УДК 517.927.6

Б.Е. Кангужин, Н.Е. Токмагамбетов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru, niyaz.tokmagambetov@gmail.com

Теорема единственности граничных обратных задач дифференциальных операторов на отрезке *

В данной работе рассматриваются граничные обратные задачи спектрал ьного анализа дифференциальных операторов высших порядков с интегро-дифференциа льными краевыми условиями в функциональном пространстве $L_2(0,b)$. Доказана теорема единственности граничной обратной задачи в функциональном простр анстве $L_2(0,b)$. Обратная задача спектрального анализа оператора — это проблема восста новления оператора по его спектру и некоторым дополнительным данным. Обычно в кач естве дополнительных спектральных данных берут спектральную функцию исхо дного оператора, как это происходило в известной работе Израиля Моисеевича Г ельфанда и Бориса Моисеевича Левитана. В других случаях в качестве дополнительных д анных выступают спектры некоторых родственных операторов. Подобный подход м ожно наблюдать в работе Леонида Самуиловича Лейбензона и Вячеслава Анато льевича Юрко. В работах Владимира Александровича Марченко дополнительн ые спектральные данные — это данные рассеяния.
Ключевые слова: граничная обратная задача, теорема единственности, обыкновенный дифференциальный оператор, интегро — дифференциальное краевое усл овие.

B.E. Kanguzhin, N.E. Tokmagambetov
Uniqueness theorem of boundary inverse problems of differential operators on an interval

In this paper we consider a boundary inverse problem of spectral anal ysis of higher order differential operators with integro differential boundary condition s in the functional space $L_2(0,b)$. We prove a uniqueness theorem of the inverse boundary problem in th e functional space $L_2(0,b)$. The inverse problem of spectral analysis of the operator is the pro blem of recovering by its spectrum and some additional data. Typically, as additional spectral data of the spectral function takes the source operator, as it happen ed in the famous work of Israel Moiseevich Gelfand and Boris Moiseevich Levitan. In oth er cases serve as additional data spectra some related operators. Such an approach can be seen in the work of Leonid Shneiderman Leibenson and Viacheslav Anatol'evich Yurko . In the works of Vladimir Aleksandrovich Marchenko more spectral data is the scat tering data.
Key words: boundary inverse problem, uniqueness theorem, ordinary differenti al operator, integro — differential boundary condition.

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант [№ 2217 / ГФ3.]

Б.Е. Қанғожин, Н.Е. Тоқмағамбетов

Кесіндідегі дифференциалдық операторлардың шекаралық кері есептерінің жалғыздық теоремасы

Бұл жұмыста $L_2(0, b)$ функционалдық кеңістігінде жоғарғы ретті интегро–дифференциалдық шекаралық шарттарымен болған дифференциалдық операторларының спектралды анализінің кері есептері қарастырылды. $L_2(0, b)$ функционалдық кеңістігінде шекаралық кері есептерінің жалғыздық теоремасы дәлелденді. Спектралды ан ализдің кері есебі ол операторды спектр мен қосымша деректер арқылы қайта құру . Әдетте, спектралдық дерек ретінде Израиль Моисеевич Гельфанд пен Борис Моисе — евич Левитанның жұмыстарындағыдай алғашқы оператордың спектралдық функ циясы алынады. Басқа жағдайларда қосымша дерек ретінде туысқан операторлар дың спектрі болады. Осындай жағдайды Леонид Самуилович Лейбензон мен Вячеслав Анатольевич Юрконың жұмыстарынан аңғаруға болады. Ал Владимир Алек сандрович Марченконың жұмысында спектралдық қосымша дерек ретінде таралу деректер і алынған.

Түйін сөздер: шекаралық кері есеп, жалғыздық теоремасы, қарапайым дифференциалдық оператор, интегро — дифференциалдық шекаралық шарт.

Введение

Обратная задача спектрального анализа оператора – это проб лема восстановления оператора по его спектру и некоторым дополнительным данным. Обычно, в качестве дополнительных спектральных данных берут спектральную функцию исходного оператора, как это происходило в известной работе И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [1]. В других случаях в качестве дополнительных данных выступают спектры некоторых родственных операторов. Подобный подход можно наблюдать в работе Л.С. Лейбензона [2] и В.А. Юрко [3]. В работах В.А. Марченко [4] дополнительные спектральные данные – это данные рассеяния.

