

УДК 532.526

Д.Ш. Будаева, С.С. Садвакасов

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан**E-mail: budaevadina@mail.ru*

Исследование плоского течения совершенного газа с вдувом струй

В настоящее время одной из актуальных проблем является теоретический расчет обтекания тел сложной формы, имеющих уступы или вдув струй, сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа. Структура такого течения довольно сложна, так как возникают зоны обратных течений и ударные волны. Области отрыва имеются как перед струей, так и за ней. Для выявления скачка уплотнения и его взаимодействие с турбулентным пограничным слоем необходимо решение полных уравнений Навье - Стокса. В данной работе численно моделируется плоское сверхзвуковое турбулентное течение в канале при поперечном вдуве сверхзвуковой струи. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи с нижней стенки. Высота канала составляет 7,62 см, длина — 15 см, ширина щели из которой производится вдув струи — 0,0559 см. Щель расположена на расстоянии 10 см от входного сечения. Решение уравнений Навье — Стокса производится неявной факторизованной схемой Бима — Уорминга. Для замыкания системы уравнений используется алгебраическая модель турбулентности Болдуина — Ломакса. Задаются следующие граничные условия : на входе — параметры потока; на стенке — условия прилипания и теплоизоляции; на вдуве струи — параметры струи; на верхней границе — условие симметрии; на выходе - условие неотражения. Для более точного учета течения в областях больших градиентов задача решается в обобщенных координатах. Исследовано влияние параметров, таких , как нерасчетность и число Маха струи на турбулентное смешение течений и на отрыв потока.

Ключевые слова: сверхзвуковое течение, турбулентность, уравнения Навье — Стокса, вдув струй, численные методы, пограничный слой.

D. Budaeva, S. Sadvakasov

Research of a flat supersonic air flow with jet injection

Currently one of the most urgent problems is a theoretical calculation flow around bodies of complex shape, with berms or inflow jets, supersonic flow of viscous compressible gas. The current structure is quite complex, since there are zones of return flows and shock waves. The training includes how to squirt, and behind it. To identify the jump of the seal and its interaction with turbulent boundary layer requires a decision by the full Navier — Stokes equations. In this work the numerically simulated the supersonic plane turbulent period in the channel with transverse blowing supersonic jet. For ease of computation is considered Jet from the bottom wall of the inflow. Duct height is 7.62 sm, length 15 sm., width slit 0.0559 sm being inflow Jet-0.3 sm. The slit is located at a distance of 10 sm. from the input section. Solution of the Navier-Stokes equations are implicitly scheme of Bim-Uorming. To close the system of equations using algebraic turbulence Baldwin-Lomax model. Specifies the following boundary conditions: inlet-flow parameters; on the wall is a condition of sticking and heat insulation; on the blowing Jet — Jet options; at the top is

the condition of symmetry; on output — condition of not reflection. For a more accurate accounting of the current in the areas of large gradients is expressed in generalized coordinates. The influence of parameters such as an unplanned and Mach number jet on turbulent mixing of currents and magnetic flux.

Key words: Navier — Stokes equation, supersonic flow, turbulence, blowing jets, numerical methods, boundary layer.

Д. Будаева, С. Садвакасов

Ағыспен үрленетін жоғары газдың жазықтық ағыншасын зерттеу

Қазіргі таңда, өзекті мәселелердің бірі - тұтқыр сығылатын газдың дыбыс жылдамдығынан жоғары ағыны арқылы ойық пен ағысқа жел үруі бар күрделі пішінді денені орағытып өтін теориялық есептеулер. Мұндай ағынның құрылымы күрделі, себебі кері ағыс толқыны мен соқтығысу аймақтары пайда болады. Үзілісіз облыстары ағынның алдында және артында бар. Тығыздық секірісін анықтау үшін және оның турбуленттік шекаралық бетпен өзара қарым — қатынасы үшін толық Навье — Стокс теңдеуін шығару керек. Бұл жұмыста тегіс дыбыс жылдамдығынан жоғары турбуленттік ағысты көлденең желмен дыбыс жылдамдығынан жоғары ағынды сандық моделдеу жүргізіледі. Есептеудің ыңғайлығы үшін, ағысты желдету төменгі қабырғада орын алады. Каналдың биіктігі 7,62 см., ұзындығы 15 см., қуыс ені 0.0559 см, бұл үшін ағысқа желмен айдау - 0.3 см. Қуыс кіре берістегі қимадан 10 см арақашықтықта орналасқан. Навье — Стокс теңдеуін айқын емес факторияланған Бима - Уорминг сұлбасымен есептеледі. Жүйені тұйықтау үшін Болдуин - Ломакстың турбуленттік алгебралық моделін қолданамыз. Келесі шекаралық шарттар беріледі: кіру облысында - ағыс параметрлері, қабырғада — жабысу шарттары және жылылықты өткізбеу; жел берген жерде — ағыс параметрі; жоғарғы шекарада — симметрия шарты; шығыста — шағылмайтын шарты. Дәлірек есептеу үшін үлкен градиенттер облыстарында ағысты нақтырақ есептеу үшін есеп жалпыланған координаттар жүйесінде шешіледі. Ағыстың Мах саны мен есептелмейтіндік параметрлерінің ағыстың турбулентті араласуы мен ағынның бөлінуіне әсерлері зерттелді.

