УДК 517.956

Алдашев С.А.

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: aldash51@mail.ru

Задачи Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для одного класса сингулярных гиперболических уравнений

На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики - изучение колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как доказано далее, задачи Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В работах автора изучены задачи Дирихле и Пуанкаре для линейных многомерных гиперболических уравнений, где показаны корректность этих задач, существенна зависять от высоты рассматриваемой цилиндрической области. В данной работе найден многомерный область в которой, задачи Дирихле и Пуанкаре разрешимы для одного класса сингулярных гиперболических уравнений.
Ключевые слова: разрешимость задач, многомерная область, сингулярные уравнения, система уравнений.

Aldashev S.A.
Dirichlet and Poincare in the multidimensional field for a class of singular hyperbolic equations

It has been shown in a plane that one of fundamental problems of Math Physics, i.e. studying the behavior of a hesitating string, is not correct when boundary conditions are given on the whole boundary of the domain. As it is shown below, Dirichlet problem is incorrect not just for a wave equation but for general hyperbolic equations. In the works of the author studied the Dirichlet and Poincar? problem for linear multidimensional hyperbolic equations, which shows the correctness of these tasks, depending essentially on the height of the considered cylindrical domain.In this paper we find multi-dimensional area in which the Dirichlet and the Poincare problem solved for a class of singular hyperbolic equations.
Key words: solvability problems, multidimensional domain, singular equations, system equations.

Алдашев С.А.
Сингулярлық гиперболалық теңдеулерге көп өлшемді облыста Дирихле және Пуанкаре есептері

Математикалық физиканың негізгі есептерінің бірі – ішектің тербелісін зерттеу. Егерде зерттеу облысының барлық шекарасында мән берілсе, онда бұл есеп жазықтықта біршешімді емес екен. Кейін көрсетілгендей, Дирихле есебі тек қана толқын теңдеуіне емес, және де басқа сызықтық гиперболалық теңдеулерге де біршешімді болмай шықты. Автордың жұмыстарында сызықтық көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге Дирихле және Пуанкаре есептері зерттелген. Бұл есептердің біршешімділігі, қарастырылған цилиндрлік облыстың биіктігіне тікелей байланысты екендігі дәлелденген. Бұл жұмыста сингулярлық гиперболалық теңдеулерге көп өлшемді облыс табылған, онда Дирихле және Пуанкаре есебінің шешімділігі дәлелденген.
Түйін сөздер: есептер шешімділігі, көп өлшемді, облыс, сингулярлық теңдеулер, теңдеулер жүйесі.

1 Введение

На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики - изучение колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как показано далее, задачи Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений.

Проблема корректности краевых задач с данными на всей границе области для гиперболических уравнений была объектом исследований многих авторов на плоскости $[1-5]$ и в пространстве $[6-10]$. Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных сингулярных гиперболических уравнений изучались в $[11,12]$.

В данной работе найден многомерный область в которой, задачи Дирихле и Пуанкаре разрешимы для одного класса сингулярных гиперболических уравнений.

2 Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega-$ конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная при $t>0$ конической поверхностью $K: t=\varphi(r)$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$,
$\varphi(r)\in C^1([0,1])\cap C^2((0,1))$, $|\varphi'(r)|<1$, $\varphi'(r)\neq 0$ и плоскостью $t=0$ где $r=|x|-$ длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$. Через S обозначим множество $\{t=0,\ 0<|x|<1\}$ точек из E_m.

В области Ω рассмотрим многомерные сингулярные гиперболические уравнения

$$Lu\equiv \Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t-\frac{\alpha}{t}u_t+c(x,t)u=0, \tag{1}$$

где Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m\geq 2$, $\alpha-$ действительное число.

Через $u_\alpha(x,t)$ обозначим решение уравнения (1) при данном α.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\geq 0$, $0\leq\theta_1<2\pi$, $0\leq\theta_i\leq\pi$, $i=2,3,...,m-1$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

