УДК 512.56, 512.57

Сложность решеток квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов

Луцак С.М., докторант, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Республика Казахстан, +77787149316, E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

В работе выполнено исследование сложности строения решеток (относительных) квазимногообразий для классов дифференциалных группоидов. Вопрос о том, что считать сложностью решетки квазимногообразий и какие решетки квазимногообразий являются сложными согласно той или иной мере сложности, а какие - нет, изучался многими авторами. Хорошо известны две меры сложности строения решеток квазимногообразий: иррациональность (невычислимость множества всех их конечных подрешеток) и Q-универсальность. Иррациональность решетки квазимногообразий означает, что не существует алгоритма, который по заданной конечной решетке определял бы, вложима эта решетка в рассматриваемую решетку квазимногообразий или нет. Другая мера сложности строения решеток квазимногообразий выражается понятием Q-универсальности. Это значит, что решетка квазимногообразий для любого квазимногообразия конечной сигнатуры является гомоморфным образом некоторой подрешетки рассматриваемой Q-универсальной решетки квазимногообразий. Два года назад была установлена связь между иррациональностью и Q-универсальностью и поставлена проблема. Верно ли, что любой Q-универсальный класс систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс? Существует ли не Q-универсальный класс, но, тем не менее, являющийся иррациональным? Автором доказана выполнимость нетривиального тождества на решетках квазимногообразий для классов дифференциалных группоидов. Установлено, что существует континуум иррациональных классов дифференциалных группоидов, не являющихся Q-универсальными.

Ключевые слова: решетка квазимногообразий, иррациональность, Q-универсальность.

Дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейне торлардың күрделілігі

Луцак С.М., докторант, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан Республикасы, +77787149316, Электрондық пошта: sveta_lutsak@mail.ru

Жұмыста дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейне торлардың күрделілігіне (салыстырмалығына) зерттеу жасалды. Мәселе квазикөпбейне торлардың күрделілігі деп нені санау санау керек, және квазикөпбейне торлардың қайсысын күрделіліктің сол немесе басқа өлшеміне сәйкес күрделі болып табылады, ал қайсылары күрделі емес болып табылатынын көптеген авторлар зерттеген. Квазикөпбейне торлар күрделілігінің екі өлшемін жақсы білеміз: иррационалдығы (барлық төменгі торлары жиынтығының есептелмейтіні) және Q-әмбебаптығы. Квазикөпбейне торлардың иррационалдығы, тапсырылған соңғы торы бойынша осы тор қарастырылып жатқан квазикөпбейне торларына салынатынын анықтайтын алгоритмнің жоқ дегені. Квазикөпбейне торлар күрделілігінің екінші өлшемі Q-әмбебаптығы ұғымымен білдіріледі. Ол квазикөпбейне торы соңғы сигнатурасының кез келген квазикөпбейнелігі үшін қарастырылып жатқан квазикөпбейне тордың Q-әмбебаптығы қайсы бар төменгі торы гомоморфты бейне болып табылады дегені. Осыдан екі жыл бұрын иррационалдық пен Q-әмбебаптығы арасындағы байланысы анықтады және мәселе көтерілді. Белгіленген сигнатураны жүйелерінің кез келген Q-әмбебап класы иррационалдық төменгі класына ие болғаны дұрыс па? Q-әмбебап болып табылмайтын, бірақ, иррационалды болып табылатын клас бар ма? Дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейнелік торларында тревиалды емес тепе-теңдігінің орындалатынын дәлелдеді. Q-әмбебаптық болып табылмайтын дифференциалды группоидтердің иррационалдық кластарының континуумы бар болғаны анықталды.

Түйін сөздер: квазикөпбейне тор, иррационалдығы, Q-әмбебаптығы.

The complexity of quasivariety lattices for the classes of differential groupoids

Lutsak S.M., PhD student, the L.N. Gumilev Eurasian National University,
Astana, Kazakhstan, +77787149316, E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

In this work we explore the complexity of structure of (relative) quasivariety lattices for the classes of differential groupoids. A question, what is the complexity of quasivariety lattice and what quasivariety lattices are complex according to this or that measure of complexity and which are not, studied by many authors. Two complexity measures of the structure of quasivariety lattices are known: unreasonability (non-computability the set of all finite sublattices of the quasivariety lattices) and Q-universality. Unreasonability of the quasivariety lattice means that there is no algorithm which would determine by the given finite lattice, this lattice is embeddable into the considered quasivariety lattice or not. Other complexity measure of the structure of quasivariety lattices is expressed by the concept of Q-universality. It means that the quasivariety lattice for any quasivariety of finite signature is a homomorphic image of some sublattice of the considered Q-universal lattice of quasivarieties. Two years ago it was established a connection between unreasonability and Q-universality; it was also posed the following problem. Does any Q-universal class of algebraic structures of a fixed signature contain a unreasonable subclass? Is there a class of algebraic structures which is not Q-universal but which is nevertheless unreasonable? We find a non-trivial identity holding in quasivariety lattices for the classes of differential groupoids. It is proved that there are continuum many unreasonable classes of the differential groupoids which are not Q-universal.

Key words: quasivariety lattice, unreasonability, Q-universality.

1 Введение

Одной из известных проблем универсальной алгебры и теории решеток является вопрос о том, какие решетки изоморфны решеткам квазимногообразий. Эта проблема была поставлена в 1945 году Г. Биркгофом (Birkhoff, 1946: 310) и, независимо, в 1966 году А.И. Мальцевым (Мальцев, 1968: 217) и является актуальной по настоящее время. Описание решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий, получено для ряда конкретных классов решеток (например, для алгебраических точечных решеток (Горбунов, 1999, 294–299), для конечных дистрибутивных решеток (Туманов, 1983: 168-181)). Нахождение решения проблемы Биркгофа-Мальцева в самой общей ее постановке представляется исключительно сложной задачей. Утверждать это позволяет ряд результатов о сложности строения решеток квазимногообразий, полученных к настоящему времени, см. (Adams, 2004: 357–378), (Nurakunov, 2012a: 3, 10-12, 14), (Нуракунов, 2014: 395–399), (Швидефски, 2015: 392, 393–395), а также (Горбунов, 1999: 271–274, 291–300). Тем не менее, изучение проблемы Биркгофа-Мальцева для конкретных классов алгебраических систем представляет интерес и заслуживает внимания.