Түйін сөздер: Навье — Стокс теңдеулері, дыбыс жылдамдықты ағын, турбуленттілік, ағыс үрлеуі, сандық әдістер, шекаралық қабат.

Введение

Обтекание струй и препятствий наиболее изучены экспериментально. В теоретических работах, в основном, производятся тестовые расчеты и практически отсутствуют численное исследование влияния важных с практической точки зрения параметров, как числа Маха, ширина щели, нерасчетность на схему течения. Это связано с тем, что структура течения в области вдува довольно сложна. Области отрыва и возвратных течений имеются как пред струей, так и за ней. Схема течения показана на рисунке 1.

Основные уравнения и граничные условия

Исходной является система двумерных уравнений Навье — Стокса для турбулентного течения сжимаемого газа, записанная в декартовой системе координат в консерва-

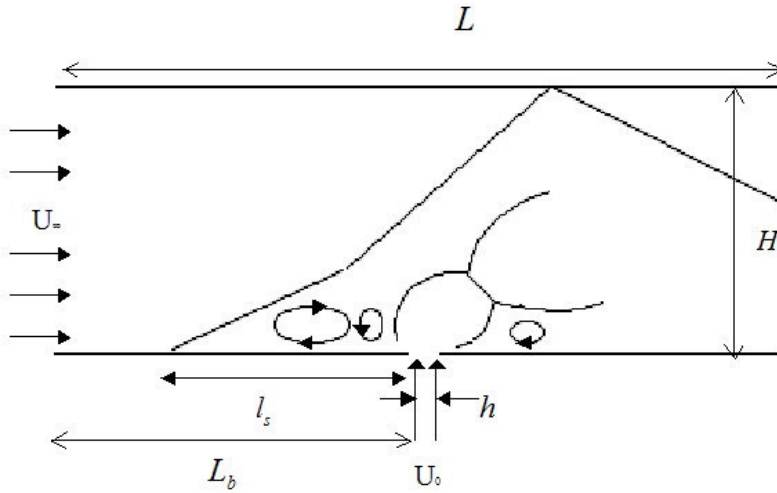


Рисунок 1. Схема течения

тивной форме:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Здесь векторы \vec{U} , \vec{E} , \vec{F} включают невязкие члены:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u w \\ (E_t + p) u \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w w \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + p) w \end{pmatrix},$$

а \vec{E}_v, \vec{F}_v - диффузионные члены:

$$\vec{E}_v = (0, \quad \tau_{xx}, \quad \tau_{xz}, \quad u\tau_{xx} + w\tau_{xz} - q_x)^T,$$

$$\vec{F}_v = (0, \quad \tau_{xz}, \quad \tau_{zz}, \quad u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z)^T.$$

Давление и температура могут быть определены из следующих выражений:

$$p = (\gamma - 1) \left[E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2) \right], \quad c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1) M_\infty^2},$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho c_v} \right) \left[E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2) \right].$$

Тензоры напряжения и потоки тепла выражаются в виде:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{Re} (2u_x - w_z), \quad \tau_{zz} = \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{Re} (2w_z - u_x), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu_t}{Re} (u_z + w_x),$$

$$q_x = -\frac{\mu_t}{(\gamma - 1) M_\infty^2 Pr Re} T_x, \quad q_z = -\frac{\mu_t}{(\gamma - 1) M_\infty^2 Pr Re} T_z.$$

Исходная система уравнений записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе $(u_\infty, \rho_\infty, T_\infty)$, давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным размером длины является ширина щели.

