ГРНТИ 27.29.17

Дифференциальные системы при малых возмущениях

Алдибеков Т.М., д.ф.-м.н., и.о. профессора кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77011411069, E-mail: tamash59@mail.ru

Исследуется устойчивость, изменения и границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова линейной однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными, со стремящимися к нулю коэффициентами при малых возмущениях, в связи с обобщенными центральными и с обобщенными особыми показателями. Приведен пример неустойчивости обобщенных показателей Ляпунова, при малых возмущениях стремящейся к нулю. Определена точная верхняя граница изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы при малых возмущениях в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений применением верхнего обобщенного центрального показателя. Определена точная нижняя границы изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы при малых возмущениях в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений применением обобщенного нижнего центрального показателя. Определена верхняя граница изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы при малых возмущениях в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений использованием верхнего обобщенного особого показателя. Определена нижняя граница изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы при малых возмущениях в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений использованием обобщенного нижнего особого показателя. Установлено взаимосоотношения обобщенных верхнего и нижнего центральных, обобщенных верхнего и нижнего особых показателей. Дано краткое описание обобщенных показателей Ляпунова, обобщенного верхнего и нижнего центральных показателей, обобщенного верхнего и нижнего особых показателей, как бэровские функций в определенном метрическом пространстве.

Ключевые слова: устойчивость показателей, линейные дифференциальные системы, малые возмущение дифференциальных систем, точные границы.

Differential systems under small perturbations

Aldibekov T.M., Dr.sci (Phys-math), acting professor of the chair of Differential equations and Control theory, al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazakhstan, +77017477069, E-mail: tamash59@mail.ru

The stability, changes and mobility bounds of generalized Lyapunov exponents of linear homogeneous systems of differential equations with continuous and tending to zero coefficients under small perturbations was studied with respect to the generalized central and generalized singular exponents. An example of the instability of generalized Lyapunov exponents, under small perturbations tends to zero was given. Using the generalized upper central exponents the exact upper limit of change of generalized Lyapunov exponents of linear systems under small perturbations was determined in a certain class of nonlinear systems of differential equations. Using the generalized lower central exponents the exact lower bounds of change of generalized Lyapunov exponents of linear systems under small perturbations was determined in a certain class of nonlinear systems of differential equations. Using a special upper generalized exponent the upper bounds of change of generalized Lyapunov exponents of linear systems under small perturbations was determined in a certain class of nonlinear systems of differential equations. Using the generalized lower special exponent the lower bounds of changes of generalized Lyapunov exponents of linear systems under small perturbations was determined in a certain class of nonlinear systems of differential equations. Mutual relations between generalized upper and lower central exponents, upper and lower generalized singular exponents was established. A brief description of the generalized Lyapunov exponents of the generalized upper and lower central exponents, generalized upper and lower singular exponents as Baire functions in a certain metric space was given.

Key words: linear differential systems, singular exponents, nonlinear differential systems, bound of the solutions

Аз әсер алған дифференциалдық жүйелер

Алдибеков Т.М., ф.-м.ғ.д., дифференциалдық теңдеулер және басқару теориясы кафедрасының профессор м.а., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77017477069, Электрондық пошта: tamash59@mail.ru

Коэффициенттері үзіліссіз, нөлге ұмтылатын сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесі аз әсер алған кездегі жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің орнықтылығы, өзгерісі және шекараларының қозғалысы жалпылама орталық және жалпылама ерекше көрсеткіштерменен байланыста зерттеледі. Нөлге ұмтылатын аз әсер алғанда жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің орнықсыздығын көрсететін мысал келтірілген. Жоғары жалпылама орталық көрсеткіштің қолдануымен сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің анықталған класында сызықты жүйенің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің аз әсер алғанда өзгерісінің дәл жоғары шекарасы анықталған. Төменгі жалпылама орталық көрсеткіштің қолдануымен сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің анықталған класында сызықты жүйенің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің аз әсер алғанда өзгерісінің дәл төменгі шекарасы анықталған. Жоғары жалпылама ерекше көрсеткішті пайдаланып сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің анықталған класында сызықты жүйенің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің аз әсер алғанда өзгерісінің жоғары шекарасы анықталған. Төменгі жалпылама ерекше көрсеткішті пайдаланып сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің анықталған класында сызықты жүйенің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің аз әсер алғанда өзгерісінің төменгі шекарасы анықталған. Жалпылама жоғарғы және төменгі орталық, жалпылама жоғарғы және төменгі ерекше көрсеткіштердің өзара қатынастары орнатылған. Анықталған метрикалық кеңістікте жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің, жалпылама жоғарғы және төменгі орталық көрсеткіштердің, жалпылама жоғарғы және төменгі ерекше көрсеткіштердің бэр функциялары ретінде қысқаша сипаттамасы берілген.