В настоящей работе продолжено изучение сложности строения решеток квазимногообразий. Объектом исследования являются решетки (относительных) квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов, а предметом исследования — сложность этих решеток, которая характеризуется с различных точек зрения. А именно, рассматриваются две меры сложности строения решеток квазимногообразий: иррациональность (или невычислимость множества всех их конечных подрешеток) и Q-универсальность.

Решетка квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ для класса $\mathbf{K}$ алгебраических систем фиксированной сигнатуры называется иррациональной, если множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ невычислимо, т. е. не существует алгоритма, который по заданной конечной решетке определял бы, вложима эта решетка в рассматриваемую решетку квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ или нет. В этом случае сам класс $\mathbf{K}$ тоже будем называть иррациональным. Эта концепция сложности строения решеток квазимногообразий была введена К. Херрманном в 2007 году и развита в работах А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 1–17), (Nurakunov, 2012б: 391–393), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 395–399). Первые примеры иррациональных квазимногообразий (а именно, квазимногообразия унаров и точечных абелевых групп) были построены им же в работах (Nurakunov, 2012a: 3, 10-12, 14), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399). Существование иррациональных квазимногообразий говорит о том, что решетки квазимногообразий могут иметь чрезвычайно сложное строение.

Другая мера сложности строения решеток квазимногообразий была введена М.В. Сапиром в 1985 г. в работе (Sapir, 1985: 172) и выражается понятием Q-универсальности. Согласно М.В. Сапиру, квазимногообразие $\mathbf{K}$ является Q-универсальным, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}'$ конечной сигнатуры решетка $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}')$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ (Sapir, 1985: 172). В этом случае решетка квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ также называется Q-универсальной; она не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. Сейчас известно очень много различных Q-универсальных квазимногообразий и число таких примеров постоянно растет, см. обзорную работу (Adams, 2004: 357–378), а также (Горбунов, 1999: 271–274).

Классы (квазимногообразия) дифференциальных группоидов узучались в работе (Schwidefsky, 2014: 1111–1117), см. также работы А.В. Кравченко (Kravchenko, 2008: 11–17), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012a: 89–99), (Кравченко, 2012б: 201–207). Дифференциальным группоидом называется алгебра с одной бинарной операцией, удовлетворяющая тождествам (символ $\cdot$ обозначает бинарную операцию):

1. $\forall x\ [x \cdot x = x]$
2. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall t\ [(x \cdot y) \cdot (z \cdot t) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot t)]$
3. $\forall x\ \forall y\ [x \cdot (x \cdot y) = x]$

В работе (Schwidefsky, 2014: 1116) было показано, что существует иррациональный класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, а в работе (Kravchenko, 2008: 13) доказана Q-универсальность класса дифференциальных группоидов. Также, в работе (Schwidefsky, 2014: 1121) было доказано, что класс $\mathbf{K}$ всех систем сигнатуры σ является Q-универсальным тогда и только тогда, когда он содержит иррациональный подкласс $\mathbf{K}'$, т. е такой подкласс $\mathbf{K}'$, что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}')$ невычислимо. Таким образом, была установлена связь между двумя рассмотренными выше мерами сложности. Вследсвие чего, возникла следующая проблема (Schwidefsky, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Верно ли, что любой Q-универсальный класс $\mathbf{K}$ систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс? Существует ли иррациональный класс $\mathbf{K}$, не являющийся Q-универсальным? Ответ на первый вопрос был дан в работе (Швидефски, 2015: 392).

Автором найдены примеры не Q-универсальных классов алгебраических систем, для которых множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий невычислимы. А именно, доказано существование континуума иррациональных классов дифференциальных группоидов, не являющихся Q-универсальными, см. теоремы 2 и 3.

2 Обзор литературы

Вопрос о том, какие решетки изоморфны решеткам квазимногообразий, поставлен в работах (Birkhoff, 1946: 310), (Мальцев, 1968: 217). В настоящее время эту проблему называют проблемой Биркгофа-Мальцева; результаты и обсуждения, касательно данной проблемы, см. в (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 382–383, 393–395), (Горбунов, 1999: 271–274, 291–300).

Изучению свойств решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий алгебраических систем, посвящено огромное количество работ, см. библиографию в настоящей работе и в (Adams, 2004: 372–378), (Швидефски, 2015: 382–383, 395–398), (Горбунов, 1999: 339–365). Среди них можно отметить работы А.И. Мальцева (Мальцев, 1970: 385), Г. Гретцера (Gratzer, 1978: 415–417), В.А. Горбунова (Горбунов, 1995а: 142–168), (Горбунов, 1995б: 369–397), (Горбунов, 1995в: 646–666), (Горбунов, 1999: 349–351), В.И. Туманова (Туманов, 1983: 168–181), (Горбунов, 1982: 12–44), М. Адамса и В. Дзебяка (Adams, 2004: 357–378), (Adams, 1994а: 1053–1059), (Adams, 1994б: 181–210), (Adams, 1994в: 15–28), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002а: 7–11), (Adams, 2002б: 333–356), М.В. Сапира (Sapir, 1985: 172–180), А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012а: 1–17), (Nurakunov, 2012б: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 167–179), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 372–400), А.В. Кравченко (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Kravchenko, 2016: 388–394), (Кравченко, 2001: 113–127), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012а: 89–99), (Кравченко, 2012б: 201–207), М.В. Швидефски (Schwidefsky, 2014: 1099–1126), (Швидефски, 2015: 381–398), (Семенова, 2012: 1111–1132) и других.