Отметим, что дифференциальные операторы на отрезке в зависи мости от вида краевых условий делятся на операторы с локальными или нелокальными граничными условиями. К примеру, стандартные условия Дирихле, Неймана относятся к локальным граничным условиям, в то же время периодические граничные условия являются нелокальными. В монографии [4] локальные граничные условия называются распадающимися, а нелокальные двухточечные краевые условия – нераспадающимися граничными условиями. Как известно, операторы с распадающимися граничными условиями гораздо легче восстановить по спектральным данным. Менее развиты методы вос становления дифференциальных операторов с нераспадающимися граничными условиями. Восстановление дифференциальных операторов второго порядка с нераспад ающимися граничными условиями можно найти в работах В.А. Садовничего и его учеников [5, 6, 7, 8]. Обратные задачи спектрального анализа дифференциальных операторов высших порядков с нераспадающимися граничными условиями приведены в работе [9].

В данной работе рассматриваются обратные задачи спектральн ого анализа дифференциальных операторов высших порядков с интегро-дифференциальными краевыми условиями. В этом случае по спектральным данным необходимо находить не только коэффициенты дифференциального выражения, но и функции, входящие в интегро-дифференциальные краевые условия. Коэффициентные обратные задачи достаточно хорошо исследованы, поэтому в предлагаемой работе изучается вопрос восстановления граничных функций.

Теперь перейдем к аккуратной постановке граничной обратной задачи спектрального анализа дифференциального оператора на отрезке. Для этого вначале необходимо рассмотреть прямые задачи спектрального анализа оператора.

Прямая задача

Пусть $b < \infty$ и в пространстве $\mathrm{L}_2(0,b)$ задан оператор $\mathcal{L}$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}(x), \ \ 0 < x < b \tag{1}$$

с гладкими коэффициентами

$$p_k \in C^k[0,b], \ \ k = 0, 1, ..., n-1,$$

и краевыми условиями

$$U_j(y) \equiv V_j(y) + \sum_{s=0}^{k_j} \int\limits_0^b y^{(s)}(t) \rho_{js}(t) dt = 0, \ \ j = 1, ..., n, \tag{2}$$

где

$$V_j(y) \equiv \alpha_j y^{(k_j)}(0) + \beta_j y^{(k_j)}(b),$$

а α_j и β_j некоторые числа, $\rho_{js} \in \mathrm{L}_2(0,b)$.

Далее будем предполагать что краевые условия (2) нормированы и регулярны (усиленно–регулярны) по А.А. Шкаликову (см. [10]).

Тогда имеет место

Теорема 1 [10] *Собственные и присоединенные функции оператора $\mathcal{L}$ с регулярными (усиленно–регулярными) краевыми условиями (2) образуют базис Рисса со скобками (базис Рисса) в пространстве* $\mathrm{L}_2(0,b)$.

Заметим, что найдется такой набор функции $\{\sigma_i \in \mathrm{L}_2(0,b), \ \ i = 1, ..., n\}$ что краевые условия (2) будут эквивалентны условиям

$$U_j(y) \equiv V_j(y) + \int\limits_0^b l(y) \overline{\sigma_j(t)} dt = 0, \ \ j = 1, ..., n, \tag{3}$$

так как функционалы

$$\Phi_j(y^{(n)}) \equiv \sum_{s=0}^{k_j} \int\limits_0^b y^{(s)}(t) \rho_{js}(t) dt, \ \ j = 1, ..., n$$

непрерывны в $\mathrm{L}_2(0,b)$.

В дальнейшем функции $\sigma_1, ..., \sigma_n$ будут называться граничными функциями.

Рассмотрим спектральную задачу

$$l(y) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < b \tag{4}$$

с краевыми условиями (3).