Система (1) замкнута с помощью алгебраической модели турбулентности Болдуина-Ломакса. Многочисленные численные эксперименты показывают, что данная модель с удовлетворительной степенью точности описывает течение в области отрыва.

Вблизи стенки коэффициент турбулентной вязкости имеет вид: $\mu_t = \rho l^2 |\Omega|$, где Ω - завихренность, $l = \chi z |1 - e^{-z^+/A}|$ - длина пути перемешивания, $\chi = 0.41$, $A = 26$. Вдали от стенки принято: $\mu_t = 0,0168 \rho V_0 L_0$, где $L_0 = 1.6 z_{max} I^k$, $V_0 = \min|0.25 F_{max} q_{dif}^2 / F_{max}|$, $q_{dif} = \max(\vec{V}) - \min(\vec{U})$, $\vec{V} = \sqrt{u^2 + w^2}$, $I^k = [1 + 5, 5(0, 3z/z_{max})^6]^{-1}$ - ограничивающий множитель Клебанова, $F_{max} = \max(|\Omega|l/\chi)$, где z_{max} соответствует F_{max} [1].

Граничные условия

Граничные условия во входном сечении:

$$u = 1, w = 0, \rho = 1, T = 1, \quad x = 0, 0 \leq z \leq H.$$

Вблизи стенки задается пограничный слой, продольная составляющая скорости u принимает следующий вид:

$$u = 0, 1 \left(\frac{z}{\delta_2} \right) + 0, 9 \left(\frac{z}{\delta_2} \right)^2, \quad x = 0, 0 \leq z \leq \delta_2,$$

где $\delta_2 = 0, 2\delta_1$ - пристенный слой (10-20% от пограничного слоя), $\delta_1 = 0, 37x (Re_x x)^{-0,2}$ - пограничный слой [19]. Пристенный слой соответствует ламинарно- турбулентному подслою ($z^+ \leq 70$), где $z^+ = \delta_2 (u_\tau Re_x)$ - универсальная динамическая переменная, $u_\tau = (\frac{1}{2} C_f)^{1/2} u_\infty$ - динамическая скорость, C_f - коэффициент трения потока на стенке.

В развитом турбулентном пограничном слое задается степенной закон, причем значение толщины пограничного слоя лежит в диапазоне, где $z^+ \geq 70$.

$$u = \left(\frac{z}{\delta_1} \right)^{1/7}, \quad x = 0, \delta_2 \leq z \leq \delta_1.$$

На нижней стенке:

$$u = 0, w = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0, 0 < x \leq L,$$

На щели:

$$u = 0, T = 0.6, w = \sqrt{T} M_0 / M_\infty, p_0 = n p_\infty, \quad z = 0, L_b \leq x \leq L_b + h$$

здесь $n = p_0/p_\infty$ - степень нерасчетности, где p_0 - давление в струе, p_∞ - давление потока.

На верхней границе условие симметрии:

$$w = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = H, 0 < x \leq L,$$

где L -длина, H - высота, L_b - расстояние до щели, h - ширина щели.

На выходе задаются граничные условия неотражения.

Метод решения

Одношаговая конечно-разностная схема для интегрирования по времени системы уравнений запишется в следующем виде:

$$\Delta \tilde{U}^n = \frac{\theta_1 \Delta t}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{U}^n + \frac{\Delta t}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}^n + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta \tilde{U}^n + O \left(\Delta t^3 + \left(\theta_1 - \frac{1}{2} - \theta_2 \right) \Delta t^2 \right). \quad (2)$$

В дальнейшем будет использоваться неявная схема Эйлера, где $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0$.

С учетом этого (2) переписывается

$$\tilde{U}^{n+1} - \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}^{n+1} = \tilde{U}^n + O(1/2 \Delta t^2) \quad (3)$$

В (3) подставляется выражение для $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}$ из исходного уравнения и получается следующая система уравнений:

$$\tilde{U}^{n+1} + \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{E}^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{E}_{vm}^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{E}_{v2}^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{F}_{vm}^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{F}_{v2}^{n+1}}{\partial \eta} \right) = \tilde{U}^n + O\left(\frac{\Delta t^2}{2}\right). \quad (4)$$

Линеаризованная относительно вектора \tilde{U} уравнений (4) решается методом Бима-Уорминга [2, 3]. Для этого в системе (4) векторы потоков можно заменить следующим образом:

$$\tilde{E}^{n+1} \approx A_\xi^n \tilde{U}^{n+1}, \tilde{F}^{n+1} \approx B_\eta^n \tilde{U}^{n+1}, \quad (5)$$

$A_\xi = \xi_x A$ и $B_\eta = \eta_z B$, $A = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{U}}$, $B = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{U}}$ - матрицы Якоби.

