Bellman R. *Matematicheskie metodyi v meditsine* [Mathematical Methods in Medicine] (M.: Mir, 1987), 282.

[11] Byikov Ya.V., *O nekotoryih zadachah teorii integro-differentsialnyih uravneniy* [On some problems of the theory of integro-differential equations] (Frunze: Ilim, 1957), 312.

[12] Varga Dzh. *Optimalnoe upravlenie differentsialnyimi i funktsionalnyimi uravneniyami* [Optimal control of differential and functional equations] (M.: Nauka, 1977), 585.

[13] Volterra V. *Matematicheskaya teoriya borbyi za suschestvovaniya* [The mathematical theory of the struggle for existence] (M.: Nauka, 1976), 320.

[14] Gabasov R., Kirillov F. M. *Kachestvennaya teoriya optimalnyih protsessov* [Qualitative theory of optimal processes] (M.: Nauka, 1971), 421.

[15] Glushkov V.M., Ivanov V.V., Yanenko V.M. *Modelirovanie razvivayuschihsya sistem* [Modeling of developing systems] (M.: Nauka, 1983), 285.

[16] Emelyanov S. V., Krischenko A. P., «Stabilizatsiya neregulyarnyih sistem [Stabilization of irregular systems]», *Differentsialnyie uravneniya,* vol. 48, Issue 11 (2012) : 1515-1524.

[17] Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on the control theory] (M.: Nauka, 1975), 502.

[18] Imanaliev M.I. *Metodyi resheniya nelineynyih obratnyih zadach i ih prilozheniya* [Methods for solving nonlinear inverse problems and their applications] (Frunze: Ilim, 1977), 302.

[19] Imanaliev M.I. *Obobschennyie resheniya integralnyih uravneniy pervogo roda* [Generalized solutions of integral equations of the first kind] (Frunze: Ilim, 1981), 265.

[20] Kalman R. E., «Ob obschey teorii sistem upravleniya [On the General Theory of Control Systems]». Trudyi Kongressa IFAK. Vol. 2. – M.: AN SSSR, 1961.

[21] Korovin S. K., Kapalin I. V., Fomichev V. V., «Minimalnyie stabilizatoryi dlya lineynyih dinamicheskih sistem [Minimum stabilizers for linear dynamic systems]». *Dokladyi RAN,* vol. 441, No 5. 2011.

[22] Krasnov M.L. *Integralnyie uravneniya* [Integral equations] (M.: Nauka, 1975), 304.

[23] Krasovskiy N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control] (M.: Nauka, 1968), 475.

[24] Li E. V., Markus L. *Osnovyi teorii optimalnogo upravleniya* [Fundamentals of Optimal Control Theory] (M.: Nauka, 1972), 575.

[25] Nikolis G., Prigozhin I. *Samoorganizatsiya v neravnovesnyih sistemah* [Self-organization in nonequilibrium systems] (M.: Mir, 1979), 245.

[26] Romanovskiy Yu.M., Stepanova N.V., Chernavskiy D.S. *Matematicheskaya biofizika* [Mathematical Biophysics] (M.: Nauka, 1984), 290.

[27] Rubin A.B. *Termodinamika biologicheskih protsessov* [Thermodynamics of biological processes] (Izd-vo MGU, 1984), 352.

[28] Semenov Yu. M., «O polnoy upravlyaemosti lineynyih neavtonomnyih sistem [On the complete controllability of linear nonautonomous systems]», *Differentsialnyie uravneniya,* vol 48, Issue 9 (2012) : 1265-1277.