Түйін сөздер: көрсеткіштердің орнықтылығы, сызықты дифференциалдық жүйе, дифференциалдық жүйенің аз әсерлері, дәл шекаралар.

1 Введение

Асимптотические характеристики решений невозмущенной системы считаются устойчивыми, если малые в каком-либо смысле возмущения вызывают малые изменения асимптотических характеристик. Верхнее и нижнее обобщенные центральные показатели, верхнее и нижнее особые показатели линейных систем дифференциальных уравнений являются устойчивыми характеристиками. Верхний обобщенный показатель Ляпунова является устойчивой в классе обобщенных правильных линейных систем дифференциальных уравнений. Вообще говоря, обобщенные показатели Ляпунова неустойчивы при малых возмущениях. В связи с этим рассматриваются следующие задачи. Определить верхние границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова по отношению обобщенных центральных показателей при малых возмущениях. Определить нижние границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова по отношению обобщенных центральных показателей при малых возмущениях. Определить верхние границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова по отношению обобщенных особых показателей при малых возмущениях. Определить нижние границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова по отношению обобщенных особых показателей при малых возмущениях. Дать описание для введенных асимптотических характеристик относительно бэровской классификации.

2 Обзор литературы

Асимптотическое поведение, устойчивость и другие свойства решений, в том числе возмущенные системы исследовались многими авторами. Поэтому не претендуя на полноту отметим следующие работы: (Coddington, 1955), (Levinson, 1949 : 40-45), (Bellman, 1947 : 357-386), (Bihari, 1956 : 71-94), (Massera, 1949 : 705-721), (Conti, 1957 : 588-592), (Atkinson, 1958 : 690-708), (Diliberto, 1956 : 207-236), (Hartman, 1955 : 692-724). Понятие устойчивости показателей возникло в работе (Perron, 1930 : 703-728), где установлена, что показатели Ляпунова могут быть неустойчивыми. Верхняя и нижняя граница изменения показателей Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и ограниченными коэффициентами найдены в (Виноград, 1957 : 459-461) и доказана неулучшаемость этих границ в случае треугольных систем линейных систем дифференциальных уравнений. Точность этих границ в общем случае доказана в (Миллионщиков, 1969a : 1775-1784), (Миллионщиков, 1969б : 99-104), (Миллионщиков, 1968). В (Миллионщиков, 1983a : 196-220), (Миллионщиков, 1983б : 1344-1356) показатели Ляпунова и центральные показатели рассматриваются в более общих структурах, в частности дается описание, как бэровские функций на базе векторного расслоения семейства морфизмов и выясняют, что разрушение относительно некоторых свойств показателей в смысле категорий Бэра нетипично.

3 Материал и методы

3.1 Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

$$t \in I \equiv [t_0, +\infty), A(t) \in C(I), |A(t)\| \leq C_A\varphi(t),$$

$$C_A > 0, \varphi(t) > 0, \varphi(t) \in C(I), \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0, \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(s)ds = +\infty.$$

Определяем функцию q(t) по формуле: $q(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds$. Приведем пример неустойчивости обобщенных показателей Ляпунова, при малых возмущениях стремящейся к нулю. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{7}{104\sqrt{t}}x_1 \\ \dot{x}_2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\ln t + \frac{1}{\sqrt{t}}\cos\ln t - \frac{7}{52\sqrt{t}}\right)x_2 \end{cases}$$