В настоящее время сущетвует несколько подходов к понятию сложности решеток квазимногообразий. Понятие Q-универсальной решетки квазимногообразий введено в работе (Sapir, 1985: 172), где также была доказана Q-универсальность квазимногообразия, порожденного одной полугруппой. Примеры Q-универсальных классов алгебраических систем можно найти в работах (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 393–395), (Adams, 1994а: 1053–1059), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002б: 333–356), (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Нуракунов, 2014: 372–400), (Schwidefsky, 2014: 1124), (Sheremet, 2001: 193–201), (Горбунов, 1999: 271–274) и других. В работе М.Е. Адамса и В. Дзебяка (Adams, 1994а: 1056) найдены достаточные условия Q-универсальности; эти условия получили обобщение в работе (Швидефски, 2015: 391). Кроме того, была установлена взаимосвязь между сигнатурой σ и наличием у класса $\mathbf{K}(\sigma)$ всех систем этой сигнатуры свойства Q-универсальности. А именно, класс $\mathbf{K}(\sigma)$ является Q-универсальным тогда и только тогда, когда σ содержит либо по крайней мере бинарный предикатный символ, либо по крайней мере унарный функциональный символ, либо σ является, по крайней мере, счетной, см. рукопись В. Дзебяка (Dziobiak, 1997: proposition 4.4) и работу (Schwidefsky, 2014: 1121–1123).

Понятие иррациональной решетки дано в работе (Nurakunov, 2012а: 2). Примеры классов, для которых множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий невычислимы, были построены в работах (Nurakunov, 2012а: 3, 10-12, 14), (Nurakunov, 2012б: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 168–170), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399), (Schwidefsky, 2014: 1110–1111, 1116–1117, 1119–1120), (Семенова, 2012: 1129–1131). Взаимосвязь между Q-универсальностью класса $\mathbf{K}(\sigma)$ всех систем сигнатуры σ и существованием у него иррационального подкласса установлена в работе (Schwidefsky, 2014: 1121).

Вопросы о том, верно ли, что любой Q-универсальный класс $\mathbf{K}$ систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс; и о существовании иррационального класса $\mathbf{K}$, не являющегося Q-универсальным, поставлены в работах (Schwidefsky, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Положительный ответ на первый вопрос для почти всех известных к настоящему моменту Q-универсальных квазимногообразий дан в работе (Швидефски, 2015: 392).

Классы дифференциальных группоидов рассматривались в работах (Schwidefsky, 2014: 1111–1117), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012а: 89–99), (Кравченко, 2012б: 201–207). Имеется результат о существовании класса $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, для которого множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ невычислимо (Schwidefsky, 2014: 1116–1117). Q-универсальность класса дифференциальных группоидов доказана в работе (Kravchenko, 2008: 13). Таким образом, выполненный обзор опубликованных на сегодняшний день статей (и других источников, см. библиографию к настоящей работе) по теме исследования свидетельствует об отсутствии в изученной литературе факта о существовании иррациональных и одновременно не Q-универсальных классов дифференциальных группоидов.

Отметим также, что нетривиальное теоретико-решеточное тождество H_n, $n \in Z^+$ было рассмотрено в работе (Semenova, 2003: 554, 556).

3 Материал и методы

Напомним некоторые основные понятия и общепринятые обозначения из теории решеток и универсальной алгебры. За всеми понятиями, здесь не определенными, мы отсылаем читателя к книгам В.А. Горбунова (Горбунов, 1999: 1–69, 93–109, 125–138, 205–300), А.И. Мальцева (Мальцев, 1970: 9–88, 129–137, 183–189, 267–299), см. также А.В Кравченко (Кравченко, 2011: 7–73), S. Burris, H.P. Sankappanavar (Burris, 1981: 5–110), G. Grätzer (Grätzer, 1978: 15–52).

Для нижней полурешетки с наибольшим элементом $\mathcal{L} = \langle L; \wedge; 1\rangle$ обозначим через $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L})$ решетку всех нижних подполурешеток в $\mathcal{L}$, содержащих $1_\mathcal{L}$. Для любых двух подполурешеток $L_0,\ L_1 \in \mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L})$ множество $L_0 + L_1 = \{l_0 \wedge l_1 \mid l_0 \in L_0,\ l_1 \in L_1\}$ является наименьшей нижней подполурешеткой в $\mathcal{L}$, содержащей $L_0 \cup L_1$; т. е. решеточным объединением L_0 и L_1 в $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L})$.

Все рассматриваемые классы алгебраических систем мы считаем абстрактными (Горбунов, 1999: 6), (Мальцев, 1970: 207), т. е. замкнутыми относительно изоморфизмов. Обозначим через $\mathbf{K}(\sigma)$ класс всех систем сигнатуры σ; через $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ класс всех систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, изоморфных подсистемам систем из $\mathbf{K}$ (Горбунов, 1999: 24). Пусть $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$. Тогда $\mathbf{K}'$ называется $\mathbf{K}$-квазиэквациональным, если $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathrm{Mod}(\Sigma)$ для некоторого множества Σ квазитождеств сигнатуры σ (Горбунов, 1999: 117). Очевидно, $\mathbf{K}'$ является $\mathbf{K}$-квазиэквациональным ($\mathbf{K}$-квазимногообразием или относительным квазимногообразием), тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{Q}(\mathbf{K}')$, где $\mathbf{Q}(\mathbf{K}')$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathbf{K}'$ (Швидефски, 2015: 384). Множество всех $\mathbf{K}$-квазиэквациональных подклассов, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется решеткой квазимногообразий для $\mathbf{K}$ или просто решеткой относительных квазимногообразий, когда $\mathbf{K}$ легко восстанавливается из контекста, и обозначается $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ (Горбунов, 1999: 205), (Швидефски, 2015: 384).