Прямая задача спектрального анализа задачи (3)–(4) заключается в исследовании геометрии расположения собственных значений и вопросов полноты, минимальности и базисности в $\mathrm{L}_2(0,b)$ соответствующей системы собственных и присоединенных функций. Так как если система собственных и присоединенных функций задачи (3)–(4) базис Рисса со скобками (базис Рисса) в $\mathrm{L}_2(0,b)$, то (см. [11]) существует единственная биортогональная система к системе собственных и присоединенных функций, и она также образует базис Рисса со скобками (базис Рисса) в $\mathrm{L}_2(0,b)$.

Постановка граничной обратной задачи

В данной работе изучается частичная обратная задача в следующей постановке: пусть коэффициенты уравнения (4) известны. По спектральным данным требуется восстановить только граничные функции. Остается уточнить, что мы понимаем под спектральными данными. Итак, спектральные данные краевой задачи (3)–(4) – это спектры следующих краевых задач:

1-ая краевая задача.

$$l(y) = f(x), \;\; 0 < x < b,$$

$$V_1(y) - \int_0^b l(y)\overline{\sigma_1(x)}dx = 0,$$

$$V_j(y) = 0, \;\; j = 2, ..., n.$$

2-ая краевая задача.

$$l(y) = f(x), \;\; 0 < x < b,$$

$$V_j(y) - \int_0^b l(y)\overline{\sigma_j(x)}dx = 0, \;\; j = 1, 2,$$

$$V_j(y) = 0, \;\; j = 3, ..., n.$$

Далее аналогично определяется 3-я и так далее $(n-1)$–ая краевая задача. И, наконец, n–ая краевая задача совпадает с исходной краевой задачей (3)–(4). Основной результат работы заключается в том, что спектры указанных n краевых задач позволяет однозначно восстановить все n граничных функций. Более точная формулировка результата приведена ниже.

Необходимые формулировки и утверждения

Пусть $1 \leq k \leq n$. Введем функцию $\kappa_k(x,\lambda)$, которая удовлетворяет уравнению

$$l(\kappa_k) = \lambda\kappa_k(x,\lambda), \;\; 0 < x < b \tag{5}$$

и краевым условиям

$$V_j(\kappa_k) - \lambda \int\limits_0^b \kappa_k(x,\lambda)\overline{\sigma_j(x)}dx = 0, \;\; j = 1, ..., k-1, \tag{6}$$

$$V_k(\kappa_k) = \Delta_{k-1}(\lambda), \tag{7}$$

$$V_j(\kappa_k) = 0, \;\; j = k+1, ..., n, \tag{8}$$

где $\Delta_{k-1}(\lambda) = (-1)^{k-1}\Delta_0(\lambda) \cdot \det\Big(\mathrm{E}_{k-1}\Delta_0(\lambda) - \lambda\Big\| < \psi_j, \sigma_\nu >, j = 1, \ldots, k-1, \nu = 1, \ldots, k-1\Big\|\Big)$,

$$\kappa_k(x,\lambda) = \\ = \det\begin{pmatrix} \psi_1(x,\lambda) & \ldots & \psi_{k-1}(x,\lambda) & \psi_k(x,\lambda) \\ \Delta_0(\lambda) - \lambda < \psi_1, \sigma_1 > & \ldots & -\lambda < \psi_{k-1}, \sigma_1 > & -\lambda < \psi_k, \sigma_1 > \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\lambda < \psi_1, \sigma_{k-1} > & \ldots & \Delta_0(\lambda) - \lambda < \psi_{k-1}, \sigma_{k-1} > & -\lambda < \psi_k, \sigma_{k-1} > \end{pmatrix}, \tag{9}$$

E_k – единичная матрица $k \times k$ и $< \psi, \sigma >$ – скалярное произведение в $\mathrm{L}_2(0,b)$. Здесь $\psi_1(x,\lambda), \ldots, \psi_n(x,\lambda)$ – фундаментальная система решений уравнения $l(\psi) = \lambda\psi$, которая удовлетворяет условиям

$$V_j(\psi_k) = \delta_{kj}\Delta_0(\lambda), \;\; k, j = 1, ..., n,$$

$$\Delta_0(\lambda) = \det\Big(\|V_\nu(y_j); \nu, j = 1, ..., n\Big\|\Big),$$

$$\psi_k(x,\lambda) = (-1)^k \det\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda) \\ V_1(y_1) & V_1(y_2) & \ldots & V_1(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{k-1}(y_1) & V_{k-1}(y_2) & \ldots & V_{k-1}(y_n) \\ V_{k+1}(y_1) & V_{k+1}(y_2) & \ldots & V_{k+1}(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \ldots & V_n(y_n) \end{pmatrix},$$

