УДК 517.956

Қытайбеков Е.

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: Er-kaz_89@mail.ru

Разрешимость задачи Дирихле для трехмерных эллиптико-параболических уравнений с вырождением типа и порядка

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. В работах С.А. Алдашева, показана однозначная разрешимость и получен явный вид задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных эллиптико-параболических уравнений. В данной работе для трехмерных эллиптико-параболических уравнений с вырождением типа и порядка в цилиндрической области показано разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.
Ключевые слова: разрешимость, задачи Дирихле, вырождение типа и порядка, плотность.

Kitaybekov E.T.

Solvability Dirichlet problem for three-dimensional elliptic-parabolic equations with type and order extinction

Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analitic function theory of complex variable. There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lock of any complete theory of multidimensional singular integral equations. In the works of S.A. Aldasheva, shows the unique solvability and obtained form of the explicit Dirichlet problem in the cylindrical domain for multidimensional elliptic-parabolic equations. In this paper, for the three-dimensional elliptic-parabolic equations with degeneration of the type and order in a cylindrical domain shown solvability and obtained in the form of a classical solution of the Dirichlet problem.
Key words: solvability, Dirichlet problem, degeneration of the type and order, density.

Қытайбеков Е.

Түрі мен реті азғындалған үш өлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге Дирихле есебінің шешімділігі

Комплексті айнымалы аналитикалық функциялар теориясының әдісімен жазықтықта эллиптикалық теңдеулерге шеттік есептердің біршешімділігі жақсы қарастырылған. Тәуелсіз айнымалылар екіден көп болғанда, осы мәселелерді зерттегенде көп қиындықтар кездеседі. Көп өлшемді сингулярлық интегралдар теориясы толық емес болғандықтан, белгілі сингулярлық интегралдар әдісін пайдалану күшін жоғалтады. С.А. Алдашевтың жұмыстарында цилиндрлік облыста көп өлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге Дирихле есебінің бір мәнділігі дәлелденген және нақты түрі келтірілген. Бұл жұмыста түрі мен реті азғындалған үш өлшемді эллиптико-параболалық теңдеулерге цилиндрлік облыста Дирихле есебінің шешімділігі көрсетілген және нақты Дирихле есебінің шешімінің айқын түрі алынған.
Түйін сөздер:шешімділік, Дирихле есебі, түрі мен реті азғындалған, тығыздық.

1 Введение

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений.Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задача Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. В обобщенных пространствах это задача изучена в [2]. В [3,4] установлена корректности задачи Дирихле для вырождающих многомерных эллиптико-параболических уравнений. В работе для трехмерных эллиптико-параболических уравнений с вырождением типа и порядка цилиндрической области показано разрешимость и получен явный вид классического решения задача Дирихле.

2 Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек $(x_1,\, x_2,\, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|-$ длина вектора $x = (x_1, x_2)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, $\Gamma_\beta-$ части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; $\sigma_\alpha-$ верхнее, а $\sigma_\beta-$ нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S - общая часть границ областей Ω_α и Ω_β представляющее множество $\{t = 0,\, 0 < |x| < 1\}$ в E_2.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся трехмерные смешанно эллиптико-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} p_i(t) u_{x_i x_i} + p_3(t) u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u,\ t > 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} g_i(t) u_{x_i x_i} - u_t + \sum\limits_{i=1}^{2} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u,\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p_i(t) > 0$ при $t > 0$, $p_i(0) = 0, g_i(t) > 0$ при $t < 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$, $p_i(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2((0,\alpha))$, $g_j(t) \in C([\beta,0])$, $i = 1,2,3,\ j = 1,2$.

В дальнейшем нам понадобиться связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными $r, \theta, t : x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$.

Задача 1(Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t = 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \quad u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta). \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1,\theta) = \psi_1(\alpha,\theta), \psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta), \psi_2(\beta,\theta) = \varphi_2(1,\theta)$.

Пусть $\frac{a_i(x,t)}{p_3(t)}$, $\frac{b(x,t)}{p_3(t)}$, $\frac{c(x,t)}{p_3(t)} \in C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^1(\Omega_\alpha)$, $d_i(x,t)$, $e(x,t) \in C^1(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, $c(x,t) \leq 0$, $\forall (x,t) \in D_\alpha$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta) \in C(\bar{S}) \cap C^2(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in C(\bar{\Gamma}_\alpha) \cap C^2(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in C(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^2(\Gamma_\beta)$, то задача 1 разрешима.