Эта линейная система имеет отрицательные обобщенные показатели относительно $q(t) = \sqrt{t}$, т.е., система асимптотически устойчива. Если мы добавим к системе малое возмущение вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{t}e^{-\frac{7}{52\sqrt{t}}} & 0 \end{pmatrix}$$

то возмущенная система уже имеет неограниченное решение:

$$\widetilde{x_1} = e^{-\frac{7}{52\sqrt{t}}},\ \widetilde{x_2} = 2e^{\sqrt{t}\sin\ln t - \frac{7\sqrt{t}}{26}} \int \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}\sin\ln t} dt$$

и это решение имеет положительный обобщенный показатель Ляпунова. Таким образом, обобщенные показатели Ляпунова данной линейной системы разнятся, т.е., неустойчивы.

Пусть

$$\lambda_k\left(A, q\right),\ k = 1, 2, ..., n.$$

обобщенные показатели Ляпунова линейной системы (1). Вводим следующий класс векторных функций f(t,x) удовлетворяющих условиям:

$$f(t, x) \in C^{(0,1)}_{(t,x)},\ G = I \times \mathbb{R}^n, f(t, 0) = 0$$

$$|f(t, x)| < \delta(t)|x|,\ \delta(t) \in C\left(I\right),\ \delta(t) > 0, \lim_{t\to+\infty} \frac{\delta(t)}{\varphi(t)} = 0$$

обозначим $L_\delta(\varphi)$. Исследуется изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1) при возмущениях из класса $L_\delta(\varphi)$. Рассматривается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \tag{2}$$

где$f(t, x) \in L_\delta(\varphi)$.

Чтобы найти границы изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1) при малых возмущениях, мы используем разработанные в работах (Aldibekov, 2015 : 39), (Алдибеков, 2015 : 33-41), (Алдибеков, 2016а : 47-54), (Алдибеков, 2016б), (Алдибеков, 2016в : 46-54), устойчивые асимптотические характеристики линейной системы (1): $\omega_0(A, q)$, $\omega(A, q)$,
$\Omega(A, q)$, $\Omega_0(A, q)$. Пусть

$$\Omega(A, q) = \inf_{R\in B(A,q)} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} R_q(\tau)d\tau$$

обобщенный верхний центральный показатель линейной системы (1).

Теорема 1. Обобщенный верхний центральный показатель является верхней границей обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1)

$$\lambda_k\left(A, q\right) \le \Omega\left(A, q\right), k = 1, 2, \ldots n,$$

причем эта верхняя граница обобщенных показателей Ляпунова точная в классе $L_\delta(\varphi)$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ненулевого решения x(t) линейной системы (1), из определения верхнего обобщенного центрального показателя имеем оценку

$$|x(t)| \le D_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon)(q(t)-q(t_0))}$$

Следовательно, используя определение верхнего обобщенного показателя Ляпунова, если отсюда перейдем к верхнему пределу, то вытекает оценка

$$\chi[x,q] \leq \Omega\left(A,q\right) + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим $\chi[x,q] \leq \Omega\left(A,q\right)$ поэтому имеем оценку

$$\lambda_k\left(A,q\right) \leq \Omega\left(A,q\right), k = 1,2,\ldots n,$$

В классе $L_\delta(\varphi)$ обобщенный верхний центральный показатель линейной системы (1) устойчив вверх, следовательно, это оценка сохраняется при малых возмущениях из этого класса. Достижимость докажем методом поворотов. Для определенности возьмем ненулевое решение x(t) линейной системы (1) с начальным значением $x(t_0) = x_0$, которое определяет старший обобщенный показатель Ляпунова и пусть имеет место неравенство $\chi[x,q] \leq \Omega\left(A,q\right)$. Построим возмущенную систему в классе $L_\delta(\varphi)$. Для любого $\varepsilon > 0$ зафиксируем $T > 0$ такое, что

$$e^{\frac{\varepsilon}{2}q(T)} sin^2\varepsilon \geq 1, \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{q(mT)} \sum_{i=1}^{m-1} ln\left|(X_A(i+1)T, iT)\right| \geq \Omega\left(A,q\right) - \varepsilon \tag{3}$$