где δ_{kj} – символ Кронекера, $y_1(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda)$ – фундаментальная система решений уравнения $l(y) = \lambda y$, которая удовлетворяет условиям

$$y_k^{(j-1)}(0) = \delta_{kj}, \;\; k, j = 1, ..., n.$$

Для проверки соотношения (9) достаточно проверить, что правая часть (9) удовлетворяет всем тем условиям, которым удовлетворяет решение $\kappa_k(x,\lambda)$.

Когда $k = n$, то условия (8) отсутствуют. Если $k = 1$, то отсутствуют условия (6).

Следствие 1 *$y_k(x,\lambda), \psi_k(x,\lambda), \kappa_k(x,\lambda), \;\; k = 1, 2, ..., n$ представляют целые функции от λ.*

Следствие 2 *При каждом k верны соотношения*

$$\kappa_1(x,\lambda)=\psi_1(x,\lambda), \quad \kappa_k(x,\lambda)=\psi_k(x,\lambda)-\sum_{s=1}^{k-1}c_{ks}\psi_s(x,\lambda), \;\; k\geq 2,$$

где c_{ks} не зависят от x.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

A) спектры всех краевых задач не пересекаются, то есть

$$|\Delta_k(\lambda)|^2+|\Delta_j(\lambda)|^2\neq 0$$

при любом $\lambda\in\mathbb{C}$ и $k\neq j$.

Обозначим нули функции $\Delta_k(\lambda)$ через $|\lambda_1^{(k)}|\leq|\lambda_2^{(k)}|\leq ...$, поскольку тождественно не равная нулю целая функция может иметь либо конечное число, либо счетное число нулей без конечных предельных точек. Целая функция $\Delta_0(\lambda)$ при $\lambda=0$ равна 1, поэтому удовлетворяет этому условию. Кратность собственного значения $\lambda_m^{(k)}$ обозначим через $\theta_m^{(k)}$, то есть

$$\begin{aligned} &\Delta_k^{(\nu)}(\lambda_m^{(k)})=0 \qquad \text{при } \nu=0,1,...,\theta_m^{(k)}-1,\\ &\Delta_k^{(\theta_m^{(k)})}(\lambda_m^{(k)})\neq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Нам удобно ввести также n систем функций. Пусть $1\leq k\leq n$. Тогда при каждом k введем систему функции

$$\begin{aligned} &u_{m,k}(x)=\kappa_k(x,\lambda_m^{(k)}), \;\; m\geq 1,\\ &u_{m+1,k}(x)=\frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\lambda}\kappa_k(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_m^{(k)}}, \;\; m\geq 1,\\ &\dots\dots\dots\dots,\\ &u_{m+\theta_m^{(k)}-1,k}(x)=\frac{1}{(\theta_m^{(k)}-1)!}\frac{\partial^{\theta_m^{(k)}-1}}{\partial\lambda^{\theta_m^{(k)}-1}}\kappa_k(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_m^{(k)}}, \;\; m\geq 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Из формулы (9) следует, что $\kappa_k(x,\lambda)$ зависят только от $\sigma_1,...,\sigma_{k-1}$. Поэтому система (11) полностью определена, если известны граничные функции $\sigma_1,...,\sigma_{k-1}$ и нули $\Delta_k(\lambda)$.