Члены, содержащие вторые и смешанные производные, аппроксимируются согласно [3]. С учетом этого система (4) запишется следующим образом:

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial A_\xi^n}{\partial \xi} + \frac{\partial B_\eta^n}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu_t \xi_x^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu_t \eta_z^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] \tilde{U}^{n+1} = \tilde{U}^n + \Delta t \left[2 \left(\frac{\partial \tilde{E}_{vm}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}^n}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{E}_{vm}^{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}^{n-1}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \tilde{E}_{v12}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} \right] + O\left(\frac{\Delta t^2}{2}\right). \quad (6)$$

Применение факторизации к (6), приводит к двум одномерным операторам

$$\begin{aligned} & 1 \text{ шаг. } \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial A_\xi^n}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu_t \xi_x^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] U^* = RHS^n \\ & 2 \text{ шаг. } \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial B_\eta^n}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu_t \eta_z^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] \tilde{U}^{n+1} = U^* \end{aligned} \quad (7)$$

где RHS^n - правая часть уравнения (6).

Аппроксимация производных конвективных и диффузионных членов производится следующим образом:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|_{ij} = \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2\Delta \xi} + O(\Delta \xi^2),$$

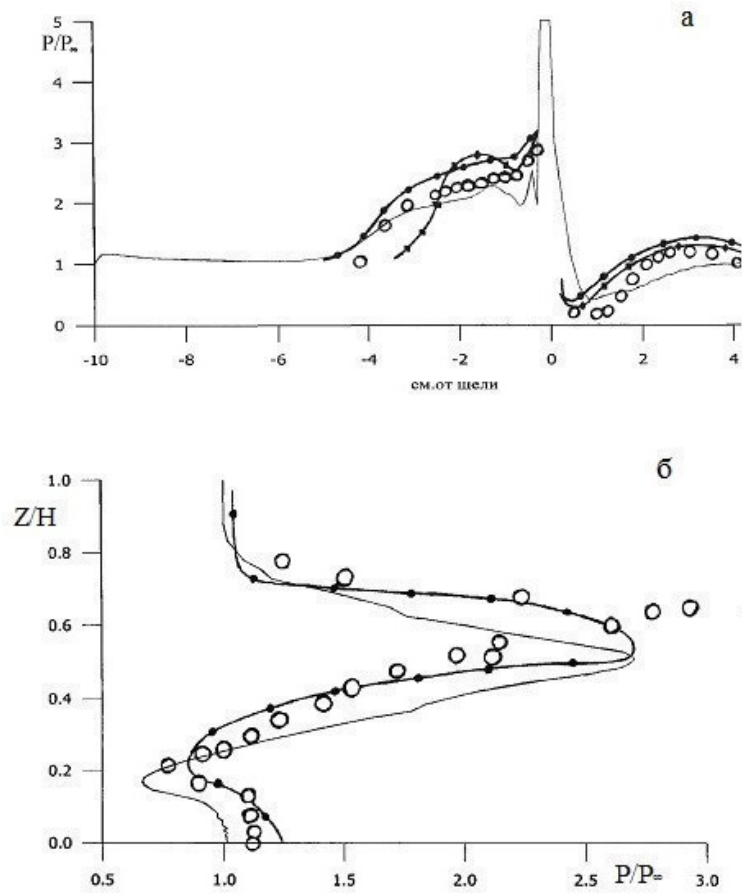


Рисунок 2. Результаты сравнения распределения давления с опытными данными и расчетами [4]. а) на стенке; б) в сечении $x = 3.81$ см. за щелью. $M_0 = 1$, $T_0 = 864K$, $M_\infty = 2.9$, $T_\infty = 448K$, $n = 18$, $h = 0.0559$ см.

