1-бөлім Раздел 1 Section 1
Математика Математика Mathematics

ГРНТИ 27.33.19

Построение решения задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями

Айсагалиев С.А. – доктор технических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77272211573,
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Айсагалиева С.С. – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института математики и механики Казахского национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Предлагается метод решения задачи управляемости для процессов описываемых линейными интегро-дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограничений на значения управления. Путем введения вспомогательных управляющих функций исходная краевая задача погружается в краевую задачу линейного дифференциального уравнения. Определяется множество всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию линейной системы из любой начальной точки в любое желаемое конечное состояние. Такой подход позволяет получить равносильные тождества и свести решения исходной краевой задачи к начальной задаче оптимального управления. Строятся минимизирующие последовательности предельные точки которых являются решениями задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями. Конструктивность предлагаемого метода показана на примере.
Ключевые слова: линейные интегро-дифференциальные уравнения, фазовые и интегральные ограничения, оптимизационная задача, минимизирующие последовательности.

Шектеулері бар сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулері үшін басқарымдылық есебінің шешімін құру

Айсағалиев С.Ә. – техника ғылымдарының докторы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, дифференциалдық теңдеулер және басқару теориясы кафедрасының профессоры, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Айсағалиева С.С. - физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика ғызыми-зерттеу институтының жетекші ғылыми кызметкері, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Фазалық және интегралдық, сондай-ақ, басқару мәніне қойылған шектеулері бар шекаралық шарттарында сызықты интегро-дифференциалдық теңдеумен сипатталатын үдеріс үшін басқарымдылық есебінің шешу әдістері ұсынылады. Көмекші басқарушы функциялардың көмегімен берілген шекаралық есеп сызықты дифференциалдық теңдеудің шекаралық есебіне келтіріледі. Әрбір элементі сызықты жүйенің траекториясын кез келген бастапқы нүктеден кез келген қажетті ақырғы нүктеге көшіретін барлық басқарулардың жиыны анықталады. Мұндай әдіс тепе-теңдікті алуға және бастапқы шекаралық есептің шешімін тиімді басқарудың бастапқы есебінің шешіміне келтіруге мүмкіндік береді. Минимумдаушы тізбектер құрылады. Олардың шектік нүктелері шектеулері бар сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін басқарымдылық есебінің шешімдері болып табылады. Ұсынылған әдістің құрылымдығы мысалда көрсетілген.
Түйін сөздер: сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер, фазалық және интегралдық шектеулер, тиімділік есебі, минимумдаушы тізбектер.

Construction of a solution of the controllability problem for linear integral and differential equations with restrictions

Aisagaliev S.A. – Doctor of Technical Science of Differential equations and Control theory Department, Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Aisagalieva S.S. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher of the Research Institute of Mathematics and Mechanics of al-Farabi Kazakh National University, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

A method of solution of the controllability problem for the processes described by linear integral and differential equations with boundary conditions in the presence of phase and integral constraints with the constraints of the control values is supposed. The origin boundary value problem is immersed to the boundary value problem of a linear differential equation by introducing the auxiliary control functions. The set of all controls are determined, each element of which translates the trajectory of the linear system from any starting point to any desired end state. This approach yields to obtain the equivalent identities and reduce the solutions of the origin boundary value problem to an initial optimal control problem. Minimizing sequences which limit points are the solutions of the controllability problem of linear integral and differential equations with restrictions are constructed. Constructiveness of the proposed method is shown in the example.
Key words: linear integral and differential equations, phase and integral constraints, optimization problem, minimizing sequences.

1 Введение

Рассматривается процесс, описываемый линейным интегро - дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t)\int\limits_a^b K(t,\tau)v(\tau)d\tau + \\ +D(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)x(\lambda)d\lambda + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1],\end{aligned} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \gamma(t) \le L(t)x \le \delta(t), \;\; t \in I\}, \tag{3}$$

интегральных ограничений

$$g_j(x,u) \le c_j, \;\; j = \overline{1, m_1}, \;\; g_j(x,u) = c_j, \;\; j = \overline{m_1+1, m_2}, \tag{4}$$

$$g_j(x,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [< a_j(t), x(t) > + < b_j(t), u(t) >]dt, \;\; j = \overline{1, m_2}, \tag{5}$$

а также ограничений на значения управлений

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u(t) \in U_1(t) \subset R^m \;\; \text{п.в.} \;\; t \in I\}, \tag{6}$$

$$v(\tau) \in V(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_1, R^p)/v(\tau) \in V_1(\tau) \subset R^p \;\; \text{п.в.} \;\; \tau \in I_1 = [a, b]\}. \tag{7}$$

Задача 1 *Пусть множество* $\Sigma \neq \emptyset$. *Найти четверку* $(u(t), v(\tau), x_0, x_1) \in \Sigma$ *т.е. найти управления* $u(t) \in U(t)$, $v(\tau) \in V(\tau)$ *которые переводят траекторию системы* (1), *исходящую из точки* $x_0 = x(t_0) \in S_0$ *в момент времени* t_0 *в точку* $x_1 = x(t_1) \in S_1$, $t_1 > t_0$ *при этом решение уравнения* (1), *функция* $x(t) = x(t; t_0, x_0, x_1, u, v)$, $t \in I$, $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$ *находится на множестве* $G(t) \subset R^n$, *а также вдоль решения системы* (1) *выполнены интегральные ограничения* (4), (5).

Актуальность решения задачи управляемости для интегро-дифференциальных уравнений покажем на одном примере. Рассмотрим задачу изгиба висящего моста состоящего из балки и цепи. Цепь и балка соединены между собой подвесками.

Пусть l – длина упругой балки с закрепленными концами, T_0 – горизонтальная растягивающая сила, начало координат находится на левом конце балки, ось Ox направлена вдоль балки, а ось Oy направлена вниз. Пусть x, ξ, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq \xi \leq l$ текущие координаты. К точке $x = a$ приложена сосредоточенная сила P, на балку действует распределенная нагрузка с плотностью $p(\xi)\sin\omega t$ в точке ξ изменяющаяся по времени.

Как следует из (Краснов, 1975) функция влияния имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{T_0 l}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \dfrac{(l-x)\xi}{T_0 l}, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

Если $\rho(\xi)$ линейная плотность балки в точке ξ, то сила инерции между точками ξ и $\xi + \Delta\xi$ в момент времени t равна (Краснов, 1975)

$$-\rho(\xi)\Delta\xi \frac{d^2 y}{dt^2} = \rho(\xi) y(\xi)\omega^2 \sin\omega t \cdot \Delta\xi,$$

где $y = y(x)\sin\omega t$, $0 \leq x \leq l$. Функция

$$y(x)\sin\omega t = \int\limits_0^l G(x,\xi)[\rho(\xi)\sin\omega t + \omega^2 \rho(\xi) y(\xi)\sin\omega t] d\xi.$$

Отсюда следует, что максимальный изгиб балки $y(x)$ вызванный распределенной нагрузкой $p(\xi)$ и силой инерции определяется по формуле

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)d\xi + \int\limits_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi,$$

где первое слагаемое изгиб балки порожденный силой инерции, второе слагаемое – изгиб из распределенной нагрузки. Так как изгиб балки от сосредоточенной силы P равен $G(x,a)P$, то суммарный изгиб балки

$$w(x) = y(x) + G(x,a)P = G(x,a)P + \int\limits_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)d\xi, \ \ 0 \le x \le l.$$

В случае висящего моста часть изгиба балки передается на цепи. Пусть цепь и балки соединены между собой подвесками, H – горизонтальные натяжения цепи, $z(x)$, $0 \le x \le l$ – отклонение цепи от горизонтального положения под действием нагрузки на балку. Тогда функция $z(x)$, $0 \le x \le l$ является решением дифференциального уравнения (Иманалиев, 1977)

$$H\frac{d^2z(x)}{dx^2} = -q(x), \ \ 0 \le x \le l,$$

где $q(x)$ – распределенная нагрузка воспринимая цепью.