Утверждение 1 *При фиксированном допустимом k и m система функции* (11) *является цепочкой собственной и присоединенных функций соответствующих собственному значению $\lambda_m^{(k)}$, то есть $u_{m,k}(x)$ – собственная функция k-ой краевой задачи, а $u_{m+1,k}(x)$ и так далее – представляют присоединенные функции той же задачи.*

Доказательство утверждения 1. Заметим, что функция $\kappa_k(x,\lambda)$ является решением уравнения

$$l(\kappa_k(\cdot,\lambda))=\lambda\kappa_k(x,\lambda), \quad 0<x<b$$

и удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned}
&V_j(\kappa_k) - \int\limits_0^b l(\kappa_k)\overline{\sigma_j(x)}dx = 0, \;\; j = 1, ..., k-1,\\
&V_k(\kappa_k) - \int\limits_0^b l(\kappa_k)\overline{\sigma_k(x)}dx = \Delta_k(\lambda),\\
&V_j(\kappa_k) = 0, \;\; j = k+1, ..., n.
\end{aligned} \tag{12}$$

Учитывая соотношения (10) из (12) следует утверждение 1. К примеру, проверим утверждение 1 для $u_{m,k}(x)$. В соотношения (12) подставим $\lambda = \lambda_m^{(k)}$ и учтем первое соотношение из (10). Тогда

$$l(u_{m,k}) = \lambda_m^{(k)} u_{m,k}, \;\;\; 0 < x < b$$

$$V_j(u_{m,k}) - \int\limits_0^b l(u_{m,k})\overline{\sigma_j(x)}dx = 0, \;\; j = 1, ..., k,$$

$$V_j(u_{m,k}) = 0, \;\; j = k+1, ..., n.$$

Остальные соотношения для $u_{m+j,k}(x)$ проверяются аналогично. Только надо дифференцировать по λ соответствующее число раз, а затем вместо λ подставить $\lambda_m^{(k)}$.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 *Решение неоднородного уравнения*

$$l(y) = \lambda y(x) + f(x), \;\; 0 < x < b$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&V_j(y) - \int\limits_0^b l(y)\overline{\sigma_\nu(x)}dx = 0, \;\; \nu = 1, ..., k,\\
&V_j(y) = 0, \;\; \nu = k+1, ..., n
\end{aligned} \tag{13}$$

задается по формуле

$$y(x,\lambda) = \int\limits_0^b G_k(x,t,\lambda) f(t)dt, \tag{14}$$

где

$$G_k(x,t,\lambda) = (-1)^k \left(\prod_{s=1}^k \Delta_s(\lambda)\right)^{-1} \begin{vmatrix} \kappa_1(x,\lambda) & \kappa_2(x,\lambda) & \dots & \kappa_k(x,\lambda) & G_0(x,t,\lambda)\\ \Delta_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & U_1(G_0)\\ U_2(\kappa_1) & \Delta_2(\lambda) & \dots & 0 & U_2(G_0)\\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots\\ U_k(\kappa_1) & U_k(\kappa_2) & \dots & \Delta_k(\lambda) & U_k(G_0) \end{vmatrix},$$

$G_0(x, t, \lambda)$ – *функция Грина краевой задачи*

$$l(y) = \lambda y(x), \ \ 0 < x < b$$

с краевыми условиями

$$V_j(y) = 0, \ \ j = 1, ..., n.$$

Здесь $U_1(y), ..., U_k(y)$ – *формы из краевых условии (13).*

Доказательство утверждения 2. Утверждение 2 доказывается проверкой выполнения уравнения и краевых условий.

Следствие 3 *Из утверждения 2 следует, что функция Грина* $G_k(x, t, \lambda)$ *имеет представление*

$$G_k(x, t, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \kappa_i(x, \lambda) M_i(t, \lambda) + G_0(x, t, \lambda),$$

где определитель M_i *получается из* G_k *заменой его первой строки на строку*

$$(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0),$$

где единица на i*-том месте.*

Вычислим вычет функции Грина $G_k(x, t, \lambda)$ в особой точке $\lambda_m^{(k)}$. На самом деле, это связано с ядром интегрального проектора на корневое подпро странство соответствующее собственному значению $\lambda_m^{(k)}$. Справедливо равенство

$$res_{\lambda_m^{(k)}} G_k(x, t, \lambda) = res_{\lambda_m^{(k)}} (-1)^{k+1} \kappa_k(x, \lambda) M_k(t, \lambda), \tag{15}$$

так как по условию А) спектры рассматриваемых краевых задач не пересекаются и поэтому оставшиеся слагаемые имеют нулевые вычеты в точке $\lambda_m^{(k)}$. Действительно, функция $G_0(x, t, \lambda)$ – мероморфная по λ, но нет полюса в точке $\lambda_m^{(k)}$. Точно также доказывается, что мероморфная функция $M_i(t, \lambda)$ при $i < k$ регулярна в точке $\lambda_m^{(k)}$.