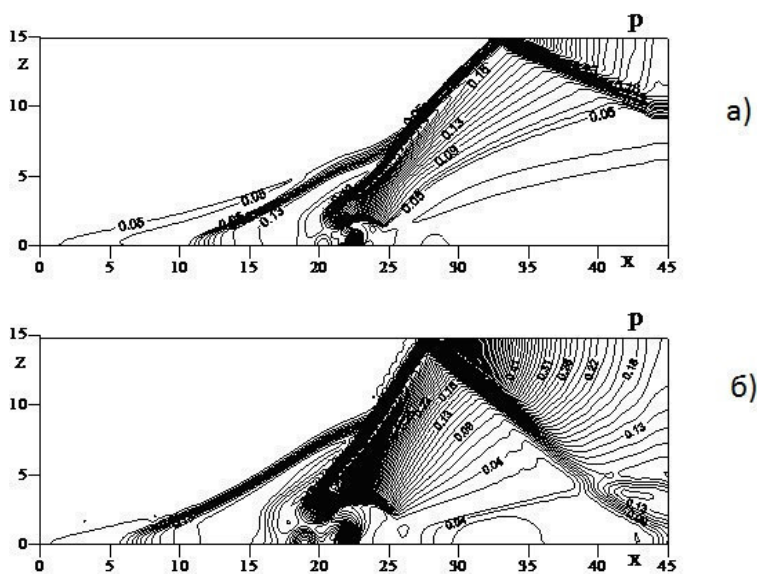


Рисунок 3. Распределение изобар для двух значений числа Маха струи. а) $M_0 = 1$, б) $M_0 = 2$. $M_\infty = 4$, $n = 10$, $Pr = 0.9$, $Re = 10^4$, $\gamma = 1.4$.

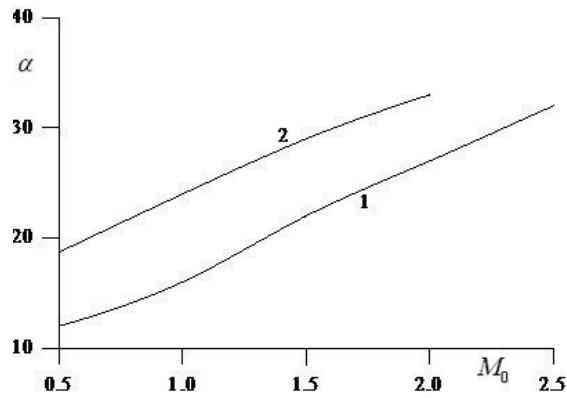


Рисунок 4. Влияние числа Маха струи на угол наклона головного скачка уплотнения

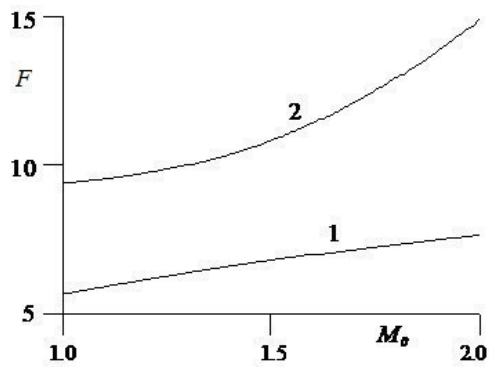


Рисунок 5. Зависимость подъемной силы от числа Маха струи: кривая 1 - $n = 4$, кривая 2 - $n = 10$.