В качестве многомерных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Ω из класса $C(\overline{\Omega}\setminus S)\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_\alpha\Big|_S=\tau(r,\theta),\quad u_\alpha\Big|_K=\sigma(r,\theta),\ \alpha<1; \tag{2}$$

$$\frac{u_\alpha}{\ln t}\Big|_S=\tau(r,\theta),\quad u_\alpha\Big|_K=\sigma(r,\theta),\ \alpha=1; \tag{3}$$

$$(t^{\alpha-1}u_\alpha)\Big|_S=\tau(r,\theta),\quad u_\alpha\Big|_K=\sigma(r,\theta),\ \alpha>1. \tag{4}$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области Ω из класса $C(\bar{\Omega}\setminus S)\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{t\to 0}t^\alpha(u_\alpha-u_{\alpha,2})_t=\nu(r,\theta),\quad u_\alpha\Big|_K=\sigma(r,\theta),\ \alpha<1; \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0}t(\ln t)^2\left(\frac{u_\alpha-u_{\alpha,1}}{\ln t}\right)_t=\nu(r,\theta),\quad u_\alpha\Big|_K=\sigma(r,\theta),\ \alpha=1; \tag{6}$$

$$\lim_{t\to 0} t^{2-\alpha}[t^{\alpha-1}(u_\alpha - u_{\alpha,2})]_t = \nu(r,\theta), \quad u_\alpha\Big|_K = \sigma(r,\theta),\ \alpha > 1, \tag{7}$$

где $u_{\alpha,1}(r,\theta,t)$, $u_{\alpha,2}(r,\theta,t)$ вполне определенные функций, зависящие от $\nu(r,\theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0,1...-$ пространства Соболева.

Имеет место ([13])

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \ge m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

а также ряды, полученного из него дифференцированием порядка $p \le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (8) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \le c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2 \le c_2,\ \ c_1,\, c_2 = const.$$

Через $\widetilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{b}_n^k(r,t)$, $\widetilde{c}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\bar{\sigma}_n^k(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (8), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$,
$i = 1,...,m$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, $H-$ единичная сфера в E_m.

Пусть $p \ge 0-$ наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенствам $\alpha + 2p \ge$ $\ge m-1$, если $\alpha \le 0$ и $2-\alpha+2p \ge m-1$, если $\alpha \ge 2$; $q \ge 0-$ наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенствам $2-\alpha+2q \ge m-1$, если $0 < \alpha \le 1$ и $\alpha+2q \ge m-1$, если $1 \le \alpha < 2$; а также s такое, что $s = [-\frac{\alpha}{2}]$, если $\alpha \le 0$ и $s = [-\frac{\alpha}{2}-1]$, если $\alpha \ge 2$, где $[\alpha]-$ целое часть числа α.

Введем обозначения $\beta = \max\{s+1, p\}$, $\gamma = \max\{s+1, q\}$.

Теорема. Если $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega)$, $i = 1,...,m$, $l \ge m+1$ и $\tau(r,\theta) = r^4\tau^*(r,\theta), \nu(r,\theta) = r^4\nu^*(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta) = r^4\sigma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta) \in W_2^\beta(S)$, $\nu^*(r,\theta) \in W_2^\gamma(S)$, $\sigma^*(r,\theta) \in W_2^{s+1}(S)$, при $\alpha \le 0$ и $\alpha \ge 2$; $\tau^*(r,\theta), \nu^*(r,\theta), \sigma^*(r,\theta) \in W_2^{q+1}(S)$ при $0 < \alpha \le 1$ и $1 \le \alpha < 2$, то задача 1 и 2 имеет решение.

3 Сведения задачи 1 и 2 к двумерным задачам для сиситем дифференциальных уравнений

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$L_\alpha u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t - \frac{\alpha}{t}u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \tag{9}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решения задач будем искать в виде

$$u_\alpha(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_{\alpha,n}(r,t)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{10}$$

где $\bar{u}^k_{\alpha,n}(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставив (10) в (9), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\overline{u}^k_{\alpha,n}$ получим ([12, 14])