3 Разрешимость задачи 1

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). Ее решение будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = u_{10}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1n}(r,t)\cos n\theta + u_{2n}(r,t)\sin n\theta), \tag{5}$$

где $u_{10}(r,t)$, $u_{1n}(r,t)$, $u_{2n}(r,t)-$ функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (4) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{gathered} L_1 u \equiv g_1(t)\left(\cos^2\theta u_{10rr} + \frac{\sin^2\theta}{r}u_{10r}\right) + g_2(t)\left(\sin^2\theta u_{10rr} + \frac{\cos^2\theta}{r}u_{10r}\right) - u_{10t} + \\ + d_1(r,\theta,t)\cos\theta u_{10r} + d_2(r,\theta,t)\sin\theta u_{10r} + e(r,\theta,t)u_{10} + \\ + \sum_{i=1}^{2}\left\{ g_1(t)\left[\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right.\right. \\ + \frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin 2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \\ \left. - \frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\right] + g_2(t)\left[\sin^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \right. \\ + \frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} - \sin n\theta u_{2nr}) + \\ \left. + \frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\right] - \cos n\theta u_{1nt} - \\ - \sin n\theta u_{2nt} + d_1\left[\cos\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n})\right] + \\ + d_2\left[\sin\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n})\right] + \\ \left. + e(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\right\} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Теперь полученное выражение (5) сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$\begin{gathered} \frac{(g_1+g_2)}{2}\rho_{10}\left(u_{10rr} + \frac{1}{r}u_{10r}\right) - \rho_{10}u_{10t} + \frac{(g_1-g_2)}{2}d_{10}\left(u_{10rr} - \frac{1}{r}u_{10}\right) + \\ + a_{10}(r,t)u_{10r} + c_{10}(r,t)u_{10} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{(g_1+g_2)}{2}\rho_{jn}(u_{jnrr} + \right.\right. \\ + \frac{1}{r}u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2}u_{jn}) - \rho_{jn}u_{jnt} + \frac{(g_1-g_2)}{2}d_{jn}\left(u_{jnrr} - \frac{1}{r}u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right) + \\ \left.\left. + \frac{(g_2-g_1)n}{2}e_{jn}\left(u_{jnr} - \frac{u_{jn}}{2r}\right) + a_{jn}(r,t)u_{jnr} + c_{jn}(r,t)u_{jn}\right]\right\} = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\rho_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \rho_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin n\theta d\theta,\ d_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho\cos 2\theta \cos n\theta d\theta,$$
$$d_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho\cos 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{1n} = -\int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \sin n\theta d\theta,\ e_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho\sin 2\theta\cos n\theta d\theta,$$
$$a_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho(d_1\cos\theta + d_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta,\ a_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho(d_1\cos\theta + d_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,$$
$$c_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho\left[(d_1\sin\theta - d_2\cos\theta)\frac{n\sin n\theta}{r} + e\cos n\theta\right]d\theta,$$
$$c_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho\left[(d_2\cos\theta - d_1\sin\theta)\frac{n\cos n\theta}{r} + e\sin n\theta\right]d\theta,\ n = 0, 1, \ldots .$$

Далее, рассмотрим бесконечную систему систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_{10}\left(u_{10rr} + \frac{1}{r}u_{10r}\right) - \rho_{10}u_{10t} = 0,\ g(t) = \frac{g_1(t) + g_2(t)}{2}, \tag{7}$$

$$g(t)\rho_{j1}\left(u_{j1rr} + \frac{1}{r}u_{j1r} - \frac{u_{j1}}{r^2}\right) - \rho_{10}u_{j1t} = \frac{(g_2-g_1)d_{10}}{2}\left(u_{10rr} - \frac{u_{10r}}{r}\right) - a_{10}u_{10r} - c_{10}u_{10}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} g(t)\rho_{jn}\left(u_{jnrr} + \frac{1}{r}u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right) - \rho_{jn}u_{jnt} = -\frac{(g_1-g_2)d_{jn}}{2}\left(u_{jn-1rr} - \frac{1}{r}u_{jn-1r} - \right. \\ \left. -\frac{(n-1)^2}{r^2}u_{jn-1}\right) - \frac{(g_2-g_1)(n-1)}{r}e_{jn-1}\left(u_{jn-1r} - \frac{u_{jn-1}}{2r}\right) - \\ -a_{jn-1}u_{jn-1r} - c_{jn-1}u_{jn-1},\ j = 1, 2,\ n = 2, 3, \ldots . \end{gathered} \tag{9}$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10},\, u_{jn}\},\ j = 1, 2,\ n = 1, 2,\ ...-$ решение системы (7)-(9), то оно является и решением уравнения (6).