Функция $z(x)$, $0 \le x \le l$ является линейной относительно изгиба балки $w(x)$. Следовательно, $z(x) = k_0w(x)$, $k_0 = const$, $0 < k_0 < 1$. В этом случае, изгиб балки $w_1(x) = (1-k_0)w(x)$, $0 \le x \le l$. Распределенная нагрузка $q(x) = k_1(x)w_1(x) = k_1(x)(1-k_0)w(x)$, $k_1(x) > 0$, $0 \le x \le l$, где $k_1(x)$ – нагрузка соответствующая на единицу изгиба балки. Подставляя значения $z(x)$, $q(x)$, $0 \le x \le l$ в уравнение цепи, получим

$$Hk_0\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -k_1(x)(1-k_0)w(x) = -k_1(x)(1-k_0)[G(x,a)P+$$

$$+\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi + \int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)d\xi],$$

где $y(x) = w(x) - G(x,a)P$. Отсюда следует, что

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = B_0(x)u + C_0(x)\int_0^l K(x,\xi)v(\xi)d\xi + D_0(x)\int_0^l \Lambda(x,\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad x \in [0,l],$$

где

$$B_0(x) = \frac{k_1(x)(1-k_0)}{Hk_0}[\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)G(\xi,a)d\xi - G(x,a)],$$

$$C_0(x) = D_0(x) = -\frac{k_1(x)(1-k_0)}{Hk_0}, \quad K(x,\xi) = G(x,\xi),$$

$$\Lambda(x,\xi) = G(x,\xi)\rho(\xi), \ \ u = P, \ \ v(\xi) = p(\xi).$$

После замены x, ξ на t, τ соответственно, обозначая $w(x)$ через $x(t)$, $t \in I = [0,t_1]$, $t_1 = l$ уравнение висящего моста запишем в виде

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = B_0(t)u + C_0(t)\int_0^{t_1} K(t,\tau)v(\tau)d\tau + D_0(t)\int_0^{t_1} \Lambda(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

$$x(0) = 0, \ \ x(t_1) = 0, \ \ t \in I = [0, t_1].$$

Полагая $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, данное уравнение запишем в векторной форме

$$\dot{x} = Ax + B(t)u + C(t)\int_0^{t_1} K(t,\tau)v(\tau)d\tau + D(t)\int_0^{t_1} \Lambda(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

$$x_0 = (x_1(0), x_2(0)) \in S_0, \ \ x_1 = (x_1(t_1), x_2(t_1)) \in S_1,$$
$$u \in U = \{u \in R^1/0 \le u \le p_0\}, \ \ v(\tau) \in V(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I, R^1)$$
$$0 \le v(\tau) \le \rho_0, \ \ \tau \in I = [0,1],$$

где

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0(t) \end{pmatrix}, \ \ C(t) = D(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ C_0(t) \end{pmatrix},$$

p_0 – наибольшее значение сосредоточенной силы, ρ_0 – наибольшее значение распределенной нагрузки. Таким образом, уравнение изгиба висящего моста имеет вид (1.1). Для данного примера, в частности, задача управляемости формулируется так: Найти управление $u \in U$, $v(\tau) \in V(\tau)$, чтобы изгиб балки $(1 - k_0)x_1(t)$, $t \in I$ удовлетворял фазовому ограничению $0 \le (1 - k_0)x_1(t) \le \delta$, $\forall t$, $t \in I$, потенциальная энергия при изгибе $(1 - k_0)\int_0^{t_1} x_1(\tau)d\tau \le c$, где δ, c – заданные числа.

Аналогичные задачи управляемости могут быть сформулированы и в других областях науки для интегро-дифференциальных уравнений из (Вольтерра, 1976), (Беллман, 1987), (Романовский, 1984), (Рубин, 1984), (Иманалиев, 1977), (Глушков, 1983), (Николис, 1979). Современная теория интегральных уравнений и теория экстремальных задач позволяют решать сложные задачи управляемости для интегро-дифференциальных уравнений.

2 Обзор литературы

Математическими моделями многих явлений в различных областях науки являются интегро-дифференциальные уравнения (Вольтерра, 1976), (Беллман, 1987), (Романовский, 1984), (Рубин, 1984), (Иманалиев, 1977), (Глушков, 1983), (Николис, 1979). Вопросы существования, единственности и методы построения приближенных решений интегро-дифференциальных уравнений, когда $u(t) \equiv 0$, $t \in I$, $v(\tau) \equiv 0$, $\tau \in I_1$ отсутствуют фазовые и интегральные ограничения исследованы в (Быков, 1957), (Lakshmikantham, 1995), (Иманалиев, 1981).

Исследование управляемости процессов описываемых интегро- дифференциальными уравнениями при наличии краевых условий, фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов системы является новым направлением в теории интегро-дифференциальных уравнений. Вопросам управляемости, наблюдаемости и устойчивости управляемых процессов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями посвящены работы (Краснов, 1975), (Калман, 1961 : 521-547), (Красовский, 1968), (Габасов, 1971), (Зубов, 1975), (Ли, 1972), (Ананьевский, 2010 : 319-323), (Семенов, 2012 : 1263-1277), (Емельянов, 2012 : 1516-1524), (Коровин, 2011 : 606-611), (Варга, 1977), (Айсагалиев, 1991 : 1476-1486), (Айсагалиев, 2005 : 17-34), (Айсагалиев, 2012а : 826-836), (Айсагалиев, 2012б : 20-36), (Айсагалиев, 2015 : 147-160), (Айсагалиев, 2014), (Айсагалиев, 2015). В данной работе делается попытка распространить эти результаты на интегро-дифференциальные уравнения.

В работе (Айсагалиев, 2017 : 3-17) приведено решение задачи: найти необходимое и достаточное условия существования решения задачи управляемости процесса описываемого интегро-дифференциальным уравнением (1) при условиях (2) – (7). Данная статья является продолжением (Айсагалиев, 2017 : 3-17) и она содержит результаты построения решения задачи. Подробный обзор литературы содержатся в работе (Айсагалиев, 2017 : 3-17).

