УДК 517.938

Молдабек Ж. Т*, Алдибеков Т. М**

Институт математики и механики, Республика Казахстан, Алматы;
Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Республика Казахстан, Алматы
E-mail: *zhanbolat_77@mail.ru, **tamash59@mail.ru

О равномерной оценке снизу решений нелинейной системы дифференциальных уравнений

Методом первого приближения исследуется нелинейная система дифференциальных уравнений в конечномерном векторном пространстве. Рассматривается система первого приближения т.е., линейная система дифференциальных уравнений с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами на бесконечном промежутке. Особые показатели линейной системы дифференциальных уравнений в этом случае принимают критические т.е., нулевые значения, поэтому для применения являются негодными. В работе определяется обобщенный особый нижний показатель линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами. Приводится эквивалентное определение обобщенного особого нижнего показателя линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами. Применяя обобщенный нижний особый показатель линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами, получена равномерная оценка снизу решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в определенном классе нелинейных дифференциальных систем. Приведено достаточное условие неустойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений .
Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, особые показатели, нелинейные дифференциальные системы, оценка решений.

Moldabek Zh.T, Aldibekov T. M

The uniform lower bound of solutions of nonlinear system of differential equations

We study non-linear system of differential equations in finite-dimensional vector space with the method of the first approximation. A system of the first approximation were considered, i.e. a linear system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients on infinite interval. Singular exponents of a linear system of differential equations, in this case taking the critical ie, zero values, so are unsuitable for use. The paper defined the generalized special lower rate of a linear system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients. We present an equivalent definition of a generalized special low index of a linear system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients. Applying a generalized lower specific indicator of a linear system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients obtained uniform lower estimate of solutions of differential equations solving the nonlinear system in a certain class of nonlinear differential systems. Powered sufficient condition for the instability of the zero solution of nonlinear differential equations.
Key words: linear differential systems, singular exponents, nonlinear differential systems, bound of the solutions

Молдабек Ж.Т., Алдибеков Т.М.

Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің төменнен бірқалыпты бағалауы

Ақырлы өлшемді векторлық кеңістікте сызықты емес теңдеулер жүйесі бірінші жуықтау әдісімен зерттеледі. Бірінші жуықтау жүйесі, яғни шексіз аралықта коэффиценттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесі қарастырылады. Дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесінің ерекше көрсеткіштері бұл жағдайда сыни, яғни нөлдік мэн кабылдағандықтан, қолдануға жарамсыз болып қалады. Жұмыста коэффиценттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесінің жалпылама ерекше төменгі көрсеткіші анықталады. Коэффиценттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын сызықты дифференциалдық теңдеулердің жүйесінің жалпылама ерекше төменгі көрсеткішінің эквивалентті анықтамасы беріледі. Коэффиценттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын сызықты дифференциалдық теңдеулердің жүйесінің жалпылама ерекше төменгі көрсеткішін қолдану арқылы дифференциалдық теңдеулердің сызықты емес жүйесінің шешімдерінің сызықты емес жүйелердің белгілі класында төменнен бірқалыпты бағалауы алынды. Дифференциалдық теңдеулердің сызықты емес жүйесінің нөлдік шешімінің орнықсыздығының жеткілікті шарты келтірілген.

Түйін сөздер: сызықты дифференциалдық жүйелер, ерекше көрсеткіштер, сызықты емес дифференциалдық жүйелер, шешімдердің бағалаулары.

Введение

В работе методом первого приближения исследуется нелинейная система дифференциальных уравнений или векторное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = F(t,x), x \in R^n, t \geq t_0$$

где F(t,x) непрерывная по первому аргументу и непрерывно дифференцируемая по второму векторному аргументу векторная функция. Предполагается F(t,0)=0. Векторная функция F(t,x) по векторному аргументу разлагается в точке x=0 по формуле Тейлора и векторное уравнение (0) сводится к векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), x \in R^n, t \in I \equiv [t_0, +\infty), f(t,0) = 0 \quad (0)$$

Как правило, рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений или система первого приближения

$$\dot{x} = A(t)x \quad (00)$$

Среди различных асимптотических характеристик линейной системы отметим верхнее и нижнее особые показатели. Особые показатели линейной системы (00) с непрерывными и ограниченными коэффициентами известны из работ К.П. Персидского [1]. Особые показатели прочны при малых возмущениях, поэтому находят широкое применения в теории устойчивости и в других областях. Позже стало известно, что эти характеристики под названием индекс были введены в работе [2] П. Боль, но осталась незамеченной. Подробное изложение теории особых показателей имеется в [3]. М.Г. Крейном [4] особые показатели распространены к дифференциальным уравнениям в Банаховом пространстве и называются генеральными показателями, там же имеется небольшой обзор. Имеется обзор в [5]. В [6] особые показатели в конечномерном пространстве распространены на линейную систему (00) с непрерывными и неограниченными коэффициентами. Данная работа является продолжением работы [7], где особые показатели в конечномерном пространстве распространяются на линейные системы (00) с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами. В этом случае система первого приближения (00) имеет нулевые особые показатели, поэтому для исследования эти системы они неадекватны. Для исследования таких систем т.е., в критическом случае особых показателей вводятся обобщенные особые показатели и исследуется нелинейные системы дифференциальных уравнений.