В результате из соотношения (15) с учетом равенств (11) имеем

$$res_{\lambda_m^{(k)}} G_k(x, t, \lambda) = \sum_{j=0}^{\theta_m^{(k)}-1} u_{m+j,k}(x) h_{m+\theta_m^{(k)}-1-j,k}(t),$$

где

$$h_{m+\theta_m^{(k)}-1-j,k}(t) = \frac{1}{(\theta_m^{(k)} - 1 - j)!} \lim_{\lambda \to \lambda_m^{(k)}} \frac{\partial^{\theta_m^{(k)}-1-j}}{\partial \lambda^{\theta_m^{(k)}-1-j}} \left[(\lambda - \lambda_m^{(k)})^{\theta_m^{(k)}-1} M_k(t, \lambda) \right]. \tag{16}$$

Утверждение 3 *Система функции* $\{h_{m+i,k}, \ \ i = 0, 1, ..., \theta_m^{(k)} - 1\}$ *биортогональна к системе функции* $\{u_{m+j,k}, \ \ j = 0, 1, ..., \theta_m^{(k)} - 1\}$ *в* $\mathrm{L}_2(0, b)$, *то есть*

$$< u_{m+j,k}, h_{m+\theta_m^{(k)}-1-s,k} >= \delta_{js},$$

где δ_{js} – *символ Кронекера.*

Доказательство утверждения 3 следует из одной теоремы М. Рисса о том, что проектор на корневое подпространство вычисляется как вычет резольвенты оператора. В нашем случае вместо резольвенты мы оперировали с функцией Грина $G_k(x,t,\lambda)$ соответствующей краевой задачи.

Утверждение 3 доказано.

Замечание 1 *В утверждении 3 биортогональность доказана для корневых функции из одного корневого подпространства. Если корневые подпространства соответствуют разным собственным значениям, то ортогональность таких корневых подпространств друг другу известна.*

Основной результат

В следующей теореме доказывается теорема единственности граничной обратной задачи.

Теорема 2 *Пусть заданы коэффициенты* $p_k(x) \in C^k[0,b],\ k = 0,1,...,n-1$. *Пусть заданы все собственные значения* $\{\lambda_m^{(k)}\}$ *краевой задачи (3)–(4). Кроме этого дополнительно задаются спектры еще* $(n-1)$ *краевых задач, которые вытекают из исходной (3)–(4) путем постепенного обнуления интегрального возмущения граничных условий. Тогда граничные функции из (3) восстанавливаются однозначно.*

Доказательство теоремы 2. Предлагается алгоритм восстановления граничных функций $\sigma_1,...,\sigma_n$.

Для начало, рассмотрим случай, когда собственные значения $\{\lambda_m^{(k)},\ m \geq 1\}$ однократные $(1 \leq k \leq n)$.

1-ый шаг. Восстановление σ_1 по спектру первой краевой задачи.

Пусть задана последовательность $\{\lambda_m^{(1)},\ m \geq 1\}$ собственных значений первой краевой задачи. Построим функцию $\kappa_1(x,\lambda)$ как решение следующей задачи Коши

$$l(\kappa_1) = \lambda\kappa_1(x,\lambda),\ \ 0 < x < b$$

с условием в нуле

$$V_1(\kappa_1) = \Delta_0(\lambda),\ V_j(\kappa_1) = 0,\ \ j = 2,...,n.$$

Такое решение существует при всех комплексных λ и, в частности, при $\lambda = \lambda_m^{(1)}$. Отсюда строится система собственных и присоединенных функций

$$\{u_{m,1}(x) = \kappa_1(x,\lambda_m^{(1)}),\ m \geq 1\}.$$

Из работ А.А. Шкаликова [8] и Н.К. Бари [9] следует, что эта система является базисом Рисса со скобками (базис Рисса) в $L_2(0,b)$, и имеет биортогональную систему, которая также базис Рисса со скобками (базис Рисса) в $L_2(0,b)$. Тогда коэффициенты Фурье граничной функции σ_1 по биортогональной системе $\{h_{m,1},\ \ m \geq 1\}$ имеют вид