$$\begin{gathered}\rho^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0rr} - \rho^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0tt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{\alpha,0r} + \tilde{b}^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0t} - \frac{\alpha\rho^1_0}{t}\bar{u}^1_{\alpha,0t} + \tilde{c}^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n\bar{u}^k_{\alpha,nrr} - \rho^k_n\bar{u}^k_{\alpha,ntt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} a^k_{in}\right)\bar{u}^k_{\alpha,nr} + \tilde{b}^k_n\bar{u}^k_{\alpha,nt} - \frac{\alpha\rho^k_n}{t}\bar{u}^k_{\alpha,nt} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}^k_n - \frac{\lambda_n\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-1} - na^k_{in})\right]\bar{u}^k_{\alpha,n}\right\} = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0rr} - \rho^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0tt} + \frac{m-1}{r}\rho^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0r} - \frac{\alpha}{t}\rho^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0t} = 0, \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\rho^k_1\bar{u}^k_{\alpha,1rr} - \rho^k_1\bar{u}^k_{\alpha,1tt} + \tfrac{m-1}{r}\rho^k_1\bar{u}^k_{\alpha,1r} - \frac{\alpha}{t}\rho^k_1\bar{u}^k_{\alpha,1t} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1\bar{u}^k_{\alpha,1}\bar{u}^k_{\alpha,1} = \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\bar{u}^1_{\alpha,0r} + \tilde{b}^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0t} + \tilde{c}^1_0\bar{u}^1_{\alpha,0}\right),\ n=1,\ k=\overline{1,\ k_1},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\rho^k_n\bar{u}^k_{\alpha,nrr} - \rho^k_n\bar{u}^k_{\alpha,ntt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_n\bar{u}^k_{\alpha,nr} - \frac{\alpha}{t}\rho^k_n\bar{u}^k_{\alpha,nt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho^k_n\bar{u}^k_{\alpha,n} = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a^k_{in-1}\bar{u}^k_{\alpha,n-1r} + \right. \\ \left. + \tilde{b}^k_n\bar{u}^k_{\alpha,n-1t} + \left[\tilde{c}^k_{n-1} - \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-2} - (n-1)a^k_{in-1})\right]\bar{u}^k_{\alpha,n-1}\right\},\ k=\overline{1,\ k_n},\ n=2,3\dots.\end{gathered} \tag{14}$$

Суммируя уравнение (13) от 1 до k_1, а уравнение (14) - от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместо с (12), приходим к уравнению (11).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}^k_{\alpha,n}\right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots .-$ решение системы (12) - (14), то оно является решением уравнения (11).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (12)-(14) можно представить в виде

$$\bar{u}^k_{\alpha,nrr} - \bar{u}^k_{\alpha,ntt} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{\alpha,nr} - \frac{\alpha}{t}\bar{u}^k_{\alpha,nt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_{\alpha,n} = \bar{f}^k_{\alpha,n}(r,t), \tag{15}$$

где $\bar{f}^k_{\alpha,n}(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}^1_{\alpha,0}(r,t) \equiv \equiv 0$.

Произведя в (15) замену $\bar{u}^k_{\alpha,n}(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}u^k_{\alpha,n}(r,t)$ получим

$$L_\alpha u^k_{\alpha,n} = u^k_{\alpha,nrr} - u^k_{\alpha,ntt} - \frac{\alpha}{t}u^k_{\alpha,nt} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}u^k_{\alpha,n} = f^k_{\alpha,n}(r,t),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,..., \tag{16$_\alpha$}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\ f^k_{\alpha,n}(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}^k_{\alpha,n}(r,t).$$

Далее, из краевых условий (2)-(7) для функций $u^k_{\alpha,n}(r,t)$ в силу (10), с учетом леммы 1, соответственно, будем иметь

$$u^k_{\alpha,n}(r,0)=\tau^k_n(r),\ u^k_{\alpha,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_n(r),\ \alpha<1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,..., \tag{17}$$

$$\left(\frac{u^k_{\alpha,n}}{\ln t}\right)\Big|_{t=0}=\tau^k_n(r),\ u^k_{\alpha,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_n(r),\ \alpha=1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,..., \tag{18}$$

$$(t^{\alpha-1}u_{\alpha,n})\Big|_{t=0}=\tau(r,\theta),\ u^k_{\alpha,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_n(r),\ \alpha>1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,..., \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\lim_{t\to0}t^{\alpha}(u^k_{\alpha,n}-u^{k,2}_{\alpha,n})_t=\nu^k_n(r),\quad u^k_{\alpha,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_n(r),\ \alpha<1,\\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots,\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\lim_{t\to0}t(\ln t)^2\left(\frac{u^k_{\alpha,n}-u^{k,1}_{\alpha,n}}{\ln t}\right)_t=\nu(r,\theta),\ u^k_{\alpha,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_n(r),\ \alpha=1,\\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\lim_{t\to0}t^{2-\alpha}[t^{\alpha-1}(u^k_{\alpha,n}-u^{k,2}_{\alpha,n})]_t=\nu(r,\theta),\ u^k_{\alpha,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_n(r),\ \alpha>1,\\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...,\end{gathered} \tag{22}$$

$$\tau^k_n(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}^k_n(r),\ \nu^k_n(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\nu}^k_n(r),\ \sigma^k_n(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\sigma}^k_n(r).$$

Таким образом, задачи 1 и 2 сведены к двумерных задачам для систем дифференциальных уравнений (12)-(14). Решение этих задач будем изучать в п.4 и п.5.