При доказательстве основного результата используются методы универсальной алгебры и теории решеток: в частности, метод построения классов, обладающих определенными свойствами, развитый в работах А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 1–17), (Nurakunov, 2012в: 167–179), (Нуракунов, 2014: 372–400), и теоретико-решеточные методы из работ (Schwidefsky, 2014: 1099–1126), (Семенова, 2012: 1111–1132), (Швидефски, 2015: 381–398). Нам потребуются достаточное условие невычислимости множества всех конечных подрешеток данной решетки (Нуракунов, 2014: 396, утверждение 5.2), и утверждение о существовании класса дифференциальных группоидов (Schwidefsky, 2014: 1115, proposition 4.9).

Лемма 1 *(Нуракунов, 2014: 396, утверждение 5.2) Пусть* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{F}$ *— множества, первое из которых вычислимо. Если множество* $\mathbf{L}\cap\mathbf{F}$ *невычислимо, то множество* $\mathbf{F}$ *также невычислимо.*

Заметим, что запись $\mathcal{A} \leq_s \prod_{n\in N} \mathcal{A}_n$ означает, что система $\mathcal{A}$ является подпрямым произведением семейства систем $\mathcal{A}_n$, $n \in N$. Через ω мы обозначаем множество натуральных чисел.

Теорема 1 *(Schwidefsky, 2014: 1115, proposition 4.9) Пусть* $\mathcal{K}_n$ *— конечная нетривиальная решетка для любого* $n \in N \subseteq \omega$. *Тогда существует класс* $\mathbf{K}$ *дифференциальных группоидов, такой что* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n\in N} \mathrm{S}_\wedge(\mathcal{K}_n)$.

Дополнительно, будем использовать две леммы из работы А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 13, lemmas 17, 18) о свойствах решеток $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$, где $\mathcal{L}_n$ (для любого $2 < n < \omega$) — конечная нижняя полурешетка с наибольшим элементом типа "корона".

Лемма 2 *(Nurakunov, 2012a: 13, lemma 17) Решетка* $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ *подпрямо неразложима для любого* $2 < n < \omega$.

Лемма 3 *(Nurakunov, 2012a: 13, lemma 18) Решетка* $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ *вложима в* $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_m)$ *тогда и только тогда, когда* $n = m$ *(для любых* $2 < n, m < \omega$*).*

Также нам потребуется лемма (Semenova, 2003: 554, lemma 5.2) о выполнимости определенных неравенств в решетках.

В следующем пункте мы доказываем основные теоремы 2 и 3. В теореме 2 утверждается существование иррационального класса $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, который, тем не менее, не является Q-универсальным. Заметим, что теорема 2 доказывается без привлечения методологии AD-классов. Схема доказательства теоремы 2 следующая. Сначала, используя теорему 1, показываем, что существует класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, такой что $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n\in N} \mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$. Затем, используя лемму 1, устанавливаем, что этот класс $\mathbf{K}$ является иррациональным, т. е. множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ невычислимо. Далее доказываем, что решетка $\prod_{n\in N} \mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству H_3 (определено ниже, в ходе доказательства теоремы 2). Тогда, это тождество будет выполняться и на решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, поскольку тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам (Мальцев, 1970: 189). Следовательно, класс $\mathbf{K}$ не будет Q-универсальным, т. к. хорошо известно, что

Q-универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству (Горбунов, 1999: 273).

В теореме 3 утверждается существование континуума иррациональных классов $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, не являющихся Q-универсальными. При доказательстве этой теоремы используется факт о том, что число подмножеств счетного множества, являющихся невычислимыми, континуально; с учетом которого, утверждение теоремы 3 будет следовать из теоремы 2.

4 Результаты и обсуждение

Теорема 2 *Существует иррациональный класс* $\mathbf{K}$ *дифференциальных группоидов, не являющийся* Q*-универсальным.*

Доказательство теоремы 2. Пусть множество $N \subseteq \omega \setminus \{0,1,2\}$ невычислимое и $\{\mathcal{L}_n \mid n \in N\}$ — класс конечных нижних полурешеток с наибольшим элементом типа "корона" (см. рис. 1).

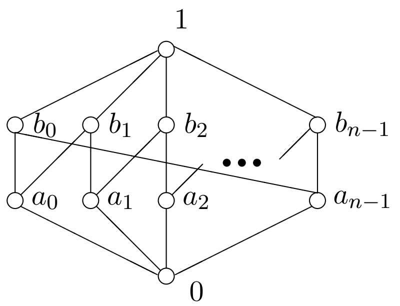

Рисунок 1 – "Корона" $\mathcal{L}_n$

Согласно теореме 1, примененной к классу $\{\mathcal{L}_n \mid n \in N\}$, существует класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, такой что $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n\in N} \mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$.

Решетка $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ подпрямо неразложима для любого $n > 2$, согласно лемме 2. Решетка $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ вложима в $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_m)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ (для любых $n, m > 2$), согласно лемме 3. Пусть $\mathbf{L} = \{\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n) \mid n > 2\}$ и $\mathbf{M} = \{\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n) \mid n \in N\}$. Решетка $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_m)$ вложима $\prod_{n\in N} \mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ в точности тогда, когда $m \in N$, и, следовательно, решетка $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_m)$ вложима в $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ тогда и только тогда, когда $m \in N$, т. е. $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_m) \in \mathbf{M}$. Тогда, $\mathbf{M} = \mathbf{L} \cap \mathbf{S}(\mathrm{Lq}(\mathbf{K}))$. Значит, решетка $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ такова, что множество всех ее конечных подрешеток невычислимо, согласно лемме 1.