3 Материал и методы

В работе (Айсагалиев, 2017 : 3-17) показано, что решение задачи управляемости может быть сведено к решению следующей задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u,v,p_1,p_2,p_3,\omega,x_0,x_1,d) = \int_{t_0}^{t_1} \{|w_1(t)-u(t)|^2+$$
$$+|\int_a^b K(t,\tau)v(\tau)d\tau - w_2(t)|^2 + |\int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)Py(\lambda)d\lambda - w_3(t)|^2+ \tag{8}$$
$$+|\omega(t)-L(t)Py(t)|^2\}dt \to \inf$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)p_1(t) + C_1(t)p_2(t) + D_1(t)p_3(t),\ z(t_0)=0,\ t\in I, \tag{9}$$

$$p_1(\cdot)\in L_2(I,R^m),\ p_2(\cdot)\in L_2(I,R^s),\ p_3(\cdot)\in L_2(I,R^k), \tag{10}$$

$$(x_0,x_1)\in S_0\times S_1\subset R^{2n},\ d\in D_0=\{d\in R^{m_1}|d\geq 0\}, \tag{11}$$

$$u(t)\in U(t),\ \ v(\tau)\in V(\tau),\ \ \omega(t)\in\Omega(t),\ \ t\in I, \tag{12}$$

3.1 Построение решения задачи управляемости

Введем следующие обозначения

$$F_1(q(t),t) = w_1(t)-u(t),\ \ F_2(q(t),t) = \int_a^b K(t,\tau)v_(\tau)d\tau - w_2(t),$$

$$F_3(q(t),t) = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)Py(\lambda)d\lambda - w_3(t),\ \ F_4(q(t),t) = \omega(t) - LPy(t),$$

$$q(t) = (\theta(\cdot,\cdot), z(t,p), z(t_1,p)),\ \ t\in I.$$

Теперь функционал (8) запишется в виде

$$J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(q(t),t)dt = \int_{t_0}^{t_1} (|F_1(q(t),t)|^2 + |F_2(q(t),t)|^2 +$$

$$+|F_3(q(t),t)|^2 + |F_4(q(t),t)|^2)dt.$$

Частные производные равны:

$$\frac{\partial F_0(q(t),t)}{\partial u} = F_{0u}(q(t),t) = 2F_1(q(t),t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial v} = F_{0v}(q,t) = -2\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)w_2(t)dt + 2\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K^*(t,\tau)K(t,\sigma)v(\sigma)d\sigma dt,$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial p_1} = F_{0p_1}(q,t) = 2F_1(q(t),t) - B_1^*(t)\psi(t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial p_2} = F_{0p_2}(q,t) = -2F_2(q(t),t) - C_1^*(t)\psi(t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial p_3} = F_{0p_3}(q,t) = -2F_3(q(t),t) - D_1^*(t)\psi(t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial \omega} = F_{0\omega}(q,t) = 2F_4(q,t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial x_0} = F_{0x_0}(q,t) = 2D_0^*(t)F_1(q,t) - 2D_2^*(t)F_2(q,t) + \pi_1^*(t)\overline{F}_3^*(q,t)-$$

$$-2D_3^*(t)F_3(q,t) - 2\pi_1^*(t)P^*L^*F_4(q,t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial x_1} = F_{0x_1}(q,t) = 2T_0^*(t)F_1(q,t) - 2T_2^*(t)F_2(q,t) + \pi_2^*(t)\overline{F}_3^*(q,t)-$$

$$-2T_4^*(t)F_3(q,t) - 2\pi_2^*(t)P^*L^*F_4(q,t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial d} = F_{0d}(q,t) = 2T_1^*(t)F_1(q,t) - 2T_3^*(t)F_2(q,t) + \pi_3^*(t)\overline{F}_3^*(q,t)-$$

$$-2T_5^*(t)F_3(q,t) - 2\pi_2^*(t)P^*L^*F_4(q,t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial z} = F_{0z}(q,t) = \overline{F}_3^*(q,t) - 2P^*L^*F_4(q,t),$$

$$\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial z(t_1)} = F_{0z(t_1)}(q,t) = 2N_{11}^*(t)F_1(q,t) - 2N_{12}^*F_2(q,t) + N_2^*(t)\overline{F}_3^*(q,t)-$$

$$-2N_{13}^*(t)F_3(q,t) - 2N_2^*(t)P^*L^*F_4(q,t),$$

где

$$\overline{F}_3(q,t) = -2\int_{t_0}^{t_1} P^*\Lambda^*(\lambda,t)w_3(\lambda)d\lambda + 2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} P^*\Lambda^*(\lambda,t)\Lambda(\lambda,\sigma)Py(\sigma)d\sigma d\lambda.$$

Теорема 1 *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная. Тогда функционал (8) при условиях (9) – (12) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент*

$$J'(\theta) = (J'_u(\theta), J'_v(\theta), J'_{p_1}(\theta), J'_{p_2}(\theta), J'_{p_3}(\theta), J'_\omega(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_{x_1}(\theta), J'_d(\theta)) \in H,$$

в любой точке $\theta \in X$ вычисляется по формуле

$$\begin{gathered} J'_u(\theta) = F_{0u}(q,t),\ \ J'_v(\theta) = F_{0v}(q,t),\ \ J'_{p_1}(\theta) = F_{0p_1}(q,t), \\ J'_{p_2}(\theta) = F_{0p_2}(q,t),\ \ J'_{p_3}(\theta) = F_{0p_3}(q,t),\ \ J'_\omega(\theta) = F_{0\omega}(q,t), \\ J'_{x_0}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0x_0}(q,t)dt,\ \ J'_{x_1}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0x_1}(q,t)dt,\ \ J'_d(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0d}(q,t)dt, \end{gathered} \tag{13}$$

функция $z(t,p)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (9)*, а функция $\psi(t)$, $t \in I$ – решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = F_{0z}(q,t) - A_1^*(t)\psi, \ \ \psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0z(t_1)}(q,t)dt. \tag{14}$$

Кроме того, градиент $J'(\theta)$, $\theta \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \le K\|\theta_1 - \theta_2\|,\ \forall\theta_1,\ \theta_2 \in X, \tag{15}$$

где $K = const > 0$.

Доказательство. Пусть $\theta(t)$, $\theta(t) + \Delta\theta(t) \in X$, $z(t,p)$, $z(t, p + \Delta p)$, $t \in I$ – решение уравнения (9). Пусть $z(t, p + \Delta p) = z(t,p) + \Delta z(t)$, $t \in I$. Так как

$$z(t,p) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)p_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)C_1(\tau)p_2(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)D_1(\tau)p_3(\tau)d\tau,$$

то

$$\Delta z(t,p) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)\Delta p_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)C_1(\tau)\Delta p_2(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)D_1(\tau)\Delta p_3(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$|\Delta z(t,p)| \le \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)\|\|B_1(\tau)\||\Delta p_1(\tau)|d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)\|\|C_1(\tau)\||\Delta p_2(\tau)|d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)\|\|D_1(\tau)\||\Delta p_3(\tau)|d\tau \le c_1\|\Delta p_1\| + c_2\|\Delta p_2\| + c_2\|\Delta p_3\|, \ \ t \in I,$$

где $c_1, c_2, c_3 = const > 0$.