Пусть на отрезке $T_1 < t < T_2, T_1 > T$ выполняется неравенство

$$\frac{|\widetilde{x}(T_2)|}{|\widetilde{x}(T_1)|} \div \frac{|x(T_2)|}{|x(T_1)|} \geq e^{\frac{\varepsilon}{2}[q(T_2)-q(T_1)]} \tag{4}$$

Строим возмущение $B_\varepsilon(t)$ следующим образом. На отрезке $[t_0, T_1]$ полагаем $B_\varepsilon(t) = 0$. На отрезке $T_1 < t < T_2$ положим $B_\varepsilon(t) = U_\varepsilon^{-1}(t)A(t)U_\varepsilon(t) - U_\varepsilon^{-1}(t)\dot{U}_\varepsilon(t) - A(t)$ где $U_\varepsilon(t)$ ортогональная матрица в преобразовании

$$x(t) = U_\varepsilon(t)\bar{x}(t)$$

Возмущенная система на отрезке $[t_0, T_2]$ имеет вид

$$\dot{\bar{x}}(t) = \left(A(t) + B_\varepsilon(t)\right)\bar{x}(t) \tag{5}$$

Пусть на промежутке $(T_2, +\infty)$ имеется отрезок $T_3 < t < T_4$, где для некоторого решение возмущенной системы (5), выполняется аналогичное неравенство (4). Тогда аналогично строим возмущение $B_\varepsilon(t)$ исходя из системы (5). Если таких промежутков нет, то возмущение полагаем равным нулю. Таким образом, построенная возмущенная система в силу (3) имеет обобщенный показатель Ляпунова

$$\lambda(A + B_\varepsilon) > \Omega(A,q) - \varepsilon$$

следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ возмущенная система имеет решение с тем же начальным условием $x(t_0) = x_0$, обобщенный показатель Ляпунова которого равен обобщенному верхнему центральному показателю линейной системы (1). Следовательно, оценка точная. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если имеет место равенство $\lambda_1(A,q) = \Omega(A,q)$, где $\lambda_1(A,q)$ - старший

обобщенный показатель Ляпунова линейной системы (1), то старший обобщенный показатель Ляпунова устойчива вверх при малых возмущениях из класса $L_\delta(\varphi)$.
Следствие 2. Если $\lambda_1(A,q) < 0$ и $\lambda_1(A,q) = \Omega(A,q)$, где $\lambda_1(A,q)$ - старший обобщенный показатель Ляпунова линейной системы (1), то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Имеет место более сильное утверждение.
Следствие 3. Если $\lambda_1(A,q) < 0$ и $\lambda_1(A,q) = \Omega(A,q)$, то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) слабо экспоненциально устойчиво относительно q.
3.2 Пусть

$$\omega(A,q) = \sup_{R\in H(A,q)} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} r_q(\tau)d\tau$$

–обобщенный нижний центральный показатель линейной системы (1) относительно q.
Теорема 2. Имеет место неравенство

$$\omega\left(A,q\right) \leq \lambda_k\left(A,q\right), k = 1,2,\ldots n,$$

т.е., обобщенный нижний центральный показатель является нижней границей обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1). Кроме того эта нижняя граница обобщенных показателей Ляпунова в классе $L_\delta(\varphi)$ является точным.
Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ненулевого решения x(t) линейной системы (1), из определения нижнего обобщенного центрального показателя имеем оценку

$$d_\varepsilon|x(t_0)|e^{(\omega(A,q)-\varepsilon)(q(t)-q(t_0))} \leq |x(t)|$$

Следовательно, используя определение верхнего обобщенного показателя Ляпунова, если отсюда перейдем к верхнему пределу, то вытекает оценка

$$\omega\left(A,q\right) - \varepsilon \leq \chi[x,q]$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ получим

$$\omega\left(A,q\right) \leq \chi[x,q].$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\omega_0\left(A,q\right) \leq \lambda_k\left(A,q\right), k = 1,2,\ldots n,$$