Далее покажем, что решетка $\prod_{n\in N} \mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ удовлетворяет нетривиальному тождеству H_3. Отметим, что тождество H_n было рассмотрено в работе (Semenova, 2003: 554, 556) и имеет вид:

$$U_n = \bigvee_{0\leq i\leq n-1} V_{i,n} \vee \bigvee_{0\leq i\leq n-2} W_{i,n},$$

где решеточные термы от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ определены следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&U_n = U_{0,n} && \\
&U_{n,n} = x_n && \\
&U_{i,n} = x_i \wedge (U_{i+1,n} \vee x'_{i+1}), && 0 \leq i \leq n-1 \\
&V_{i,n} = V_{i,0,n}, && 0 \leq i \leq n-1 \\
&V_{i,i,n} = (x_i \wedge U_{i+1,n}) \vee (x_i \wedge x'_{i+1}), && 0 \leq i \leq n-1 \\
&V_{i,j,n} = x_j \wedge (V_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), && 0 \leq j < i \leq n-1 \\
&W_{i,n} = W_{i,0,n}, && 0 \leq i \leq n-2 \\
&W_{i,i,n} = x_i \wedge (x'_{i+1} \vee x'_{i+2}) \wedge ((U_{i+1,n} \wedge (x_i \vee x'_{i+2})) \vee x'_{i+1}), && 0 \leq i \leq n-2 \\
&W_{i,j,n} = x_j \wedge (W_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), && 0 \leq j < i \leq n-2.
\end{aligned}
$$

Если $n = 3$, то тождество H_3 запишется так:

$$U_3 = \bigvee_{0 \leq i \leq 2} V_{i,3} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq 1} W_{i,3}$$

или

$$U_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}),$$

где решеточные термы имеют вид:

$U_3 = U_{0,3}$,
$U_{0,3} = x_0 \wedge (U_{1,3} \vee x'_1)$,
$U_{1,3} = x_1 \wedge (U_{2,3} \vee x'_2)$,
$U_{2,3} = x_2 \wedge (U_{3,3} \vee x'_3)$,
$U_{3,3} = x_3$.

$V_{0,3} = V_{0,0,3}$,
$V_{0,0,3} = (x_0 \wedge U_{1,3}) \vee (x_0 \wedge x'_1)$.
$V_{1,3} = V_{1,0,3}$,
$V_{1,0,3} = x_0 \wedge (V_{1,1,3} \vee x'_1)$,
$V_{1,1,3} = (x_1 \wedge U_{2,3}) \vee (x_1 \wedge x'_2)$.
Тогда $V_{1,3} = x_0 \wedge (((x_1 \wedge U_{2,3}) \vee (x_1 \wedge x'_2)) \vee x'_1)$.

$V_{2,3} = V_{2,0,3}$,
$V_{2,0,3} = x_0 \wedge (V_{2,1,3} \vee x'_1)$,
$V_{2,1,3} = x_1 \wedge (V_{2,2,3} \vee x'_2)$,
$V_{2,2,3} = (x_2 \wedge U_{3,3}) \vee (x_2 \wedge x'_3)$.
Тогда $V_{2,3} = x_0 \wedge ((x_1 \wedge (((x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x'_3)) \vee x'_2)) \vee x'_1)$.

$W_{0,3} = W_{0,0,3}$,
$W_{0,0,3} = x_0 \wedge (x'_1 \vee x'_2) \wedge ((U_{1,3} \wedge (x_0 \vee x'_2)) \vee x'_1)$.

$W_{1,3} = W_{1,0,3}$,

$W_{1,0,3} = x_0 \wedge (W_{1,1,3} \vee x_1'),$
$W_{1,1,3} = x_1 \wedge (x_2' \vee x_3') \wedge ((U_{2,3} \wedge (x_1 \vee x_3')) \vee x_2').$

Обозначим

$$V_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}).$$

Тогда H_3, выполнимость которого следует проверить, примет вид: $U_3 = V_3$.

Сначала покажем, что решетка $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ для любого $n \in N$ удовлетворяет тождеству H_3. Согласно (Semenova, 2003: 554, lemma 5.2), следующие неравенства выполняются в каждой решетке ($n \in Z^+$):

$$V_{i,n} \leq U_n, (0 \leq i \leq n-1); \quad W_{i,n} \leq U_n, (0 \leq i \leq n-2).$$

Если $n = 3$, то $V_{i,3} \leq U_3, (0 \leq i \leq 2); \quad W_{i,3} \leq U_3, (0 \leq i \leq 1).$

Тогда $V_3 \leq U_3$. Осталось доказать, что $U_3 \leq V_3$. Все переменные (термы) x_0, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3' интерпретируем как подполурешетки "короны" $\mathcal{L}_n$, содержащие наибольший элемент $1_{\mathcal{L}_n}$, — соответственно X_0, X_1, X_2, X_3, X_1', X_2', X_3'.

Пусть произвольно взятый элемент $a_0 \in L_n \setminus \{1_{\mathcal{L}_n}\}$ лежит в U_3. Заметим, что если в качестве a_0 взять наибольший элемент $1_{\mathcal{L}_n}$, то включение $U_3 \leq V_3$, очевидно, будет выполняться, поскольку все рассматриваемые подполурешетки "короны" $\mathcal{L}_n$ содержат $1_{\mathcal{L}_n}$. В дальнейшем вместо $a_0 \in L_n \setminus \{1_{\mathcal{L}_n}\}$ будем использовать запись $a_0 \in L_n$.

Тогда a_0, с одной стороны, лежит в X_0, которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $U_{1,3} + X_1'$. Если элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $U_{1,3} + X_1'$, то найдутся элементы $a_1 \in U_{1,3}$ и $b_1 \in X_1'$, такие что $a_0 = a_1 \wedge b_1$. Если $a_0 = a_1$ или $a_0 = b_1$, то $a_0 \in (X_0 \cap U_{1,3}) \cup (X_0 \cap X_1')$. Таким образом, $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{0,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3.