Наряду с уравнением (16_α) рассмотрим уравнение

$$L_0u^k_{0,n}\equiv u^k_{0,nrr}-u^k_{0,ntt}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\bar{u}^k_{0,n}=f^k_n(r,t), \tag{16_0}$$

которое с помощью замены переменных $\xi=\frac{r+t}{2}$, $\eta=\frac{r-t}{2}$ сводится к уравнению

$$Mu^k_{0,n}\equiv u^k_{0,n\xi\eta}+\frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u^k_{0,n}=f^k_n(\xi,\eta), \tag{23}$$

$$f^k_n(\xi,\eta)=f^k_{0,n}(\xi+\eta,\ \xi-\eta).$$

Решение задачи Коши для (23) с данными

$$u^k_{0,n}(\xi,\xi)=\tau^k_n(\xi),\ \left(\frac{\partial u^k_{0,n}}{\partial\xi}-\frac{\partial u^k_{0,n}}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=\eta}=\nu^k_n(\xi),\ 0\le\xi\le\frac{1}{2}$$

имеет вид ([14])

$$\begin{gathered}u^k_{0,n}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau^k_n(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau^k_n(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}[\nu^k_n(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\\ -\tau^k_n(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}]d\xi_1+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\xi}\int\limits_{0}^{\eta}f^k_n(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\xi_1d\eta_1,,\end{gathered} \tag{24}$$

где $\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(2\xi)$, $\nu_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi)$, $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi\eta+\xi_1\eta_1)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}] = P_\mu(z)-$ функция Римана для уравнения $Mu_{0,n}^k = 0$ [15], а $P_\mu(z)-$ функция Лежандра, $\mu = n + \frac{(m-3)}{2}$,

$$\frac{\partial}{\partial N}\Big|_{\xi=\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=\eta}.$$

4 Функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (16_α) и (16_0).

Сначала приведем некоторые свойства оператора L_α, которые необходимы для дальнейших исследований.

1^0. Если $u_\alpha-$ решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$u_{2-\alpha} = t^{\alpha-1}u_\alpha \tag{25}$$

является решением уравнения $L_{2-\alpha}u = 0$.

2^0. Если $u_\alpha-$ решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$\frac{1}{t}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = u_{\alpha+2} \tag{26}$$

будет решением уравнения $L_{\alpha+2}u = 0$.

3^0. Оператор L_α обладает свойством

$$L_\alpha u_\alpha = t^{1-\alpha}L_{2-\alpha}(t^{\alpha-1}u_\alpha). \tag{27}$$

Указанные свойства установливаются аналогично тому, как они были доказаны для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона ($[17-16]$)

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t}u_t = 0. \tag{28}$$

Из равенства (25) имеем $u_{2-\alpha-2p} = t^{\alpha+2p-1}u_{\alpha+2p}$ к которому применив p раз формулу (26), а затем (25), получим

$$u_{2-\alpha} = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p (t^{\alpha+2p-1}u_{\alpha+2p}). \tag{29}$$

Соотношение (29) является фундаментальной формулой ($[17-16]$) для решения задачи Коши.

Пусть $p \geq 0$, $q \geq 0-$ наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам $\alpha + 2p \geq m-1$, $2-\alpha+2q \geq m-1$.

Утверждение 1. Если $u_{0,n}^{k,2}(r,t)-$ решение задачи Коши для уравнения (16_0) удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,2}(r,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{k,2}(r,0) = \nu_n^k(r), \tag{30}$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t)=\gamma_{-\alpha}t^{-\alpha}\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,2}(r,\xi t)\xi(1-\xi^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv\gamma_{-\alpha}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}}u_{0,n}^{k,2}(r,t),\tag{31}$$

при $\alpha<0$ будет решением уравнения (16_α), удовлетворяющим условию

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0,\ \lim_{t\to 0}t^\alpha\frac{\partial}{\partial t}u_{\alpha,n}^{k,2}=\nu_n^k(r).\tag{32}$$

Если же $0<\alpha<1$, то функция

$$\begin{gathered}u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t)=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left[t^{1-k+2q}\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv\\ \equiv\gamma_{2-\alpha+2q}2^{q-1}\Gamma(q-\tfrac{\alpha}{2}+1)D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,t)}{t}\right]\end{gathered}\tag{33}$$