Далее, учитывая ортогональность [4] систем тригонометрических функций $\{\frac{1}{2},\, \cos n\theta, \sin n\theta,\ n = 1, 2, ...\}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ из краевого условия (3) в силу (4) будем иметь

$$u_{10}(r, \beta) = \varphi_{210}(r),\ u_{10}(1, t) = \psi_{210}(t), \tag{10}$$

$$u_{jn}(r, \beta) = \varphi_{2jn}(r),\ u_{jn}(1, t) = \psi_{2jn}(t),\ j = 1, 2,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

$$\varphi_{210}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta)d\theta,\ \varphi_{210}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta)d\theta,$$

$$\varphi_{21n}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta)\cos n\theta d\theta,\ \psi_{21n}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$\varphi_{22n}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta)\sin n\theta d\theta,\ \psi_{22n}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta)\sin n\theta d\theta,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, задача (1),(3) сведена к системе задач для уравнений (7) -(9) с данными (10) и (11). Теперь будем находить решения этих задач. Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)-(9) можно представить в виде

$$g(t)\left(u^k_{nrr} + \frac{1}{r}u^k_{nr} - \frac{n^2}{r^2}u_n\right) - u_{nt} = f^k_n(r,t), \tag{12}$$

где $f_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r,t) \equiv 0$.

В [5] показана, что краевые задачи для уравнения (12) с условиями (10) и (11) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (7), (10) ($j = 1$, $n = 0$), а затем (8), (11) ($j = 1, 2$, $n = 1$) и т. д. найдем последовательно все $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j = 1, 2, n = 1, 2, \dots$.

Итак, показано, что

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta) L_1 u d\theta = 0. \tag{13}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0- плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty((0,2\pi))-$ плотна в $L_2((0,2\pi))$, а $T(t) \in V_1$, V_1- плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes (0,2\pi) \otimes V_1-$ плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ [6].

Отсюда и из (13) следует, что

$$\int_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t) L_1 u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = 0, \ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1),(3) в области Ω_β является функция (4), где $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j = 1, 2$, $n = 1, 2, \dots$ определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi_2(r,\theta), \psi_2(t,\theta)$, аналогично, как в [3], можно показать, что полученное решение (4) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (4) при $t \to -0$ имеем

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = u_{10}(r,0) + \sum_{n=0}^{\infty} (u_{1n}(r,0)\cos n\theta + u_{2n}(r,0)\sin n\theta), \tag{14}$$

при этом $\tau(r,\theta) \in C(\bar{S}) \cap C^2(S)$.

Следовательно, учитывая краевые условия (14) и (2) приходим в области Ω_α к задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений

$$L_2 u \equiv \sum_{i=1}^{2} p_i(t) u_{x_i x_i} + p_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0,$$

с данными

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \ u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_2(r,\theta),$$

которое имеет единственное решение [7].

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено.

4 Заключение

В работе для трехмерных эллиптико-параболических уравнений с вырождением типа и порядка в цилиндрической области показано разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.

Литература

[1] *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка //Сб. переводов. Математика, 1963.- Т.7. № 6 -С.99-121.

[2] *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. -Новосибирск: НГУ, 1983. - 84 с.

[3] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле для вырождающихся трехмерных эллиптико-параболических уравнений //Журнал Вычислительной и прикладной математика. -Киев, 2014. - №3(117)-С. 17-22.

[4] *Алдашев С.А.* Задача Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений // Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных:Тез. докл. Межд. науч. конф. посв. 100 летию А.В. Бицадзе. - Москва, 2016. - С. 14.

[5] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений // Владикавказский мат. журнал. -2014.- Т.16, № 4. -С. 3-8.

[6] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1976. – 543 с.

[7] *Aldashev S. A., Kitaybekov E.T.* The correctness Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional elliptic equations with type and order extinction // Analysis and Applied Mathematics: Third Intern. Conf. on Institut of Mathematics and Mathematical Modelling. -Almaty: 2016. -P.30.

References

[1] *Fichera G.* For a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of the second order // Coll. translations. Mathematics, 1963.- Vol. 7. No 6 -P. 99-121.

[2] *Vragov V.N.* Boundary value problems for nonclassical equations of Math Physics. -Novosibirsk: NSU, 1983.- 84 p.

[3] *Aldashev S. A.* The correctness of the Dirichlet problem for degenerate elliptic-dimensional parabolic equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. -Kyiv, 2014. -No.3 (117) -P. 17-22.

[4] *Aldashev S. A.* The Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional degenerate elliptic-parabolic equations // Actual problems of the theory of partial differential equations: Abstracts Int. Conf. dedicated to the 100th anniversary of A. Bitsadze. -Moscow, 2016. - P. 14.

[5] *Aldashev S. A.* Correctness of Dirichlet problem for degenerating multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations// Vladikavkaz math. journal. -2014. -Vol. 16, No.4. -P. 3-8.

[6] *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of function theory and functional analysis. –M.: Nauka, 1976. -543 c.

[7] *Aldashev S. A., Kitaybekov E.T.* The correctness Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional elliptic equations with type and order extinction // Analysis and Applied Mathematics: Third Intern. Conf. on Institut of Mathematics and Mathematical Modelling. -Almaty: 2016. -P.30.