Если пересечение строгое: $a_0 = a_1 \wedge b_1$, $a_0 < a_1$, $a_0 < b_1$, то из условия $a_1 \in U_{1,3}$ следует, что элемент a_1, с одной стороны, лежит в X_1, которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $U_{2,3} + X_2'$. Если элемент a_1 лежит в $U_{2,3} + X_2'$, то найдутся элементы $a_2 \in U_{2,3}$ и $b_2 \in X_2'$, такие что $a_1 = a_2 \wedge b_2$. Если $a_1 = a_2$ или $a_1 = b_2$, то $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X_2')$. Тогда, если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X_2')$ и $b_1 \in X_1'$, то элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{1,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3.

Если вновь пересечение строгое: $a_1 = a_2 \wedge b_2$, $a_1 < a_2$, $a_1 < b_2$, то из условия $a_2 \in U_{2,3}$, следует, что элемент a_2, с одной стороны, лежит в X_2, которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $X_3 + X_3'$. Если элемент a_2 лежит в $X_3 + X_3'$, то найдутся элементы $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X_3'$, такие, что $a_2 = a_3 \wedge b_3$. Если $a_2 = a_3$ или $a_2 = b_3$, то $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3')$. Тогда, если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X_1'$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3')$, $b_2 \in X_2'$, то элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{2,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3.

Когда пересечение строгое: $a_2 = a_3 \wedge b_3$, $a_2 < a_3$, $a_2 < b_3$, получим, что $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X_1'$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $b_2 \in X_2'$, $a_2 \in X_2$ и $a_2 = a_3 \wedge b_3$, где $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X_3'$. Представим этот случай на диаграмме. Получим цепь $a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - 1_{\mathcal{L}_n}$ ($a_0 < a_1$, $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3$) длины 4 (см. рис. 2), что противоречит тому, что в "короне" $\mathcal{L}_n$ длина максимальной цепи равна 3.

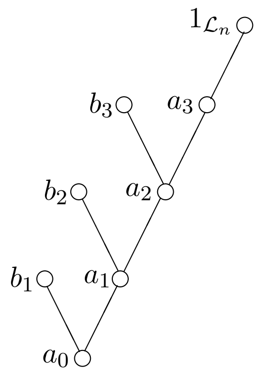

Рисунок 2 – Получившаяся цепь длины четыре в "короне" $\mathcal{L}_n$

Таким образом, неравенство $U_3 \leq V_3$ имеет место. Следовательно, тождество H_3 выполняется на $\mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ для любого $n \in N$. Тогда $\prod_{n\in N} \mathrm{S}_\wedge(\mathcal{L}_n)$ тоже будет удовлетворять H_3, поскольку тождества мультипликативно устойчивы (Мальцев, 1970: 189). Значит, H_3 будет выполнятся и на $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, поскольку тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам (Мальцев, 1970: 189). Известно (Горбунов, 1999: 273), что Q-универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству. Поэтому класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов не будет Q-универсальным. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 *Существует континуум иррациональных классов* $\mathbf{K}$ *дифференциальных группоидов, не являющихся* Q*-универсальными.*

Доказательство теоремы 3. Утверждение данной теоремы следует из теоремы 2 и из того факта, что число подмножеств $N \subseteq \omega \setminus \{0,1,2\}$ счетного множества $\omega \setminus \{0,1,2\}$, являющихся невычислимыми, континуально. Теорема 3 доказана.

В литературе есть примеры иррациональных классов (Nurakunov, 2012a: 3, 10-12, 14), (Nurakunov, 2012б: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 168–170), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399), (Schwidefsky, 2014: 1110–1111, 1116–1117, 1119–1120), (Семенова, 2012: 1129–1131), очень много примеров Q-универсальных классов алгебраических систем (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 393–395), (Adams, 1994a: 1053–1059), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002б: 333–356), (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Нуракунов, 2014: 372–400), (Schwidefsky, 2014: 1124), (Sheremet, 2001: 193–201), (Горбунов, 1999: 271–274); ставился вопрос, влечет ли наличие у класса свойства Q-универсальности его иррациональность, и наоборот (Schwidefsky, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Теоремы 2 и 3, доказанные выше, указывают на факт о существовании иррациональных решеток квазимногообразий, которые, однако, не являются Q-универсальными. Таким образом, найдены решетки квазимногообразий, которые, согласно одной мере, являются сложными, а, согласно другой мере сложности, — нет. Результат теорем 2 и 3 представляют интерес для специалистов по теории квазимногообразий.

5 Заключение

Вопрос о сложности строения производных решеток, в частности решеток квазимногообразий, изучался многими авторами (см., например, библиографию в настоящей работе и в (Adams, 2004: 372–378), (Швидефски, 2015: 395–398), (Горбунов, 1999: 339–365)) и отчасти является философским. Где лежит грань между сложным и несложным? Что считать сложностью решетки квазимногообразий? Хорошо известны две меры сложности строения решеток квазимногообразий: Q-универсальность и иррациональность (невычислимость множества всех их конечных подрешеток). Отметим, что наличие в решетках квазимногообразий континуума так называемых «плохих» элементов, т. е. элементов, не имеющих покрытий, также говорит о сложности строения этих решеток; в этом случае сущетвует континуум подквазимногообразий данного квазимногоообразия $\mathbf{K}$, не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно $\mathbf{K}$.

Автором изучается вопрос о связи двух свойств решеток квазимногообразий, характеризующих с различных точек зрения сложность строения таких решеток. Первое из них, Q-универсальность, свидетельствует о максимальной сложности в теоретико-решеточном смысле, а второе, иррациональность (невычислимость множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий), говорит об алгоритмической сложности. Естественным представляется вопрос о существовании классов, обладающих одним из этих свойств, но не обладающих другим. Ранее (Швидефски, 2015: 392) установлено, что для почти любого Q-универсального квазимногообразия можно найти иррациональный подкласс и поставлен вопрос о существовании иррационального класса, не являющегося Q-универсальным (Schwidefsky, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Автором показано, что существует континуум классов дифференциальных группоидов, таких, что решетки квазимногообразий для этих классов являются иррациональными (т. е сложными согласно одной мере сложности), но, при этом, не являются Q-универсальными. Таким образом, установлено, что, наличие у решетки квазимногообразий для рассматриваемых классов одного из упомянутых выше свойств (а именно, иррациональности) не является необходимым и достаточным условием сложности решетки согласно концепции Q-универсальности. Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть применены в дальнейших исследованиях в области универсальной алгебры.