Чтобы показать, что эта нижняя граница обобщенных показателей Ляпунова в классе $L_\delta(\varphi)$ является точным, переходим к сопряженной системе дифференциальных уравнений. Тогда нижний класс обобщенных нижних функций линейной системы (1) переходит в верхний класс обобщенных верхних функций сопряженной системы. Теперь как в теореме 1 построим возмущенную систему. По построению имеем достижимую обобщенную верхнюю функция, тогда сопряженная функция с отрицательным знаком является достижимой обобщенной нижней функцией. Следовательно, будем иметь решение возмущенной системы с обобщенным показателем Ляпунова совпадающим с нижним обобщенным центральным показателем. Теорема 2 доказана.

Следствие 4. Обобщенный показатель Ляпунова $\chi[x,q]$ любого ненулевого решения x(t) нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) относительно q, где $f(t,x) \in L_\delta(\varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega\left(A,q\right) \leq \chi\left(x,q\right) \leq \Omega\left(A,q\right), k=1,2,\ldots n,$$

где $\omega(A,q), \Omega(A,q)$ соответственно обобщенное нижнее и обобщенное верхнее центральные показатели линейной системы (1).
Пусть

$$\Omega_0\left(A,q\right) = \inf_{N_q \in B_0(A,q)} N_q$$

обобщенный верхний особый показатель относительно q системы (1).
Теорема 3. Обобщенный верхний особый показатель является верхней границей обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1)

$$\lambda_k\left(A,q\right) \leq \Omega_0\left(A,q\right), k=1,2,\ldots n,$$

причем эта оценка сохраняется при малых возмущениях в классе $L_\delta(\varphi)$.
Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ненулевого решения x(t) линейной системы (1), из определения верхнего обобщенного особого показателя имеем оценку

$$|x(t)| \leq D_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\Omega_0(A,q)+\varepsilon)(q(t)-q(t_0))}.$$

Следовательно, используя определение верхнего обобщенного показателя Ляпунова, если отсюда перейдем к верхнему пределу, то вытекает оценка

$$\chi[x,q] \leq \Omega_0\left(A,q\right) + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим $\chi[x,q] \leq \Omega_0\left(A,q\right)$ поэтому имеем оценку

$$\lambda_k\left(A,q\right) \leq \Omega_0\left(A,q\right), k=1,2,\ldots n,$$

Теперь в силу того, что обобщенный верхний особый показатель устойчив вверх в классе $L_\delta(\varphi)$ имеем, что оценка сохраняется при малых возмущениях в классе $L_\delta(\varphi)$. Теорема 3 доказана.
Пусть

$$\omega_0\left(A,q\right) = \sup_{n_q \in B_0(A,q)} n_q$$

–обобщенный нижний особый показатель относительно q системы (1).
Теорема 4. Обобщенный нижний особый показатель является нижней границей обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1)

$$\omega_0\left(A,q\right) \leq \lambda_k\left(A,q\right) k=1,2,\ldots n,$$

причем эта оценка сохраняется при малых возмущениях из классе $L_\delta(\varphi)$. Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ненулевого решения x(t) линейной системы (1), из определения верхнего обобщенного особого показателя имеем оценку

$$d_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\omega_0(A,q)-\varepsilon)(q(t)-q(t_0))} \leq |x(t)|$$

Следовательно, используя определение верхнего обобщенного показателя Ляпунова, если отсюда перейдем к верхнему пределу, то вытекает оценка

$$\omega_0\left(A,q\right)-\varepsilon\leq\chi[x,q]$$

Устремляя $\varepsilon\to 0$ получим

$$\omega\left(A,q\right)\leq\chi[x,q].$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\omega_0\left(A,q\right)\leq\lambda_k\left(A,q\right),k=1,2,\ldots n,$$

Теперь в силу того, что обобщенный нижний особый показатель устойчив вниз в классе $L_\delta(\varphi)$, вытекает, что оценка сохраняется при малых возмущениях в классе $L_\delta(\varphi)$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Имеет место следующие неравенства

$$\omega_0\left(A,q\right)\leq\omega\left(A,q\right),\Omega\left(A,q\right)\leq\Omega_0\left(A,q\right)$$