$$< u_{m,1}, \sigma_1 >= \frac{\Delta_0(\lambda_m^{(1)})}{\lambda_m^{(1)}},$$

так как $\Delta_1(\lambda_m^{(1)}) = 0$ и $\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) - \lambda \int\limits_0^b \kappa_1(x,\lambda)\overline{\sigma_1(x)}dx$. В силу базисности системы $\{h_{m,1}, \ m \geq 1\}$ можно построить σ_1 в $\mathrm{L}_2(0,b)$, т.е.

$$\sigma_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_0(\lambda_m^{(1)})}{\lambda_m^{(1)}} h_{m,1}(x). \tag{17}$$

Таким образом, одна из граничных функций восстановлена.

2-ой шаг. Восстановление σ_2 по спектру второй краевой задачи и известному σ_1 из $\mathrm{L}_2(0,b)$.

Пусть задана последовательность $\{\lambda_m^{(2)}, \ m \geq 1\}$ собственных значений второй краевой задачи. Построим функцию $\kappa_2(x,\lambda)$ как решение следующей задачи Коши

$$l(\kappa_2) = \lambda\kappa_2(x,\lambda), \ \ 0 < x < b$$

с условиями

$$V_1(\kappa_2) - \lambda\int\limits_0^b \kappa_2(x,\lambda)\overline{\sigma_1(x)}dx = 0, \ V_2(\kappa_2) = \Delta_1(\lambda), \ V_j(\kappa_2) = 0, \ \ j = 2, ..., n.$$

Отсюда строится система собственных и присоединенных функций

$$\{u_{m,2}(x) = \kappa_2(x, \lambda_m^{(2)}), \ m \geq 1\}.$$

Тогда коэффициенты Фурье граничной функции σ_2 по биортогональной системе $\{h_{m,2}, m \geq 1\}$ имеют вид

$$< u_{m,2}, \sigma_2 >= \frac{\Delta_0(\lambda_m^{(2)})}{\lambda_m^{(2)}}, m \geq 1$$

так как $\Delta_2(\lambda_m^{(2)}) = 0$ и $\Delta_2(\lambda) = \Delta_0(\lambda) - \lambda \int\limits_0^b \kappa_2(x,\lambda)\overline{\sigma_2(x)}dx$. В силу базисности системы $\{h_{m,2}, \ m \geq 1\}$ можно построить σ_2 в $\mathrm{L}_2(0,b)$

$$\sigma_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_0(\lambda_m^{(2)})}{\lambda_m^{(2)}} h_{m,2}(x). \tag{18}$$

Таким образом, построена вторая граничная функция. Продолжая находить $\sigma_3, ..., \sigma_n$, восстанавливаются все граничные функции.

В случае, когда собственные значения рассматриваемых задач непростые (в действительности, формулы (17), (18) немного усложняются (см. (11))), аналогичными рассуждениями (кроме как может быть технических сложностей) придем к требуемому утверждению.

Теорема 2 доказана.

Литература

[1] *Гельфанд И.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан // Известия АН СССР, сер. матем. – 1951. – Т.15. – С. 309–360.

[2] *Лейбензон З.Л.* Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков / З.Л. Лейбензон // Труды Москов. мат. об-ва. – 1966. – Т.15. – С. 70–144.

[3] *Юрко В.А.* Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями / В.А. Юрко // Мат. заметки. – 1975. – Т.18. – №4. – С. 569–576.

[4] *Марченко В.А.* Введение в теорию обратных задач спектрального анализа. – Харьков: Акта, 2005. – 439 с.

[5] *Садовничий В.А.* Теорема единственности решения обратной задачи спектрального анализа в случае дифференциального уравнения с периодическими граничными условиями / В.А. Садовничий // Диф. ур. – 1973. – Т.9. – №2. – С. 271–277.