Приращение функционала

$$\Delta J = J(\theta+\Delta\theta) - J(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [F_0(q(t)+\Delta q(t),t) - F_0(q(t),t)]dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \{[|F_1(q+\Delta q,t)|^2 - |F_1(q,t)|^2] + [|F_2(q+\Delta q,t)|^2 - |F_2(q,t)|^2] +$$

$$+[|F_3(q+\Delta q,t)|^2 - |F_3(q,t)|^2] + [|F_4(q+\Delta q,t)|^2 - |F_4(q,t)|^2]\}dt.$$

Отсюда, с учётом того, что:

а) $|F_1(q+\Delta q,t)|^2 - |F_1(q,t)|^2 = -2 < w_1 - u, \Delta u > +2 < w_1 - u, \Delta w_1 > +|\Delta w_1 + \Delta u|^2$, $\Delta w_1 = \Delta p_1 + D_0(t)\Delta x_0 + T_0(t)\Delta x_1 + T_1(t)\Delta d + N_{11}(t)\Delta z(t_1,p)$;

б) $|F_2(q+\Delta q,t)|^2 - |F_2(q,t)|^2 = 2 < \int\limits_a^b K(t,\tau)\Delta v(\tau)d\tau - \Delta w_2(t), \int\limits_a^b K(t,\tau)v(\tau)d\tau - w_2(t) > +|\int\limits_a^b K(t,\tau)\Delta v(\tau)d\tau + \Delta w_2(t)|^2$, $\Delta w_2 = \Delta p_2 + D_2(t)\Delta x_0 + T_2(t)\Delta x_1 + T_3(t)\Delta d + N_{12}(t)\Delta z(t_1,p)$;

в) $|F_3(q+\Delta q,t)|^2 - |F_3(q,t)|^2 = 2 < \int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)P\Delta y d\lambda - \Delta w_3, \int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)Pyd\lambda - w_3 > +|\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)P\Delta y d\lambda - \Delta w_3(t)|^2$, $\Delta w_3 = \Delta p_3 + D_3(t)\Delta x_0 + T_4(t)\Delta x_1 + T_5(t)\Delta d + N_{13}(t)\Delta z(t_1,p)$; $\Delta y = \Delta z(t) + \pi_1(t)\Delta x_0 + \pi_2(t)\Delta x_1 + \pi_3(t)\Delta d + N_2(t)\Delta z(t_1,p)$;

г) $|F_4(q+\Delta q,t)|^2 - |F_4(q,t)|^2 = 2 < \omega - LPy, \Delta\omega - LP\Delta y > +|\Delta\omega - LP\Delta y|^2$, получим

$$\begin{gathered} \Delta J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{\Delta u^* F_{0u}(q,t) + \Delta v^* F_{0v}(q,t) + \Delta p_1^*[2F_1(q,t)] - \\ -\Delta p_2^*[2F_2(q,t)] - \Delta p_3^*[2F_3(q,t)] + \Delta\omega^* F_{0\omega}(q,t) + \Delta x_0^* F_{0x_0}(q,t) + \\ +\Delta x_1^* F_{0x_1}(q,t) + \Delta d^* F_{0d}(q,t) + \Delta z^*(t) F_{0z}(q,t) + \\ +\Delta z^*(t_1) F_{0z(t_1)}(q,t) + R_1 + R_2 + R_3 + R_4\}dt, \end{gathered} \tag{16}$$

где $R_1 = |\Delta w_1 + \Delta u|^2$, $R_2 = |\int\limits_a^b K(t,\tau)\Delta v(\tau)d\tau + \Delta w_2(t)|^2$, $R_3 = |\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)P\Delta y d\lambda - \Delta w_3|^2$, $R_4 = |\Delta\omega - LP\Delta y|^2$, $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$.

Пользуясь теоремой Фубини о перемене переменных интегрирования имеем:

а)

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} 2 < \int\limits_a^b K(t,\tau)v(\tau)d\tau - w_2(t), \int\limits_a^b K(t,\tau)\Delta v(\tau)d\tau > dt =$$

$$= \int\limits_a^b < -2 < \int\limits_a^b K^*(t,\sigma)w_2(t)dt, \Delta v(\sigma) > d\sigma + \int\limits_a^b < 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b K^*(t,\sigma)K(t,\tau)v(\tau)d\tau dt,$$

$$\Delta v(\sigma) > d\sigma =< J'_v(\tau), \Delta v >_{L_2},$$

$$J'_v(\tau) = -2\int\limits_{t_0}^{t_1} K^*(t, m\tau) w_2(t)dt + 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{a}^{b} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)d\sigma dt = F_{0v}(q,t); \quad (17)$$

б)

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} 2 < \int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)Pyd\lambda - w_3, \int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(t,\lambda)P\Delta y d\lambda > dt =$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} < -2\int\limits_{t_0}^{t_1} P^*\Lambda^*(t,\sigma)w_3(t)dt, \Delta y(\sigma) > d\sigma +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1} < 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1} P^*\Lambda^*(t,\sigma)\Lambda(t,\lambda)Pyd\lambda dt, \Delta y(\sigma) > d\sigma =< J'_y(\sigma), \Delta y >_{L_2},$$

$$J'_y(t) = -2\int\limits_{t_0}^{t_1} P^*\Lambda^*(\lambda,t)w_3(\lambda)d\lambda + 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1} P^*\Lambda^*(\lambda,t)\Lambda(\lambda,\sigma)Pyd\sigma d\lambda = \overline{F}_3(q,t). \quad (18)$$

Рассмотрим последние два слагаемые из (16). Поскольку (см. (14))

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t_1)F_{0z(t_1)}(q,t)dt = \Delta z^*(t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0z(t_1)}(q,t)dt = -\Delta z^*(t_1)\psi(t_1) =$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t}[\Delta z^*(t)\psi(t)]dt = -\int\limits_{t_0}^{t_1} [\Delta \dot{z}^*(t)\psi(t) + \Delta z^*(t)\dot{\psi}(t)]dt =$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{t_1} [\Delta z^*(t)A_1^*(t) + \Delta p_1^*(t)B_1^*(t) + \Delta p_2^*(t)C_1^*(t) + \Delta p_3^*(t)D_1^*(t)]\psi(t)dt -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t)[F_{0z}(q,t) - A_1^*(t)\psi(t)]dt = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta p_1^*(t)B_1^*(t)\psi(t)dt -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta p_2^*(t)C_1^*(t)\psi(t)dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta p_3^*(t)D_1^*(t)\psi(t)dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t)F_{0z}(q,t)dt,$$

то

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t_1) F_{0z(t_1)}(q,t)dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t) F_{0z}(q,t)dt = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta p_1^*(t) B_1^*(t)\psi(t)dt - \\ -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta p_2^*(t) C_1^*(t)\psi(t)dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta p_3^*(t) D_1^*(t)\psi(t)dt. \tag{19}$$

Из (16) с учетом (17) – (19), получим

$$\Delta J =< J_u'(\theta), \Delta u >_{L_2} + < J_v'(\theta), \Delta v >_{L_2} + < J_{p_1}'(\theta), \Delta p_1 >_{L_2} + \\ + < J_{p_2}'(\theta), \Delta p_2 >_{L_2} + < J_{p_3}'(\theta), \Delta p_3 >_{L_2} + < J_\omega'(\theta), \Delta\omega >_{L_2} + \\ + < J_{x_0}'(\theta), \Delta x_0 >_{R^n} + < J_{x_1}'(\theta), \Delta x_1 >_{R^n} + < J_d'(\theta), \Delta d >_{R^{m_1}} + \\ +\overline{R}, \ \ |\overline{R}| \le c_4\|\theta\|^2, \ \ \overline{R} = \int\limits_{t_0}^{t_1} R dt. \tag{20}$$

Как следует из формулы (20) производная Фреше функционала (8) при условиях (9) – (12) определяется по формуле (13).