Доказательство. Так как $H_0(A,q)$ множество обобщенных нижних постоянных относительно q содержится в множестве обобщенных нижних функций, то из определения обобщенного нижнего особого показателя и обобщенного нижнего центрального показателя линейной системы (1), следует первое неравенство. Так как $B_0(A,q)$ множество обобщенных верхних постоянных относительно q содержится в множестве обобщенных верхних функций линейной системы (2), то из определения обобщенного верхнего особого показателя и обобщенного верхнего центрального показателя линейной системы (1) вытекает второе неравенство. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Обобщенный показатель Ляпунова $\chi[x,q]$ любого ненулевого решения x(t) нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) относительно q, где $f(t,x)\in L_\delta(\varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_0\left(A,q\right)\leq\chi[x,q]\leq\Omega_0\left(A,q\right)$$

где $\omega_0(A,q),\Omega_0(A,q)$- соответственно обобщенное нижнее и обобщенное верхнее особые показатели линейной системы (1).

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 5. Теорема 6 доказана. Сегмент $[\omega_0(A,q),\Omega_0(A,q)]$ является более широкое граница подвижности обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1). Отметим, что эти границы являются в некоторых случаях тоже достижимы при малых возмущениях. В этих случаях они являются точными границами подвижности обобщенных показателей Ляпунова. Имеются классы дифференциальных систем, где: 1)$\Omega_0(A,q)=\Omega(A,q)$, 2) $\omega_0(A,q)=\omega(A,q)$, 3) имеет место одновременно 1) и 2).

3.3 Множество линейных однородных систем дифференциальных уравнений удовлетворяющих условиям линейной системы (1) превратим в метрическое пространство $M_I^n(\varphi)$, введя метрику:

$$\rho\left(A,B\right)=sup_I\frac{\|A(t)-B(t)\|}{\varphi(t)}$$

Отметим, на этом метрическом пространстве: $\lambda_k(A,q), k=1,2,\ldots,n;$ - обобщенные показатели Ляпунова линейной системы (1) являются бэровскими функциями второго класса. Следующие асимптотические характеристики линейной системы (1): $\omega_0(A,q)$- обобщенное нижнее особый показатель, $\omega(A,q)$ - обобщенное нижнее центральный показатель, $\Omega(A,q)$ - обобщенное верхнее центральный показатель, $\Omega_0(A,q)$- обобщенное верхнее особый показатель являются бэровскими функциями первого класса. Из бэровской теории следует, что множество точек непрерывности всех этих функционалов в метрическом пространстве $M_I^n(\varphi)$ образует всюду плотное множество G_δ.

4 Результаты и обсуждение

Определены верхние границы подвижности обобщенных показателей по отношению обобщенных центральных показателей при малых возмущениях. Определены нижние границы подвижности обобщенных показателей по отношению обобщенных центральных показателей при малых возмущениях. Определены верхние границы подвижности обобщенных показателей по отношению обобщенных особых показателей при малых возмущениях. Определены нижние границы подвижности обобщенных показателей по отношению обобщенных особых показателей при малых возмущениях. Дано описание для введенных асимптотических характеристик относительно бэровской классификации. В исследовании наряду общими методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, используются методы асимптотической теории дифференциальных систем, методы теории характеристических показателей линейных дифференциальных систем и методы теории функций. Рассмотренные характеристики дифференциальных систем имеют большое теоретическое и прикладное значения. Приведены история рассматриваемых вопросов и связанные с ними литературы (Atkinson, 1958 : 690-708), (Bellman, 1947 : 357-386), (Bihari, 1956 : 71-94), (Виноград, 1957 : 459-461), (Diliberto, 1956 : 207-236), (Coddington, 1955), (Conti, 1957 : 588-592), (Levinson, 1949 : 40-45), (Massera, 1949 : 705-721), (Миллионщиков, 1969а : 1775-1784), (Миллионщиков, 1968), (Миллионщиков, 1969б : 99-104), (Миллионщиков, 1983а : 196-220), (Миллионщиков, 1983б : 1344-1356), (Perron, 1930 : 703-728), (Hartman, 1955 : 692-724).