является решением уравнения (16_α) с начальными данными (32), где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha=2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)-$ гамма-функция, $D_{0t}^\alpha-$ оператор Римана-Лиувилля [17], а $u_{0,n}^{k,1}(r,t)-$ решение уравнения (16_0) с начальными условиями

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0)=\frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},\ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{k,1}(r,0)=0.\tag{34'}$$

Утверждение 2. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,t)-$ решение задачи Коши для уравнения (16_0) удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0)=\tau_n^k(r),\ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{k,1}(r,0)=0,\tag{34}$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r,t)=\gamma_\alpha\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)t^{1-\alpha}D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,t)}{t}\right],\tag{35}$$

при $\alpha>0$ есть решение уравнения (16_α), удовлетворяющее условию (34).

Утверждение 3. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,t)-$ решение задачи Коши для уравнения (16_0) удовлетворяющее условию (34), то функция

$$u_{1,n}^{k,1}(r,t)=\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\ln[t(1-\xi^2)]d\xi\tag{36}$$

является решением задачи для уравнения $L_1u_{1,n}^k=f_{1,n}^k(r,t)$ с начальными данными

$$\left.\frac{u_{l,n}^{k,1}}{\ln t}\right|_{t=0}=\tau_n^k(r).\tag{37}$$

При этом функции $f^k_{\alpha,n}(r,t)$, $f^k_{0,n}(r,t)$ связаны формулами (31) и (33) в случае утверждения 1 и формулами (35) и (36) в случаях утверждений 2 и 3.

Доказательства приведенных утверждений установливаются аналогичным образом, как они доказаны для уравнения (28) и многомерного волнового уравнения $\Delta_x u - u_{tt} = 0\,([14, 18-21])$.

Приведем некоторые следствия из утверждений 2,3. Сначала рассмотрим случай $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$, $r = 0, 1\ldots$. Если $u^{k,1}_{0,n}(r,t)-$ решение задачи Коши для (16_α) с данными

$$u^{k,1}_{0,n}(r,0) = \frac{\tau^k_n(r)}{(\alpha-1)...(\alpha+2p-1)}, \ \frac{\partial}{\partial t}u^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0, \tag{38}$$

то из утверждения 2 следует, что

$$u^{k,1}_{\alpha+2p,n}(r,t) = \gamma_{\alpha+2p}\int\limits_0^1 u^{k,1}_{0,n}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}+p-1}d\xi$$

является решением уравнения $L_{\alpha+2p}u = f^k_{\alpha+2p,n}(r,t)$, удовлетворяющим начальному условию (38).

Тогда из соотношений (29) и (25) вытекает, что функция

$$u^{k,1}_{\alpha,n}(r,t) = t^{1-\alpha}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\left(t^{\alpha+2p-1}u^{k,1}_{\alpha+2p,n}\right) \equiv \gamma_{k+2p}2^{p-1}\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}+p)t^{1-\alpha}D^{-\frac{\alpha}{2}}_{0t^2}\left[\frac{u^{k,1}_{0,n}(r,t)}{t}\right] \tag{39}$$

есть решение уравнения (16_α) и удовлетворяет условию (34).

Теперь пусть $\alpha = -(2r+1)$. Если $u^{k,1}_{0,n}(r,t)-$ решение задачи Коши для (16_0) с данными (34), то из (25), (29) и из утверждения 3 нетрудно получить, что

$$u^{k,1}_{-(2r+1),n}(r,t) = t^{2(r+1)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{r+1}\left[\int\limits_0^1 u^{k,1}_{0,n}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\ln(t(1-\xi^2))d\xi\right] \tag{40}$$

является решением задачи Коши для (16_α), удовлетворяющее условию (34).

Используя [17], соотношение (40) можно записать в виде

$$u^{k,1}_{-(2r+1),n}(r,t) = \frac{a}{2}t^{2(r+1)}D^{r+\frac{1}{2}}_{0t^2}\left[\frac{u^{k,1}_{0,n}(r,t)}{t}\right], \ a = \frac{1}{2}\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - \ln t. \tag{41}$$

5 Доказательство теоремы для задачи 1

1) Случай $\alpha < 1$. Решение задачи (16_α), (17) будем искать в виде

$$u^k_{\alpha,n}(r,t) = u^{k,1}_{\alpha,n}(r,t) + u^{k,2}_{\alpha,n}(r,t), \tag{42}$$

где $u^{k,1}_{\alpha,n}(r,t)-$ решение задачи Коши (16_α) с данными (34), а $u^{k,2}_{\alpha,n}(r,t)-$ решение задачи Дирихле для уравнения

$$L_\alpha u^{k,2}_{\alpha,n} = 0 \tag{43}$$

с условием

$$u^{k,2}_{\alpha,n}(r,0)=0,\ u^{k,2}_{\alpha,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_n(r)-u^{k,1}_{\alpha,n}(r,\varphi(r)),\\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots, \tag{44}$$

Учитывая формулы (35), (39) и (41) задача Коши (16_α), (34) сводим к задачам Коши (16_0), (38) и (16_0), (34), решения которых имеет вид (24).