Пусть θ_1, $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta \in X$. Так как

$$|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|^2 \le L_1|\Delta q(t)|^2 + L_2|\Delta\psi(t)|^2 + L_3|\Delta\theta|^2,$$

где $|\Delta q(t)| \le L_4\|\Delta\theta\|$, $|\Delta\psi(t)| \le L_5\|\Delta\theta\|$, то $\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \le K\|\Delta\theta\|$, $\forall\theta_1,\ \theta_2 \in X$. Теорема доказана.

Используя соотношения (13) – (15) строим последовательность

$$\{\theta_n\} = \{u_n, v_n, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, \omega_n, x_{0n}, x_{1n}, d_n\} \subset X$$

по следующему алгоритму

$$u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J_u'(\theta_n)], \ \ v_{n+1} = P_V[v_n - \alpha_n J_v'(\theta_n)], \\ p_{1n+1} = P_{L_2^\alpha}[p_{1n} - \alpha_n J_{p_1}'(\theta_n)], \ \ p_{2n+1} = P_{L_2^\alpha}[p_{2n} - \alpha_n J_{p_2}'(\theta_n)], \\ p_{3n+1} = P_{L_2^\alpha}[p_{3n} - \alpha_n J_{p_3}'(\theta_n)], \ \ \omega_{n+1} = P_\Omega[\omega_n - \alpha_n J_\omega'(\theta_n)], \\ x_{0n+1} = P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J_{x_0}'(\theta_n)], \ \ x_{1n+1} = P_{S_0}[x_{1n} - \alpha_n J_{x_1}'(\theta_n)], \\ d_{n+1} = P_{D_0^\alpha}[d_n - \alpha_n J_d'(\theta_n)], \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

где $0 < \alpha_n < \dfrac{2}{K + 2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $K > 0$ – постоянная Липшица из неравенства (15).

Введем множество $\Lambda_0 = \{\theta \in X \mid J(\theta) \le J(\theta_0)\}$, где $\theta_0 = (u_0, v_0, p_{10}, p_{20}, p_{30}, \omega_0, x_{00}, x_{10}, d_0) \in X$ – начальная точка для последовательности (21).

Теорема 2 *Пусть выполнены условия теорем 5, 6, последовательность* $\{\theta_n\}$ *определяется по формуле* (21), U, V, $L_2^\alpha(I, R^m)$, $L_2^\alpha(I, R^s)$, $L_2^\alpha(I, R^k)$, Ω, S_0, S_1, D_0^α *– ограниченные выпуклые замкнутые множества. Тогда:*

1. *числовая последовательность* $\{J(\theta_n)\}$ *строго убывает;*

2. $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Если, кроме того, множество Λ_0 *ограничено, то:*

3. *последовательность* $\{\theta_n\} \subset X$ *является минимизирующей, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf\limits_{\theta\in X} J(\theta)$;

4. *последовательность* $\{\theta_n\}\subset X$ *слабо сходится к множеству* X_*, $X_*\neq\emptyset$, $\theta_n \xrightarrow{сл} \theta_*$ *при* $n\to\infty$;

5. *справедлива следующая оценка скорости сходимости*

$$0 \le J(\theta_n) - J_* \le \frac{c_5}{n},\ n = 1, 2, \ldots,\ c_5 = const > 0.$$

6. *задача управляемости определяемая соотношениями* (1) – (7) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $J(\theta_*) = 0$.

Доказательство. Утверждения 1), 2) непосредственно следуют из свойства проекции точки на выпуклом замкнутом множестве и алгоритма (21). Так как функционал (8) при условиях (9) – (12) является выпуклым, ограниченное выпуклое замкнутое множество Λ_0 в рефлексивном банаховом пространстве H слабо бикомпактно, $J(\theta)\in C^1(X)$, то $J(\theta)$ – слабо полунепрерывен снизу на Λ_0. Следовательно, функционал $J(\theta)$ достигает нижней грани на множестве Λ_0 и верно неравенство $0 \le J(\theta_n) - J(\theta_*) \le C\|\theta_n - \theta_{n+1}\|$, $c = const > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, где $J(\theta_*) = \inf_{\theta\in\Lambda_0} J(\theta) = \min\limits_{\theta\in\Lambda_0} J(\theta)$.

Отсюда с учётом того, что $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n\to\infty$ имеем: последовательность $\{\theta_n\}$ является минимизирующей; поскольку $\{\theta_n\}\subset\Lambda_0$, Λ_0 – слабо бикомпактно, то $\theta_n \xrightarrow{\text{сл}} \theta_*$ при $n\to\infty$.

Так как $0 \le J(\theta_n) - J(\theta_*) \le C\|\theta_n - \theta_{n+1}\|$, $J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \ge \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, то верно утверждение 5). Как следует из леммы 2, если значение $J(\theta_*) = 0$, то задача управляемости (1) – (7) имеет решение. Заметим, что если $J(\theta_*) \ge 0$, $\forall\sigma$, $\sigma\in X$. Теорема доказана.

Пусть $t_{1*} > t_0$ – наименьшее значение t_1, для которого $J(\theta_*) = 0$. Для решения задачи оптимального быстродействия необходимо решить задачу управляемости для значений $t_{11}, t_{12}, \ldots$, где $t_1 > t_{11} > t_{12} > \ldots > t1*$.

3.2 Решение примера

Конструктивность предлагаемого метода покажем на одном примере.

Пример. Рассмотрим задачу управляемости следующего вида

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1(t) + \int\limits_1^3 (\cos t\tau)v(\tau)d\tau,\quad \tau\in I_1 = [1,3],\quad t\in I = [1,2], \tag{22}$$

$$\dot{x}_2 = u_2(t) + \int\limits_1^2 e^{ts}x_1(s)ds,\quad t\in I, \tag{23}$$

$$g_1(x_1,x_2,u_1)=\int\limits_1^2[x_1(t)+x_2(t)+u_1(t)]dt\le c_1, \tag{24}$$

$$x(t)\in G(t),\ \ G(t)=\{x\in R^2/e\le x_1(t)\le e^2,\ \ e-2\le x_2(t)\le e^2+2,\ \ t\in I\},$$

$$u(t)\in U=\{u(\cdot)\in L_2(I,R^2)/-2\le u_1(t)\le 2,\ \ -4+\frac{e^2}{2}-\frac{e^6}{3}\le$$

$$\le u_2(t)\le e^2+\frac{1}{3}e^3+6,\ \ \text{п.в. }\ t\in I\},$$

$$v(\tau)\in V=\{v(\cdot)\in L_2(I,R^1)/-1\le v(\tau)\le 1\ \ \text{п.в. }\ \tau\in I_1\},$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix},\ \ x_0=\begin{pmatrix}x_1(1)\\x_2(1)\end{pmatrix}\ \ x_1=\begin{pmatrix}x_1(2)\\x_2(2)\end{pmatrix},$$

$$x_0\in S_0=\{0\le x_1(1)\le e,\ \ e-2\le x_2(1)\le e+2\},$$

$$x_1\in S_1=\{0\le x_1(2)\le e^2,\ \ e^2-1\le x_2(2)\le e^2+1\}.$$

1. Для данного примера

$$\eta(t)=\int\limits_1^t[x_1(\tau)+x_2(\tau)+u_1(\tau)]d\tau,$$

$$\dot\eta(t)=x_1(t)+x_2(t)+u_1(t),\ \ \eta(1)=0,\ \ \eta(2)=c_1-d,\ \ d>0.$$

2. Теперь соотношения (21) – (24) запишутся в виде

$$\dot\xi=A_1\xi+B_1u+C_1\int\limits_1^3(\cos t\tau)v(\tau)d\tau+D_1\int\limits_1^2 e^{ts}x_1(s)ds,\ \ t\in I,$$