5 Заключение

Точной верхней границей подвижности обобщенных показателей при малых возмущениях дифференциальной системы является верхнее обобщенное центральный показатель. Точной нижней границей подвижности обобщенных показателей при малых возмущениях дифференциальной системы является нижнее обобщенное центральный показатель. Доказано, что верхнее обобщенное особое показатель оценивает сверху обобщенных показателей, а нижнее обобщенное особое показатель оценивает снизу обобщенных показателей при малых возмущених дифференциальной системы. Дано описание обобщенных показателей, обобщенных центральных показателей и обобщенных особых показателей относительно бэровской классификации.

6 Благодарность

Работа выполнена при поддержке PhD Алдажаровой М.М.

Список литературы

[1] *Aldibekov T., Moldabek Zh.* Some characteristics of the differential system //International conference on Advancement in Mathematical Sciences. Antalya, Turkey. – 2015. – P. 39.

[2] *Atkinson F.V.* On stability and asymptotic equilibrium. Ann. Math. – 1958. – Vol. 68, № 3. –P. 690-708.

[3] *Bellman R.* On the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations (6, 8) Trans. Amer. Math. Soc. –1947. – Vol. 62. – P. 357-386.

[4] *Bihari I.*A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations (3, 6), Acta Math. Acad Sci. Hung. – 1956. – Vol. 7. – P. 71-94.

[5] *Coddington E.A. and Levinson N.* Theory of differential equations. McGraw-Hill. – 1955. – P. 429.

[6] *Conti R.* Systemi differenziali asintoticamente equivalent. Rend. Lincel. – 1957. – ser. VIII. – Vol. 22, № 5. –P. 588-592.

[7] *Diliberto S.P. and Hufford G.* Perturbation theorems for non-linear ordinary differential equations. Ann. Math. Studies. – 1956. – Vol. 8, № 36. – P. 207-236.

[8] *Hartman P., Wintner A.* Asymptotic integrations of ordinary nonlinear differential equations, ibid. – 1955. – Vol. 77 [VIII.3; X.4, 8, 11, 13]. – P. 692-724 .

[9] *Levinson N.* On stability of nonlinear systems of differential equations. Colloq. Math. – 1949. – Vol. 6, No. 2. – P. 40–45.

[10] *Massera J.L.* On Lyapunov's conditions of stability (6, 7). Ann. Math. – 1949. – Vol. 2, No. 50. – P. 705-721.

[11] *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. – 1930. – No. 32. – P. 703-728.

[12] *Алдибеков Т.М., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М.* Об устойчивых асимптотических характеристиках дифференциальных систем // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2015. – № 2(85). –С. 33-41.

[13] *Алдибеков Т.М., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М., Молдабек Ж.Т.* Обобщенные особые показатели линейной системы дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2016. – №1(88). – С. 47-54.

[14] *Алдибеков Т.М.* Об оценках решений дифференциальных систем/ Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики и информатики посвященная 25–летию Независимости Республики Казахстан. Караганда, 9–10 декабря 2016 г.

[15] *Алдибеков Т.М., Молдабек Ж.Т.* О равномерной оценке снизу решений нелинейной системы дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2016. – №4 (92). – С. 46-54

[16] *Виноград Р.Э.* Оценка скачка характеристического показателя при малых возмущениях // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 3. – С. 459-461.

[17] *Миллионщиков В.М.* Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1775-1784.

[18] *Миллионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1968. – Т. 23, № 1. – С. 213.

[19] *Миллионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем дифференциальных уравнений // Сиб. математический журнал. – 1969. – Т. 10, № 1. – С. 99-104.

[20] *Миллионщиков В.М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. XII // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 2. – С. 196-220.

[21] *Миллионщиков В.М.* О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости I // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 8. – С. 1344-1356.

References

[1] *Aldibekov T., Moldabek Z.T.* "Some characteristics of the differential system". Int.conf. on Advancement in Math. Sciences, Antalya, Turkey (2015) : 39.