Список литературы

[1] Adams M.E., Adaricheva K.V., Dziobiak W., Kravchenko A.V. Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev // Stud. Log. — 2004. — Vol. 78. — P. 357–378.

[2] Adams M.E., Dziobiak W. Q-universal quasivarieties of algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 120, no. 4. — P. 1053–1059.

[3] Adams M.E., Dziobiak W. Lattice of quasivarieties of 3-element algebras // J. Algebra. — 1994. — Vol. 166, no. 1. — P. 181–210.

[4] Adams M.E., Dziobiak W. Quasivarieties of distributive lattices with a quantifier // Discrete Math. — 1994. — Vol. 135. — P. 15–28.

[5] Adams M.E., Dziobiak W. Finite-to-finite universal quasivarieties are Q-universal // Algebra Universalis. — 2001. — Vol. 46. — P. 253–283.

[6] Adams M.E., Dziobiak W. The lattice of quasivarieties of undirected graphs // Algebra Univers. — 2002. — Vol. 47, no. 1. — P. 7–11.

[7] Adams M.E., Dziobiak W. Q-universal varieties of bounded lattices // Algebra Univers. — 2002. — Vol. 48, no. 3. — P. 333–356.

[8] Birkhoff G. Universal algebra // Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945). — Toronto: the University of Toronto Press., 1946. — P. 310–326.

[9] Burris S., Sankappanavar H.P. A course in universal algebra. — New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verl., 1981. — 315 p.

[10] Dziobiak W. Selected topics in quasivarieties of algebraic systems: manuscript. — 1997.

[11] Grätzer G. General lattice theory. — Berlin: Akademie-Verlag, 1978. — 456 p.

[12] Kravchenko A.V. Q-universal quasivarieties of graphs // Algebra and Logic. — 2002. — Vol. 41, no. 3. — P. 311–325.

[13] Kravchenko A.V. On the lattices of quasivarieties of differential groupoids // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2008. — Vol. 49, no. 1. — P. 11–17.

[14] Kravchenko A.V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II // Sib. electron. mathem. rep. — 2016. — Vol. 13. — P. 388–394.

[15] Nurakunov A.M. Unreasonable lattices of quasivarieties // Internat. J. Algebra Comput. — 2012. — Vol. 22, no. 3. — P. 1–17.

[16] Nurakunov A.M., Imanaliev M.I. Complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian Groups // Doklady Mathematics. — 2012. — Vol. 85, no. 3. — P. 391–393.

[17] Nurakunov A.M., Semenova M.V., Zamojska-Dzienio A. On lattices connected with various types of classes of algebraic structures // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2012. — Т. 154. — С. 167–179.

[18] Sapir M.V. The lattice of quasivarieties of semigroups // Algebra Universalis. — 1985. — Vol. 21. — P. 172–180.

[19] Schwidefsky M.V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. II // Internat. J. Algebra Comput. — 2014. — Vol. 24, no. 8. — P. 1099–1126.

[20] Semenova M.V., Wehrung F. Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height // Internat. J. Algebra Comput. — 2003. — Vol. 13, no. 5. — P. 543–564.

[21] Sheremet M.S. Quasivarieties of Cantor algebras // Algebra Universalis. — 2001. — Vol. 46. — P. 193–201.

[22] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. I // Алгебра и логика. — 1995. — Т. 34, № 2. — С. 142–168.

[23] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. II // Алгебра и логика. — 1995. — Т. 34, № 4. — С. 369–397.

[24] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. III // Алгебра и логика. — 1995. — Т. 34, № 6. — С. 646–666.

[25] Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 368 с.

[26] Горбунов В.А., Туманов В.И. Строение решеток квазимногообразий // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. — 1982. — Т. 2. — С. 12–44.

[27] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий унарных алгебр // Матем. тр. — 2001. — Т. 4, № 2. — С. 113–127.

[28] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий дифференциальных группоидов // Матем. тр. — 2009. — Т. 12, № 1. — С. 26–39.

[29] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий дифференциальных группоидов. II // Матем. тр. — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 89–99.

[30] Кравченко А.В. Минимальные квазимногообразия дифференциальных группоидов с ненулевым умножением // Сиб. электрон. матем. изв. — 2012. — Т. 9. — С. 201–207.

[31] Кравченко А.В., Семенова М.В. Универсальная алгебра и теория решеток. — Новосибирск: НГУ, 2011. — 74 с.

[32] Мальцев А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Труды международного математического конгресса (Москва, 1966). — М.: Мир, 1968. — С. 217–231.

[33] Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

[34] Нуракунов А.М. Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — Т. 53, № 3. — С. 372–400.

[35] Нуракунов А.М., Иманалиев М.И. Сложность решеток квазимногообразий точечных абелевых групп // Доклады академии наук. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 480–482.

[36] Семенова М.В., Замойска-Дженио А. О решетках подклассов // Сиб. Мат. Ж. — 2012. — Т. 53, № 5. — P. 1111–1132.

[37] Туманов В.И. Конечные дистрибутивные решетки квазимногообразий // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 2. — С. 168–181.

[38] Швидефски М.В. О сложности решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54, № 3. — С. 381–398.

References

[1] Adams, Michael, and Kira Adaricheva, and Wieslaw Dziobiak, and Aleksandr Kravchenko. “Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev.” *Stud. Log.* 78 (2004): 357–378.