Далее, используя формулы (31), (33) задача Дирихле (43), (44) сводим к задаче Дирихле для уравнения

$$L_0 u^{k,2}_{0,n}=0 \tag{45}$$

с данными

$$u^{k,2}_{0,n}(r,0)=0,\ u^{k,2}_{0,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_{1n}(r), k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots, \tag{46}$$

при $\alpha\le 0$ и к задаче Пуанкаре для (45) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t}u^{k,2}_{0,n}(r,0)=0,\ u^{k,2}_{0,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_{1n}(r), k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots, \tag{47}$$

при $0<\alpha<1$, где $\sigma^k_{1n}(r)-$ функция выражающихся через $\tau^k_n(r)$, $\sigma^k_n(r)$.

В [22] показано, что задачи (45), (46) и (45), (47) однозначны разрешимы.

Далее, используя утверждений 1-3, установливаются однозначные разрешимости задач (16_α), (34) и (43), (44).

2)Случай $\alpha=1$. Решение задачи (16_α), (18) будем искать в виде (42), где $u^{k,1}_{1,n}(r,t)-$ решение задачи Коши (16_α), (37), а $u^{k,2}_{1,n}(r,t)-$ решение задачи Пуанкаре для уравнения (43) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t}u^{k,2}_{1,n}(r,0)=0,\ u^{k,2}_{1,n}(r,\varphi(r))=\sigma^k_n(r)-u^{k,1}_{1,n}(r,\varphi(r)),\\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots. \tag{48}$$

В силу (36) задача (16_α) (37) сводится к задаче Коши (16_0), (34). Учитывая формулу (35) задача Пуанкаре (43), (48) приводим к задаче Пуанкаре (45), (47).

Следовательно, задача (16_α), (18) однозначно разрешима.

Используя формулы (27), (25) задачу (16_α), (19) при $\alpha>1$ сводим к исследованному случаю $\alpha<1$.

Таким образом,сначала решив задачу (12), (17) $(n=0)$ и а затем (13), (17) $(n=1)$ и т.д. найдем все $u^k_{\alpha,n}(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$.

Итак, в области Ω, имеет место

$$\int_H \rho(\theta)Lud H=0. \tag{49}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0- плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)-$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1$, V_1- плотна в $L_2((0,\varphi(\frac{1}{2})))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in$ $\in V$, $V=V_0\otimes H\otimes V_1-$ плотна в $L_2(\Omega)$ ([23]).

Отсюда и из (49), следует, что

$$\int_\Omega f(r,\theta,t)Lud\Omega=0$$

и

$$Lu = 0,\ \forall (r, \theta, t) \in \Omega.$$

Таким образом, ряд вида

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_{\alpha,n}^{k}(r,t) Y_{n,m}^{k}(\theta) \tag{50}$$

является решением задачи 1, где функции $u_{\alpha,n}^{k}(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, леммы и формулы [24]

$$\begin{gathered} \frac{d^m}{dz^m}P_\mu(z) = \frac{\Gamma(\mu+m+1)}{2^m\Gamma(\mu-m+1)}F(1+m+\mu,\, m-\mu,\, m+1;\, \frac{1-z}{2}), \\ \frac{\Gamma(z+\alpha)}{z+\beta} = z^{\alpha-\beta}[1+\frac{1}{2z}(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)+0(z^{-2}))], \end{gathered} \tag{51}$$

а также оценки ([13])

$$|k_n| \le c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j=\overline{1,m-1},\ q=0,1,\ldots, \tag{52}$$

где $F(a,b,c,z)-$ гипергеометрическая функция, $\alpha,\beta-$ произвольные действительные числа, как в [12, 20], можно показать, что полученное решение (50) принадлежит искомому классу.