[6] *Садовничий В.А.* О связи между спектром дифференциального оператора с симметричными коэффициентами и краевыми условиями / В.А. Садовничий, Б.Е. Кангужин // ДАН СССР. – 1982. – Т.267. – №2. – С. 310–313.

[7] *Akhtyamov A.M.* Generalizations of Borg's uniqueness theorem to the case of nonseparated boundary conditions / A.M. Akhtyamov, V.A. Sadovnichy, Ya.T. Sultanaev // Eurasian Math. J. – 2012. – V.3. – №4. – P. 10–22.

[8] *Akhtyamov A.M.* Inverse problem for an operator pencil with nonseparated boundary conditions / A.M. Akhtyamov, V.A. Sadovnichy, Ya.T. Sultanaev // Eurasian Math. J. – 2010. – V.1. – №2. – P. 5–16.

[9] *Станкевич М.* Об одной обратной задаче спектрального анализа для обыкновенного дифференциального оператора четного порядка / М. Станкевич // Вестник МГУ, сер. матем. – 1981. – №4. – С. 24–28.

[10] *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями / А.А. Шкаликов // Вестник МГУ. – 1982. – Серия 1. – №6. – С. 12–21.

[11] *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н.К. Бари // Математика. Том IV, Уч. записки Моск. гос. ун-та. – 1951. – Т.148. – С. 69-–107.

References

[1] *Gel'fand I.M.* Ob opredelenii differentsial'nogo uravneniya po yego spektral'noy funktsii / I.M. Gel'fand, B.M. Levitan // Izvestiya AN SSSR, ser. matem. – 1951. – T.15. – S. 309–360.

[2] *Leybenzon Z.L.* Obratnaya zadacha spektral'nogo analiza obyknovennykh differentsial'nykh operatorov vysshikh poryadkov / Z.L. Leybenzon // Trudy Moskov. mat. ob-va. – 1966. – T. 15. – S. 70–144.

[3] *Yurko V.A.* Obratnaya zadacha dlya differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka s regulyarnymi krayevymi usloviyami / V.A. Yurko // Mat. zametki. – 1975. – T.18. – №4. – S. 569–576.

[4] *Marchenko V.A.* Vvedeniye v teoriyu obratnykh zadach spektral'nogo analiza. – Khar'kov: Akta, – 2005. – 439 s.

[5] *Sadovnichiy V.A.* Teorema yedinstvennosti resheniya obratnoy zadachi spektral'nogo analiza v sluchaye differentsial'nogo uravneniya s periodicheskimi granichnymi usloviyami / V.A. Sadovnichiy // Dif. ur. – 1973. – T.9. – №2. – S. 271–277.

[6] *Sadovnichiy V.A.* O svyazi mezhdu spektrom differentsial'nogo operatora s simmetrichnymi koeffitsiyentami i krayevymi usloviyami / V.A. Sadovnichiy, B.Ye. Kanguzhin // DAN SSSR. – 1982. – T.267. – №2. – S. 310–313.

[7] *Akhtyamov A.M.* Generalizations of Borg's uniqueness theorem to the case of nonseparated boundary conditions / A.M. Akhtyamov, V.A. Sadovnichy, Ya.T. Sultanaev // Eurasian Math. J. – 2012. – V.3. – №4. – P. 10–22.

[8] *Akhtyamov A.M.* Inverse problem for an operator pencil with nonseparated boundary conditions / A.M. Akhtyamov, V.A. Sadovnichy, Ya.T. Sultanaev // Eurasian Math. J. – 2010. – V.1. – №2. – P. 5–16.

[9] *Stankevich M.* Ob odnoy obratnoy zadache spektral'nogo analiza dlya obyknovennogo differentsial'nogo operatora chetnogo poryadka / M. Stankevich // Vestnik MGU, ser. matem. – 1981. – №4. – S. 24–28.

[10] *Shkalikov A.A.* On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions / A.A. Shkalikov // Vestnik MGU. – 1982. – Series 1. – №6. – P. 12–21.

[11] *Bari N.K.* Biortogonal'nyye sistemy i bazisy v gil'bertovom prostranstve / N.K. Bari // Matematika. Tom IV, Uch. zapiski Mosk. gos. un-ta. – 1951. – T.148. – S. 69-–107.