[2] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Q-universal quasivarieties of algebras.” *Proc. Amer. Math. Soc.* 120 (1994): 1053–1059.

[3] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Lattice of quasivarieties of 3-element algebras.” *J. Algebra* 166 (1994): 181–210.

[4] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Quasivarieties of distributive lattices with a quantifier.” *Discrete Math.* 135 (1994): 15–28.

[5] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Finite-to-finite universal quasivarieties are Q-universal.” *Algebra Universalis* 46 (2001): 253–283.

[6] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “The lattice of quasivarieties of undirected graphs.” *Algebra Universalis* 47 (2002): 7–11.

[7] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Q-universal varieties of bounded lattices.” *Algebra Universalis* 48 (2002): 333–356.

[8] Birkhoff, Garrett. “Universal algebra.” Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress, Montreal, 1945. *Toronto: the University of Toronto Press* (1946): 310–326.

[9] Burris, Stanley, and Hanamantagouda P. Sankappanavar. *A course in universal algebra.* New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verl., 1981.

[10] Dziobiak, Wieslaw. *Selected topics in quasivarieties of algebraic systems.* Manuscript, 1997.

[11] Grätzer, George. *General lattice theory.* Berlin: Akademie-Verlag, 1978.

[12] Kravchenko, Aleksandr. “Q-universal quasivarieties of graphs.” *Algebra and Logic* 41 (2002): 311–325.

[13] Kravchenko, Aleksandr. “On the lattices of quasivarieties of differential groupoids.” *Comment. Math. Univ. Carolin.* 49 (2008): 11–17.

[14] Kravchenko, Aleksandr. “Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II.” *Sib. electron. mathem. rep.* 13 (2016): 388–394.

[15] Nurakunov, Anvar. “Unreasonable lattices of quasivarieties.” *Internat. J. Algebra Comput.* 22 (2012): 1–17.

[16] Nurakunov, Anvar, and Murzabek Imanaliev. “Complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian Groups.” *Doklady Mathematics* 85 (2012): 391–393.

[17] Nurakunov, Anvar, and Marina Semenova, and Anna Zamojska-Dzienio. “On lattices connected with various types of classes of algebraic structures.” *Uchenye zapiski kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki* 154 (2012): 167–179.

[18] Sapir, Mark. “The lattice of quasivarieties of semigroups.” *Algebra Universalis* 21 (1985): 172–180.

[19] Schwidefsky, Marina, and Anna Zamojska-Dzienio. “Lattices of subclasses. II.” *Internat. J. Algebra Comput.* 24 (2014): 1099–1126.

[20] Semenova, Marina, and Friedrich Wehrung. “Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height.” *Internat. J. Algebra Comput.* 13 (2003): 543–564.

[21] Sheremet, Mihail. “Quasivarieties of Cantor algebras.” *Algebra Universalis* 46 (2001): 193–201.

[22] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. I [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. I]. Algebra and Logic, vol. 34, no 2, pp. 142–168.

[23] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. II [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. II]. Algebra and Logic, vol. 34, no 4, pp. 369–397.

[24] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. III [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. III]. Algebra and Logic, vol. 34, no 6, pp. 646–666.

[25] Gorbunov, Viktor. *Algebraic Theory of Quasivarieties.* New York: Plenum, 1998.

[26] Gorbunov V., Tumanov V. (1982) Stroenie reshetok kvazimnogoobrazij [The structure of quasivariety lattices]. Tr In-ta matematiki SO AN SSSR, vol. 2, pp. 12–44.

[27] Kravchenko A. (2001) slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij unarnyh algebr [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of unary algebras]. Matem. tr., vol. 4, no. 2, pp. 113–127.

[28] Kravchenko A. (2009) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij differencialnyh gruppoidov [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of differential groupoids]. Matem. tr., vol. 12, no. 1, pp. 26–39.

[29] Kravchenko A. (2012) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij differencialnyh gruppoidov. II [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of differential groupoids. II]. Matem. tr., vol. 15, no. 2, pp. 89–99.

[30] Kravchenko A. (2012) Minimalnye kvazimnogoobraziya differencialnyh gruppoidov s nenulevym umnozheniem [Minimum quasivarieties of differential groupoids with nonzero multiplication]. Sib. electron. mathem. rep., vol. 9, pp. 201–207.

[31] Kravchenko A., Semenova M. (2011) Universalnaya algebra i teoriya reshetok [Universal algebra and lattice theory]. Новосибирск: НГУ, 74 p.

[32] Maltsev A. (1968) O nekotoryh pogranichnyh voprosah algebry i matematicheskoj logiki [On some boundary problems of algebra and mathematical logic]. Trudy mezhdunarodnogo matematicheskogo kongressa (Moskva, 1966), M.: Mir, pp. 217–231.

[33] Maltsev, Anatolij. *Algebraic systems.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.

[34] Nurakunov A. (2014) Reshetki kvazimnogoobrazij tochechnyh abelevyh grupp [Quasivariety lattices of pointed Abelian groups]. Algebra and Logic, vol. 53, no. 3, pp. 372–400.

[35] Nurakunov A., Imanaliev M. (2012) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij tochechnyh abelevyh grupp [The complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian groups]. Doklady akademii nauk, vol. 444, no. 5, pp. 480–482.

[36] Semenova M., Zamojska-Dzhenio A. (2012) O reshetkah podklassov [On lattices of subclasses]. Sib. Mat. Zh., vol. 53, no. 5, pp. 1111–1132.

[37] Tumanov V. (1983) Konechnye distributivnye reshetki kvazimnogoobrazij [Finite distributive lattice of quasivarieties]. Algebra and logic, vol. 22, no. 2, pp. 168–181.

[38] Shvidefski M. (2015) O slozhnosti reshetok kvazimnogoobrazij [On the complexity of quasivariety lattices]. Algebra and logic, vol. 54, no. 3, pp. 381–398.