[2] *Atkinson F.V.* "On stability and asymptotic equilibrium". Ann. Math., vol. 68 (1958) : 690-708.

[3] *Bellman R.* "On the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations (6, 8)'". Trans. Amer. Math. Soc., vol 62 (1947) : 357-386.

[4] *Bihari I.* "A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations (3, 6)". Acta Math. Acad Sci. Hung., vol 7 (1956) : 71-94.

[5] *Coddington E.A. and Levinson N.* Theory of differential equations (McGraw-Hill, 1955), 149

[6] *Conti R.* "Systemi differenziali asintoticamente equivalent'". Rend. Lincel., Ser. VIII, vol. 22, No 5 (1957) : 588-592.

[7] *Diliberto S.P. and Hufford G.* "Perturbation theorems for non-linear ordinary differential equations". Ann. Math. Studies, Vol. 8 (1956) : 207-236.

[8] *Hartman P., Wintner A.* "Asymptotic integrations of ordinary nonlinear differential equations". IBID, vol. 77 [VIII.3; X.4, 8, 11, 13] (1955) : 692-724

[9] *Levinson N.* "On stability of nonlinear systems of differential equations". Colloq. Math., vol. 6 (1949) : 40-45.

[10] *Massera J.L.* "On Lyapunov's conditions of stability (6, 7)". Ann. Math., vol. 2 (1949) : 705-721.

[11] *O. Perron.* "Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen". Math. Z., vol. 32 (1930) : 703-728.

[12] *Aldibekov T.M., Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M.* "Ob ustoichivyh asimptoticheskih harakteristikah differentsialnyh sistem. [Stable asymptotical characteristics of differential systems]"Bulletin of KazNU. Math., Mech., Inf. Series, vol. 2 (2015) : 33-41.

[13] *Aldibekov T.M.* "Obobshiennye osobye pokazateli lineinyh sistem differentsialnyh uravnenii. [Generalized special performance linear system of differential equations]". Bulletin of KazNU. Math., Mech., Inf. Series, vol. 1 (2016) : 47-54.

[14] *Aldibekov T.M.* "Ob ocenkah reshenii differentsialnyh sistem. [Estimates of solutions of differential systems]". International scientific conference "Modern problems of Mathematics, Mechanics and Informatics"dedicated to the 25th anniversary of Independence of the Republic of Kazakhstan. Karaganda, December 9-10, 2016.

[15] *Aldibekov T.M., Moldabek Z.T, Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M.* "O ravnomenoi otsenke snizu dlya reshenii nelineinyh sistem differentsialnyh uravnenii [The uniform lower bound for solutions of nonlinear system of differential equations]". Bulletin of KazNU. Math., Mech., Inf. Series, vol. 4 (2016) : 46-54

[16] *Vinograd R.E.* "Otsenka skachka pri malyh vozmusheniyah [Bounds of the jump function on small perturbations]". Doklady AN SSR, vol. 114 (1957) : 459-461.

[17] *Millionschikov V.M.* "Grubye svoistva differentcialnyh uravnenii[Rough haracters of differential equations]". *Diff. uravn*, vol. 5 (1969) : 1775-1784.

[18] *Millionschikov V.M.* "Dokazatelstva dostizhimosti tsentralnyh pokazatelei lineinyh sistem diff. ur. [Proof of the approachability of cental exponents]". Uspehi mat. nauk, vol. 23 (1968).

[19] *Millionschikov V.M.* "Dokazatelstva dostizhimosti tsentralnyh pokazatelei lineinyh sistem diff. ur. [Proof of the approachability of cental exponents]".Sib.mat.jur., vol. 10 (1969) : 99-104.

[20] *Millionschikov V.M.* "Berovskie klassy funktsii i pokazateli Lyapunova. XII [Baire classes of functions and Lyapunov exponents. XII]". Diff.uravn., vol. 19 (1983) : 196-220.

[21] *Millionschikov V.M.* "O tipichnyh svoistvah uslovnoi eksponentsialnoi ustoichivosti [Typical parameters of conditional stability]". Diff.uravn., vol. 19 (1983) : 1344-1356.