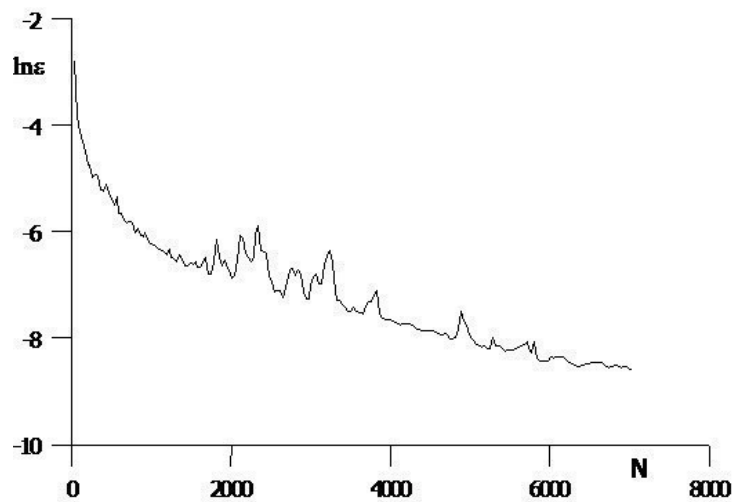


Рисунок 6. Динамика уменьшения безразмерной нормы невязки для плотности газа.
 $M_\infty = 4$, $M_0 = 1$, $n = 4$, $Pr = 0.9$, $Re = 10^4$, $\gamma = 1.4$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right|_{ij} &= \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{2\Delta\xi^2} + O(\Delta\xi^2), \\ \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} f \right|_{ij} &= \frac{\varphi_{i+1j}(f_{i+1j+1} - f_{i-1j+1}) - \varphi_{i-1j}(f_{i+1j-1} - f_{i-1j-1})}{4\Delta\xi\Delta\eta} + O(\Delta\xi^2; \Delta\eta^2), \\ \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} f \right|_{ij} &= \left(\frac{(\varphi_{ij+1} + \varphi_{ij})(f_{ij+1} - f_{ij}) - (\varphi_{ij} + \varphi_{ij-1})(f_{ij} - f_{ij-1})}{2\Delta\eta^2} \right) + O\left(\frac{\Delta\eta^2}{2}\right). \end{aligned}$$

В соответствии с этим решение системы (7) выполняется трехточечной матричной прогонкой.

На окончательном этапе для подавления осцилляций в решении, вектор потока \tilde{U}^{n+1} сглаживается явным образом, аналогично [3]. Коэффициент искусственной вязкости μ_i для направления ξ при этом имеет вид:

$$\mu_i = \epsilon_i \left| \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}} \right|.$$

Константа ϵ_i варьировалась в диапазоне ($0 \leq \epsilon_i \leq 0.3$).

Численный анализ взаимодействия плоского сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй

Расчет производился на разнесенной сетке по пространственным координатам размером 201×101 с шагами $\Delta x = 0.1 \div 0.6$, $\Delta z = 0.06 \div 0.3$, шаг по времени варьировался в пределах $\Delta t = 0.01 \div 0.025$. Центр струи располагается на расстоянии $x_0 = 22.5$ калибров от начала расчетной области. Для выхода течения на стационарный режим в зависимости режимных параметров требовалось 10000-12000 шагов численного интегрирования по времени.

Численные исследования проводились при следующих значениях характерных параметров: $Pr = 0.9$, $0.5 \leq M_0 \leq 2.5$, $2 \leq M_\infty \leq 4$, $1 \leq n \leq 15$. Начальные данные для толщины пограничного слоя задавались при $Re = 10^4$: $z^+ = 68$ для пристенной области и $z^+ = 344$ для развитого турбулентного течения.

Предварительно, для апробации численного метода, была решена тестовая задача: щель шириной 0.0559 см. производится перпендикулярный вдув газа $M_0 = 1$, $T = 217$ К, $P = 1.24$ мПа в поток воздуха $M_\infty = 2.9$, $T = 108$ К, $P = 0.0663$ мПа в канале прямоугольного сечения. Высота канала 7.62 см., длина 15 см. Щель располагается на расстоянии 10 см. от входного сечения. На рисунке 2а приведены результаты сравнения распределения давления на стенке канала перед щелью и за ней. Следует отметить, что численные расчеты качественно согласуются с опытными данными и результатами работ [4], поскольку в них рассматривается вдув гелия в поток воздуха. На рисунке достаточно хорошо виден участок высоких давлений в области отрыва перед вдуваемой струей и понижение давления непосредственно за струей вследствие зоны разряжения.

На рисунке 2б приведены распределения статического давления в сечении $x = 3.81$ см. за щелью. Как в расчетах, так и в результатах авторов [5] максимум давления, вызванный головным скачком, несколько меньше, чем в экспериментах. В целом, из

рисунков видно вполне удовлетворительное соответствие результатов расчетов опытным данным.

Ниже, на рисунках 3-6 приводятся результаты численного расчета поставленной задачи с параметрами $M_\infty = 4$, $M_0 = 1 \div 3$, $Pr = 0.9$, $Re = 10^4$, $\gamma = 1.4$, $n = 4 \div 10$.