где

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ \ B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \ C_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \ D_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\xi(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\eta(t)\end{pmatrix},\ \ \xi_0=\begin{pmatrix}x_1(1)\\x_2(1)\\0\end{pmatrix},\ \ \xi_1=\begin{pmatrix}x_1(2)\\x_2(2)\\c_1-d\end{pmatrix},$$

$$\xi_0=\xi(1),\ \ \xi_1=\xi(2),\ \ t\in I.$$

3. Линейная управляемая система имеет вид

$$\dot y=A_1y+B_1w_1(t)+C_1w_2(t)+D_1w_3(t),\ \ t\in I,$$

$$y(1)=\xi_0,\ \ y(2)=\xi_1,\ \ w_1(\cdot)\in L_2(I,R^2),\ \ w_2(\cdot)\in L_2(I,R^1),\ \ w_3(\cdot)\in L_2(I,R^1).$$

фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1\zeta$ определяется по формуле

$$\theta(t) = e^{A_1(t-1)} = \begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t-1 & \dfrac{(t-1)^2}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{-A_1(t-1)} = \theta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-t & \dfrac{(1-t)^2}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & t-\tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t-\tau & \dfrac{(t-\tau)^2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$B_2 = (B_1, C_1, D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то матрица

$$W(1,2) = \int_1^2 \Phi(1,t)B_2B_2^*\Phi^*(1,t)dt =$$

$$= \int_1^2 \begin{pmatrix} 4-4t+2t^2 & 2-2t & 4-5t+3t^2-t^3 \\ 2-2t & 2 & (1-t)^2 \\ 4-5t+3t^2-t^3 & (1-t)^2 & \dfrac{7}{2}-7t+5t^2-2t^3+\dfrac{t^4}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8/3 & -1 & -1/4 \\ -1 & 2 & 1/3 \\ -1/4 & 1/3 & 4/15 \end{pmatrix},$$

где главные миноры $\Delta_1 = 8/3$, $\Delta_2 = 13/3$, $\Delta = 973/1080$.

Следовательно, матрица $W(1,2)$ положительно определенная. Обратная матрица

$$W^{-1}(1,2) = \frac{1080}{973}\begin{pmatrix} 19/45 & 11/60 & 1/6 \\ 11/60 & 467/720 & -23/36 \\ 1/6 & -23/36 & 13/3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $W(t,2) = W(1,2) - W(1,t)$, где

$$W(1,t) = \left(\begin{array}{lll} 4t-2t^2+2t^3/3-8/3 & 2t-t^2-1 & \\ 2t-t^2-1 & 2t-2 & \\ 4t-5t^2/2+t^3-t^4/4-9/4 & t-t^2-t^3/3-1/3 & \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{r} 4t-5t^2/2+t^3-t^4/4-9/4 \\ t-t^2+t^3/3-1/3 \\ 7t/2-7t^2/2+5t^3/3-t^4/2+t^5/10-19/15 \end{array} \right).$$

Вектор

$$a = \Phi(1,2)\xi_1 - \xi_0 = \begin{pmatrix} x_1(2) - x_2(2) - x_1(1) \\ x_2(2) - x_2(1) \\ -x_1(2) + x_2(2)/2 + c_1 - d \end{pmatrix}.$$

Вектор функция

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_{11}(t,\xi_0,\xi_1) \\ \Lambda_{12}(t,\xi_0,\xi_1) \\ \Lambda_{13}(t,\xi_0,\xi_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{11}(t)z(2,p) \\ N_{12}(t)z(2,p) \\ N_{13}(t)z(2,p) \end{pmatrix},$$

где

$$p_1(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \\ p_{12}(t) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{11}(t,\xi_0,\xi_1) = \begin{pmatrix} \Lambda_{111}(t,\xi_0,\xi_1) \\ \Lambda_{112}(t,\xi_0,\xi_1) \end{pmatrix}, \quad N_{11}(t)z(2,p) = \begin{pmatrix} N_{111}(t)z(2,p) \\ N_{112}(t)z(2,p) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$w_1(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \\ p_{12}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_{111}(t,\xi_0,\xi_1) \\ \Lambda_{112}(t,\xi_0,\xi_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{111}(t)z(2,p) \\ N_{112}(t)z(2,p) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

$$w_2(t) = p_2(t) + \Lambda_{12}(t,\xi_0,\xi_1) + N_{12}(t)z(2,p), \quad t \in I,$$

$$w_3(t) = p_3(t) + \Lambda_{13}(t,\xi_0,\xi_1) + N_{13}(t)z(2,p), \quad t \in I,$$

где функция $z(t,p)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot z = A_1 z + B_1 p_1(t) + C_1 p_2(t) + D_1 p_3(t), \quad z(1) = 0, \quad t \in I,$$

$$p_1(\cdot) \in L_2(I, R^2), \quad p_2(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad p_3(\cdot) \in L_2(I, R^1).$$

Здесь

$$\Lambda_{11}(t,\xi_0,\xi_1) = B_1^*\Phi^*(1,t)W^{-1}(1,2)a,$$

$$\Lambda_{12}(t,\xi_0,\xi_1) = C_1^*\Phi^*(1,t)W^{-1}(1,2)a,$$

$$\Lambda_{13}(t,\xi_0,\xi_1) = D_1\Phi^*(1,t)W^{-1}(1,2)a,$$

$$N_{11}(t)z(2,p) = -B_1^*\Phi^*(1,t)W^{-1}(1,2)\Phi(1,2)z(2,p),$$

$$N_{12}(t)z(2,p) = -C_1^*\Phi^*(1,t)W^{-1}(1,2)\Phi(1,2)z(2,p),$$

$$N_{13}(t)z(2,p) = -D_1^*\Phi^*(1,t)W^{-1}(1,2)\Phi(1,2)z(2,p).$$

Функция

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t,p) \\ z_2(t,p) \\ z_3(t,p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_{21}(t,\xi_0,\xi_1) \\ \Lambda_{22}(t,\xi_0,\xi_1) \\ \Lambda_{23}(t,\xi_0,\xi_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{21}(t)z(2,p) \\ N_{22}(t)z(2,p) \\ N_{23}(t)z(2,p) \end{pmatrix},$$

где

$$z(t,p) = \begin{pmatrix} z_1(t,p) \\ z_2(t,p) \\ z_3(t,p) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2(t,\xi_0,\xi_1) = \begin{pmatrix} \Lambda_{21}(t,\xi_0,\xi_1) \\ \Lambda_{22}(t,\xi_0,\xi_1) \\ \Lambda_{23}(t,\xi_0,\xi_1) \end{pmatrix} \quad N_2(t)z(t,p) = \begin{pmatrix} N_{21}(t)z(2,p) \\ N_{22}(t)z(2,p) \\ N_{23}(t)z(2,p) \end{pmatrix}.$$