6 Доказательство теоремы для задачи 2

1)Случай $\alpha < 1$. Решение задачи (16_α), (20) будем искать в виде (42),где $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t)-$ решение задачи Коши (16_α), (32), а $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,t)-$ решение задачи Пуанкаре для уравнения (43) с условием (48). В силу (31), (33) задача (16_α), (32) приводится к задаче (45), (30) при $\alpha \le 0$ и (45),($34'$) при $0 < \alpha < 1$.

Используя формулы (35), (39) и (41) задачу (43), (48) сводим к задаче Пуанкаре (45), (47).

Таким образом, задача (16_α), (20) однозначно разрешима.

2)Случай $\alpha = 1$. Решение задачи (16_α), (21) ищем в виде (42), где $u_{1,n}^{k,1}(r,t)-$ решение задачи Коши (16_α), с данными

$$u_{1,n}^{k,1}(r,0) = -\nu_n^k(r),\ \frac{\partial}{\partial t}u_{1,n}^{k,1}(r,0) = 0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,..., \tag{53}$$

а $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t)-$ решение задачи Пуанкаре для (43) с условием (48).

Учитывая формулу (35) задача Коши (16_α), (53) сводим к задаче Коши (16_0), (53), а задачу (43), (48)- к задаче (45), (47), которое имеет единственное решение.

Значит задача (16_α), (21) также однозначно разрешима.

Применяя формулу (27), (25) задачу (16_α), (22) при $\alpha > 1$ сводим к случаю $\alpha < 1$.

Следовательно, функция (50) является решением задачи 2, где функции $u_{\alpha,n}^{k}(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1...$ определяются из предыдущих двумерных задач и в силу формул (51), (52) принадлежит искомому классу.

Теорема доказано.

7 Заключение

В работе найден многомерный область в которой, задачи Дирихле и Пуанкаре разрешимы для одного класса сингулярных гиперболических уравнений.

Литература

[1] *J.Hadamard* "Sur les problems aux derivees partielles et leur signification physique"// Princeton University Bulletin. -1902. -Vol.13, - P. 49-52.

[2] *D.G.Bourgin and R.Duffin* "The Dirichlet problem the vibrating string eguation"//Bulletin of the American Mathematical Society. -1939. -Vol.45, -P.851-858.

[3] *Шабат Б.В.* Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. - 1957. Т.112, №3-С.386-389.

[4] *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // ДАН СССР. -1958. Т.122, № 2.-С.167-170.

[5] *D.W.Fox and C.Pucci* "The Dirichlet problem the wave eguation"// Annali di Mathematica Pura ed Applicata. - 1958. Vol.46, - P. 155-182.

[6] *Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C.* The condition for uniqueness of the Diriclet problem for hyperbolic equations in cilindrical domains // J.Math.Mech.-1969. Vol.18,-P.8.

[7] *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. -М.: Наука, 2006. - 287 с.

[8] *Алдашев С.А.* О корректности задач Дирихле для многомерных волнового уравнения и уравнения Лаврентьева-Бицадзе//Укр.матем.журнал. - 1996. - Т.4(48). № 5.- С.701-705.

[9] *Aldashev S.A.* The well - posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation// Mathematical problems Engineering. volume 2010, Article ID 653215, 7 pages.

[10] *Aldashev S.A.* The well - posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation// Journal of Mathematical Science. - 2011. - Vol. 173, № 2. -P.150-154.

[11] *Алдашев С.А.* Критерий единственности решения задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона// Дальневосточный матем. журн. - 2012. - Т. 12, № 1.- С. 3-12.

[12] *Алдашев С.А.* Задачи Дирихле и Пуанкаре для одного класса многомерных сингулярных гиперболических уравнений// Научные ведомости БелГУ, Сер. "Математика, физика".- Белгород, 2016. №13 (234). вып. 43.- С. 18-23.

[13] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. -М.:Физматгиз,1962. - 254 с.

[14] *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. -Алматы: Гылым, 1994. - 170 с.

[15] *Copson E.T.* On the Riemann-Green function//J.Rath.Mech and Anal. - 1958, No.1. - P.324-348.

[16] *Weinstein A.* // The Fifth simposium in applied Math.MCGraw-Hill. New York. - 1954. - P.137-147.

[17] *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчесления и их применение: -Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. -298 с.

[18] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. - Новосибирск: НГУ, 1973.-144 с.

[19] *Алдашев С.А.* О некоторых краевых задачах для одного класса сингулярных уравнений в частных производных//Дифференц.уравнения. - 1976. - Т.12, №6. -С.3-14.