Численные эксперименты по влиянию числа Маха струи на структуру течения приведены на рисунках 3-5. На графике 3 представлено распределение изобар, для двух значений числа Маха струи рисунок 3а- $M_0 = 1$, 3б- $M_0 = 2$). Как видно из графиков, в зависимости от числа Маха струи угол наклона головного скачка уплотнения и область отрывной зоны перед струей существенно изменяются. Влияние числа Маха струи на угол наклона головного скачка уплотнения показано на рисунке 4, где ось абсцисс соответствует числу Маха струи, ось ординат – углу наклона головного скачка, вычисленного по формуле: $\alpha = \arctg(\max \frac{w}{u})$ для двух значений параметра нерасчетности (кривая 1- $n = 4$, кривая 2- $n = 10$). Как видно из графика, угол наклона для обоих значений нерасчетности изменяется линейно.

Сила взаимодействия есть интеграл от произведения избыточного давления в области отрыва на элемент площади. Подъемная сила определяется из распределения давления на стенке по формуле $F = \int_{l_s} (P - P_\infty) dl_s$, где l_s - длина отрывной зоны. Получено, что при $n = 4$ сила взаимодействия $F = 2.88$, $n = 10$ - $F = 4.03$, т.е. увеличение степени нерасчетности в 2.5 приводит к росту подъемной силы в 1.4. На фигуре 5 представлена кривая изменения силы взаимодействия в зависимости от числа Маха струи. Так при увеличении Маха струи с $M_0 = 1$ до $M_0 = 2$ для случая с нерасчетностью 10 сила взаимодействия увеличивается в 1.58 раз, в то время как для нерасчетности 4 подъемная сила изменяется лишь в 1.32 раза. Таким образом, число Маха струи существенно влияет на нормальную силу, действующую на поверхность обтекаемого тела [5].

На рисунке 6 представлена динамика сходимости численного решения для задачи $M_\infty = 4$, $M_0 = 1$, $n = 4$, $Pr = 0.9$, $Re = 10^4$, $\gamma = 1.4$. На графике показан логарифм от нормы невязки для плотности $|\rho^{n+1} - \rho^n|$ в зависимости от итерационных шагов по времени. Скорость сходимости решения достаточно высокая.

Заключение

Данная работа посвящена исследованию плоского сверхзвукового течения при наличии симметричного перпендикулярного вдува струй через щель на стенках, расположенных симметрично. Выявлено, что угол наклона головного скачка уплотнения в зависимости от увеличения числа Маха линейно возрастает. Установлено, что при увеличении числа Маха струи нормальная сила, действующая на поверхность обтекаемого тела, существенно увеличивается.

Литература

- [1] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. – М.: Мир, 1991. – Т.2. – 474 с.
- [2] Бим Р.М., Уорминг Р.Ф. Неявная факторизованная разностная схема для уравнений Навье-Стокса течения сжимаемого газа // Ракетная техника и космонавтика. – 1978. – Т.16. – №4. – С. 145–156.

- [3] *Бекетаева А.О., Найманова А.Ж.* Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй // Прикладная механика и технирская физика. – 2004. – Т.45. – №3. – С. 72–80.
- [4] *Шунь Дж. Ш., Юнь С.* Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU-факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // Аэрокосм. техника. – 1990. – №10. – С. 102–113.
- [5] *Xiaochuan Chai, Krishnan Mahesh* Simulations of High Speed Turbulent Jets in Crossflow // AIAA 2010 - 4603. – P. 1–9.

References

- [1] *Fletcher K.* Vyichislitelnyie metodyi v dinamike zhidkosti. – M.: Mir, 1991. – Т.2. – 474 s.
- [2] *Bim R.M., Uorming R.F.* Neyavnaya faktorizovannaya raznostnaya shema dlya uravneniy Nave-Stoksa techeniya szhimaemogo gaza // Raketnaya tehnika i kosmonavtika. – 1978. – Т.16. – №4. – S. 145–156.
- [3] *Beketaeva A.O., Naymanova A.Zh.* Chislennoe modelirovanie sverhzhvukovogo techeniya s poperechnym vduvom struy // Prikladnaya mehanika i tehlicheskaya fizika. – 2004. – Т.45. – №3. – S. 72–80.
- [4] *Shun Dzh. Sh., Yun S.* Chislennoe issledovanie techeniy s himicheskimi reaktsiyami na osnove LU-faktorizovannoy shemyi, postroennoy metodom simmetrichnoy posledovatelnoy verhney relaksatsii // Aerokosm. tehnika. – 1990. – №10. – S. 102–113.
- [5] *Xiaochuan Chai, Krishnan Mahesh* Simulations of High Speed Turbulent Jets in Crossflow // AIAA 2010 - 4603. – P. 1–9.