4. Оптимизационная задача. Для данного примера задача оптимального управления (8) – (12) имеет вид

$$J(\theta) = J(u, v, p_1, p_2, p_3, \omega, x_0, x_1, d) = \int_1^2 \{|w_1(t) - u(t)|^2 + |\int_1^3 \cos(t\tau)v(\tau)d\tau-$$

$$-w_2(t)|^2 + |\int_1^2 e^{ts}y_1(s)ds - w_3(t)|^2 + |\omega(t) - LPy(t)|^2\}dt \to \inf$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 p_1(t) + C_1 p_2(t) + D_1 p_3(t), \quad z(1) = 0, \quad t \in I,$$

$$p_1(\cdot) \in L_2(I, R^2), \quad p_2(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad p_3(\cdot) \in L_2(I, R^1),$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad d \in D = \{d \in R^1 / d \geq 0\}, \quad u(t) \in U, \quad v(\tau) \in V$$

$$\omega(t) \in \Omega = \{\omega(\cdot) \in L_2(I, R^2)/e \leq \omega_1(t) \leq e^2, \quad e - 2 \leq \omega_2(t) \leq e^2 + 2, \quad \text{п.в.} \ t \in I\},$$

$$P = (I_2, O), \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad LPy = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Функции $F_1(q,t) = w_1 - u$, $F_2(q,t) = \int_1^3 (\cos t\tau)v(\tau)d\tau - w_2$, $F_3(q,t) = \int_1^2 e^{ts}y_1(s)ds - w_3$, $F_4(q,t) = \omega - LPy$. Для каждого фиксированного $\theta_n = (u_n, v_n, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, \omega_n, x_{0n}, x_{1n}, d) \in X$ градиент функционала вычисляется по формуле (13).

Можно показать, что для данного примера предельные значения минимизирующих последовательностей следующие:

$$u_*(t) = (u_{1*}(t), u_{2*}(t)), \quad u_{1*}(t) = \frac{\sin 3t}{t} + \frac{\sin t}{t}, \quad u_{2*}(t) = e^t - \frac{4\cos 2t}{t} +$$

$$+\frac{2\sin 2t}{t^2} - \frac{e^{2(t+1)}}{t+1} + \frac{e^{t+1}}{t+1}, \quad t \in I, \quad v_*(\tau) = \begin{cases} 1, & 1 \leq \tau < 2, \\ -1, & 2 \leq \tau < 3, \end{cases}$$

$$p_{1*}(t) = \begin{pmatrix} p_{11*}(t) \\ p_{12*}(t) \end{pmatrix}, \quad p_{11*}(t) = u_{1*}(t), \quad p_{12*}(t) = u_{2*}(t),$$

$$p_{2*}(t) = \int_1^3 \cos(t\tau)v_*(\tau)d\tau, \quad p_{3*}(t) = \int_1^2 e^{ts}y_{1*}(s)ds, \quad y_{1*}(t) = x_{1*}(t) = e^t,$$

$$y_{2*}(t) = e^t - \frac{2\sin 2t}{t} = x_{2*}(t), \quad t \in I, \quad \omega_{1*}(t) = x_{1*}(t),$$

$$\omega_{2*}(t) = x_{2*}(t), \quad t \in I, \quad x_{0*} = \begin{pmatrix} e \\ e - 2\sin 2 \end{pmatrix}, \quad x_{1*} = \begin{pmatrix} e^2 \\ e^2 - \sin 4 \end{pmatrix},$$

$$\int_1^2 [x_{1*}(t) + x_{2*}(t) + u_{1*}(t)]dt = c_1 - d_*.$$

Значение $J(\theta_*) = J(u_*, v_*, p_{1*}, p_{2*}, p_{3*}, \omega_*, x_{0*}, x_{1*}, d_*) = 0$.

4 Результаты и обсуждение

В статье получены следующие результаты: Решение задачи управляемости линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями сведено к начальной задаче оптимального управления; Доказано, что функционал непрерывно дифференцируем по Фреше и градиент функционала удовлетворяет условию Липшица; построена минимизирующая последовательность и получена оценка скорости сходимости; Создана конструктивная теория для решения задачи управляемости интегро-дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями.

Актуальными и нерешенными проблемами теории управляемости интегро - дифференциальных уравнений с ограничениями являются: получение необходимых и достаточных условий разрешимости общих задач управляемости, разработка конструктивных методов построения их решений. Целью данной работы является создание общей теории управляемости процессов описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов системы.

5 Заключение

Теория управляемости динамических систем является одним из направлений в качественней теории дифференциальных уравнений возникшее от потребностей новых областей науки и техники, как освоение космического пространства, сверхзвуковой авиации, управление сложными технологическими процессами, управление ядерными и химическими реакторами, а также необходимостью решения сложных проблем экономики и экологии, естественных и технических наук.

Динамическая система называется управляемой, если существует управляющее воздействие, которое переводит траекторию системы из любого начального состояния в желаемое конечное состояние, определяемое краевыми условиями, при этом вдоль решения системы выполнены фазовые и интегральные ограничения.

Интегро - дифференциальное уравнение связывает воедино настоящее, будущее и прошлое процесса. Такие математические модели явлений более адекватно описывают их свойства. Один из создателей квантовой механики В. Гейзенберг, в своей книги "Физика и философия" делает следующее предположение: "...основное уравнение материи, рассматриваемое как математическое представление всей материи, должно иметь вид сложной системы интегро - дифференциальных уравнений".

Создана конструктивная теория управляемости процесса описываемого линейным интегро-дифференциальным уравнением. Основой предлагаемого метода разрешимости задачи управляемости является возможность сведения ее к одному классу интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Показано, что для построения решения задачи управляемости необходимо строить минимизирующие последовательности для начальной задачи оптимального управления. Решением исходной задачи являются слабо предельные точки минимизирующих последовательностей.

Список литературы

[1] *Айсагалиев С. А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1991. –С. 1476–1486.

[2] *Айсагалиев С. А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. – 2005. – С. 17–34.

[3] *Айсагалиев С. А.* Теория управляемости динамических систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2014. – 158 с.

[4] *Айсагалиев С. А.* Конструктивная теория краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алматы: Қазақ университетi, 2015. – 207 с.

[5] *Айсагалиев С. А., Айсагалиева С. С.* Существование решения задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями // Вестник КазНУ, сер. мех., мат., инф. – 2017, № 1(92). – С. 3-17.

[6] *Айсагалиев С. А., Белогуров А. П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012. – С. 20–36.

[7] *Айсагалиев С. А, Кабидолданова А. А.* Оптимальное управление линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. – С. 826–836.

[8] *Айсагалиев С. А., Калимолдаев М. Н.* Конструктивный метод решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2015. – С. 147–160.

[9] *Ананьевский И. М., Анахин Н. В., Овсеевич А. И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады РАН. – 2010. – С. 319-323.

[10] *Беллман Р.* Математические методы в медицине. – М.: Мир, 1987. – 282 с.