[20] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. - Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1982.-167 с.

[21] *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. - Орал: ЗКАТУ, 2007. - 139 с.

[22] *Алдашев С.А.* Корректности задач Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для волнового уравнения // Укр. матем. журнал. -2014. - Т. 66, № 10. -С. 1414-1419.

[23] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. - 543 с.

[24] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: -М.: Наука, 1973. -Т.1. - 294 с.

References

[1] *J.Hadamard* "Sur les problems aux derivees partielles et leur signification physique"// Princeton University Bulletin. -1902, -Vol.13, - P. 49-52.

[2] *D.G.Bourgin and R.Duffin* "The Dirichlet problem the vibrating string eguation"//Bulletin of the American Mathematical Society. -1939, -Vol.45, -P. 851-858.

[3] *Shabat B. V* Examples of solutions of the Dirichlet problem for a mixed-type equation // DAN SSSR. - 1957. - Vol. 112, № 3. - P. 386-389.

[4] *Bitsadze A.B.* The incorrectness of the Dirichlet problem for mixed-type equations in mixed areas // DAN USSR. - 1958. - Vol. 122, № 2. - P. 167-170.

[5] *D.W.Fox and C.Pucci* "The Dirichlet problem the wave eguation"// Annali di Mathematica Pura ed Applicata. -1958. - Vol. 46, -P. 155-182.

[6] *Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C.* The condition for uniqueness of the Diriclet problem for hyperbolic equations in cilindrical domains // J.Math.Mech.-1969. Vol.18,-P.8.

[7] *Nakhushev A. M.* Displacement problems for partial differential equation. - M.: Nauka, 2006. - 287 p.

[8] *Aldashev S.A.* Aldashev S.A. Oh Dirichlet correctness task mnogomernix volnovogo equation and the equation Lavrenteva-Bicadze // Ukrainian . Matt . Zh .- 1996. - Vol. 4(48). No 5. - P.701-705.

[9] *Aldashev S.A.* The well - posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation// Mathematical problems Engineering, volume 2010, Article ID 653215, 7 pages.

[10] *Aldashev S.A.* The well - posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation// Journal of Mathematical Science. -2011. - Vol. 173, № 2. -P. 150-154.

[11] *Aldashev S.A.* A uniqueness criterion for solutions of the Dirichlet problem and Poincare in a cylindrical domain for the multidimensional Euler-Poisson-Darboux // Far Mat. zhurn. - 2012. - Vol. 12, No 1. - P. 3-12.

[12] *Aldashev S.A.* Dirichlet and Poincare for a class of multidimensional singular hyperbolic equations // Scientific statements BSU, Ser. "Mathematics, Physics".- Belgorod, 2016. Vol. 43. № 13 (234), - P. 18-23.

[13] *Mikhlin S.G.* Multidimensijnal singular integrals and integral equations.-M.:Physmathgiz,1962.-254 p.

[14] *Aldashev S.A.* Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations. -Almaty: Gylym, 1994. -170 p.

[15] *Copson E.T.* On the Riemann-Green function // J.Rath.Mech and Anal. - 1958, № 1. - P. 324-348.

[16] *Weinstein A.* // The Fifth simposium in applied Math. MCGraw-Hill. New York. - 1954. - P.137-147.

[17] *Nahushev A.M.* Elements of fractional calculus and their application. -Nalchik: KBSC RAS, 2000,-298 p.

[18] *Tersenov S.A.* Introduction to the theory of equations degenerating on the boundary.- Novosibirsk: NSU, 1973, - 144 p.

[19] *Aldashev S.A.* Some boundary value problems for a class of singular partial differential equations derivatives // Differents.uravneniya. -1976. -Vol.12, №6.- P. 3-14.

[20] *Tersenov S.A.* Introduction to the theory of parabolic equations with changing time direction. -Novosibirsk: Siberian Branch of the USSR MI, 1982, -167 p.

[21] *Aldashev S.A.* Degenerate multidimensional hyperbolic equations. -Oral: ZKATU, 2007, -139 p.

[22] *Aldashev S.A.* Correctness of Dirichlet and Poincare problems in a multidimensional area for wave equalization // Ukrainian math journal. -2014. - Vol. 66, № 10. - P. 1414-1419.

[23] *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of function theory and functional analysis. –M.: Nauka, 1976. - 543 p.

[24] *G.Beitmen, A.Erdeyee* Higher Transcendental Functions. -M.: Nauka, 1973. - Vol. 1. - 294 p.