[11] *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. –Фрунзе: Илим, 1957. – 312 с.

[12] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 585 с.

[13] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существования. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

[14] *Габасов Р., Кириллов Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 421 с.

[15] *Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М.* Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 285 с.

[16] *Емельянов С. В., Крищенко А. П.* Стабилизация нерегулярных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. – С. 1516-1524.

[17] *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 502 с.

[18] *Иманалиев М.И.* Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977. – 302 с.

[19] *Иманалиев М.И.* Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. – Фрунзе: Илим, 1981. – 265 с.

[20] *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления // Труды 4 Конгресса Международная федерации по автоматическому управлению. – АН СССР. – 1961. – С. 521-547.

[21] *Коровин С. К., Капалин И. В., Фомичев В. В.* Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем // Доклады РАН. – 2011. – С. 606-611.

[22] *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

[23] *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.

[24] *Ли Э. В., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 575 с.

[25] *Николис Г., Пригожин И.* Саморганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 245 с.

[26] *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984. – 290 с.

[27] *Рубин А.Б.* Термодинамика биологических процессов. – Изд-во МГУ, 1984. – 352 с.

[28] *Семенов Ю. М.* О полной управляемости линейных неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. – С. 1263-1277.

[29] *Lakshmikantham V., Rao M.R.* Theory of integro-differential equations. – London, 1995. – 402 с.

References

[1] Aisagaliev S. A., «Upravlyaemost nekotoroy sistemyi differentsialnyih uravneniy» [Controllability of a differential-equation system], *Differentsialnyie uravneniya* (1991) : 1476–1486.

[2] Aisagaliev S. A., «Obschee reshenie odnogo klassa integralnyih uravneniy [The general solution of a class of integral equations]», *Matematicheskiy zhurnal* (2005) : 17–34.

[3] Aisagaliev S. A. *Teoriya upravlyaemosti dinamicheskih sistem* [Controllability theory of dynamical systems] (Kazakh universiteti, 2014), 158.

[4] Aisagaliev S. A. *Konstruktivnaya teoriya kraevyih zadach obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy* [Constructive theory of boundary value problems for ordinary differential equations](Almaty: Kazakh universiteti, 2015), 207.

[5] Aisagaliev S. A., Aisagalieva S. S., «Suschestvovanie resheniya zadachi upravlyaemosti dlya lineynyih integro-differentsialnyih uravneniy s ogranicheniyami [The existence of a solution of the controllability problem for linear integral and differential equations with restrictions]», *Vestnik KazNU, ser. meh., mat., inf.* (2017) : 3-17.

[6] Aisagaliev S. A., Belogurov A. P., «Upravlyaemost i byistrodeystvie protsessa, opisyivaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennyim upravleniem [Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control]», *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* (2012) : 20–36.

[7] Aisagaliev S. A., Kabidoldanova A. A. «Optimalnoe upravlenie lineynyimi sistemami s lineynyim kriteriem kachestva i ogranicheniyami [On the optimal control of linear systems with linear performance criterion and constraints]», *Differentsialnyie uravneniya* (2012) : 826–836.

[8] Aisagaliev S. A., Kalimoldaev M. N., «Konstruktivnyiy metod resheniya kraevoy zadachi dlya obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy [Constructive method for solving a boundary value problem for ordinary differential equations]», *Differentsialnyie uravneniya* (2015) : 147–160.

[9] Ananevskiy I. M., Anahin N. V., Ovseevich A. I., «Sintez ogranichennogo upravleniya lineynyimi dinamicheskimi sistemami s pomoschyu obschey funktsii Lyapunova [Synthesis of limited control for linear dynamical systems with the using of the general Lyapunov function]», *Dokladyi RAN* (2010) : S. 319-323.

[10] Bellman R. *Matematicheskie metodyi v meditsine* [Mathematical Methods in Medicine] (M.: Mir, 1987), 282.

[11] Byikov Ya.V., *O nekotoryih zadachah teorii integro-differentsialnyih uravneniy* [On some problems of the theory of integro-differential equations] (Frunze: Ilim, 1957), 312.

[12] Emelyanov S. V., Krischenko A. P., «Stabilizatsiya neregulyarnyih sistem [Stabilization of irregular systems]», *Differentsialnyie uravneniya* (2012) : 1516-1524.

[13] Gabasov R., Kirillov F. M. *Kachestvennaya teoriya optimalnyih protsessov* [Qualitative theory of optimal processes] (M.: Nauka, 1971), 421.

[14] Glushkov V.M., Ivanov V.V., Yanenko V.M. *Modelirovanie razvivayuschihsya sistem* [Modeling of developing systems] (M.: Nauka, 1983), 285.

[15] Imanaliev M.I. *Metodyi resheniya nelineynyih obratnyih zadach i ih prilozheniya* [Methods for solving nonlinear inverse problems and their applications] (Frunze: Ilim, 1977), 302.

[16] Imanaliev M.I. *Obobschennyie resheniya integralnyih uravneniy pervogo roda* [Generalized solutions of integral equations of the first kind] (Frunze: Ilim, 1981), 265.

[17] Kalman R. E., «Ob obschey teorii sistem upravleniya [On the General Theory of Control Systems]». Trudyi 4 Kongressa Mezhdunarodnaya federatsii po avtomaticheskomu upravleniyu, AN SSSR, 1961.

[18] Korovin S. K., Kapalin I. V., Fomichev V. V., «Minimalnyie stabilizatoryi dlya lineynyih dinamicheskih sistem [Minimum stabilizers for linear dynamic systems]». *Dokladyi RAN*, 2011.

[19] Krasnov M.L. *Integralnyie uravneniya* [Integral equations] (M.: Nauka, 1975), 304.

[20] Krasovskiy N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control] (M.: Nauka, 1968), 475.

[21] Lakshmikantham V., Rao M.R. *Theory of integro-differential equations* (London, 1995), 402.

[22] Li E. V., Markus L. *Osnovyi teorii optimalnogo upravleniya* [Fundamentals of Optimal Control Theory] (M.: Nauka, 1972), 575.

[23] Nikolis G., Prigozhin I. *Samoorganizatsiya v neravnovesnyih sistemah* [Self-organization in nonequilibrium systems] (M.: Mir, 1979), 245.

[24] Romanovskiy Yu.M., Stepanova N.V., Chernavskiy D.S. *Matematicheskaya biofizika* [Mathematical Biophysics] (M.: Nauka, 1984), 290.

[25] Rubin A.B. *Termodinamika biologicheskih protsessov* [Thermodynamics of biological processes] (Izd-vo MGU, 1984), 352.

[26] Semenov Yu. M., «O polnoy upravlyaemosti lineynyih neavtonomnyih sistem [On the complete controllability of linear nonautonomous systems]», *Differentsialnyie uravneniya* (2012) : 1263-1277.

[27] Varga Dzh. *Optimalnoe upravlenie differentsialnyimi i funktsionalnyimi uravneniyami* [Optimal control of differential and functional equations] (M.: Nauka, 1977), 585.

[28] Volterra V. *Matematicheskaya teoriya borbyi za suschestvovaniya* [The mathematical theory of the struggle for existence] (M.: Nauka, 1976), 320.

[29] Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on the control theory] (M.: Nauka, 1975), 502.