Постановка задачи

Определить обобщенные нижние особые показатели линейных систем дифференциальных уравнений. Установить равномерные оценки снизу решений использованием обобщенных нижних особых показателей в определенных классах нелинейных систем дифференциальных уравнений. Установить, что обобщенные особые показатели являются более устойчивыми характеристиками систем дифференциальных уравнений.

bf Линейные системы и определения обобщенного нижнего особого показателя или особого показателя относительно q.

П. Боль, изучая вопрос об устойчивости при постоянно действующих возмущениях пришел к понятию индекса. Индекс отличается знаком от верхнего особого показателя введенным К.П. Персидским. Нижний особый показатель П. Боль не рассматривал. П. Боль установил устойчивость верхнего особого показателя при малых возмущениях. К.П. Персидский пришел к понятию верхнего особого показателя, в связи с изучением вопроса об асимптотической устойчивости решений нелинейных конечных систем уравнений с нестационарной главной линейной частью. Следует отметить, что рассуждения П. Боля, отличаются от рассуждений К.П. Персидского. М.Г. Крейн распространил понятие особого показателя на линейные однородные уравнения с ограниченным переменным операторным коэффициентом в банаховом пространстве и выяснил роль отрицательности при изучении ограниченных решений неоднородного уравнения с ограниченным свободным членом. В данной работе исследуется дифференциальные системы, для которых понятия особых показателей не применимы. Определяются адекватные асимптотические характеристики в таких случаях. Ранее изучались, как правило верхние оценки решений. В данной работе получена нижняя оценка решений дифференциальных систем в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений. Рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A\,(t)\,x, \quad x \in R^n, \;\; t \geq t_0 \tag{1}$$

где матрица $A(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$\|A\,(t)\,\| \leq C_A \varphi(t), \;\; t \geq t_0 \tag{2}$$

где C_A-постоянная, зависящая от выбора матриц A, $\varphi(t)-$ положительная непрерывная функция на промежутке $[t_0, +\infty]$ такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$ и интеграл $I(\varphi) = \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(s)ds$ расходится.

Обозначим

$$q\,(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi\,(s)\,ds. \tag{3}$$

Определение 1. Постоянная $n(q)$ называется обобщенной нижней относительно q для системы (1) с условием (2), если для любого $\varepsilon > 0$ для всех ненулевых решений $x(t)$ системы (1) осуществляются оценки

$$d_{n,\varepsilon} exp\left\{[n(q) - \varepsilon]q(t)\right\} \leq \frac{|x(t)|}{|x(s)|} \tag{4}$$

для всех $t \geq s \geq t_0$, где $d_{n,\varepsilon}$−константа, зависящая от выбора ε, $n(q)$ и функция $q(t)$ определена по формуле (3).
Множество $\{n(q)\}$ обобщенных верхних функций системы (1) называется нижним классом системы (1) относительно q и обозначается символом $H_0\,(A, q)$.

Определение 2. Число

$$\omega_0(A, q) = \sup_{n(q) \in H_0(A,q)} n(q) \tag{5}$$

называется обобщенным нижним особым показателем системы (1) относительно $q(t)$.
Примечание 1. Если рассматриваются линейные системы (1) с непрерывными ограниченными коэффициентами без условия (2) и $q(t) = t$, то обобщенные особые показатели превращаются в числа, введенные Болем-Персидским.
Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $d_\varepsilon > 0$ и для матрицы Коши линейной системы (1) с условием (2) выполняется неравенство

$$d_\varepsilon e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon][q(t)-q(t_0)]} \leq |X(t, t_0)| \tag{6}$$

при всех $t \geq t_0$.
Примечание 2. Особые показатели Боля и Персидского системы (1) удовлетворяющие условию (2) равны нулю, т.е. имеют места критические случаи. Заметим, что для обобщенного нижнего особого показателя системы (1) относительно q, удовлетворяющие условию (2) имеет место равенство

$$\omega_0(A, q) = \varliminf_{t-s\to\infty} \frac{\ln|X(t, s)|}{q(t) - q(s)} \tag{7}$$

В самом деле из (6) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ для всех $t \geq s \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\frac{lnd_\varepsilon}{q(t) - q(s)} + \omega_0(A, q) - \varepsilon \leq \frac{\ln|X(t, s)|}{q(t) - q(s)}$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\exists\gamma \equiv \varliminf_{t-s\to\infty} \frac{\ln|X(t, s)|}{q(t) - q(s)} \geq \omega_0(A, q) - \varepsilon$$

Отсюда устремляя $\varepsilon \to \infty$, получаем неравенство

$$\omega_0(A, q) \leq \gamma \tag{8}$$

Обратно, так как

$$\gamma = \varliminf_{t-s\to\infty} \frac{\ln|X(t,s)|}{q(t)-q(s)}$$

то, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{t} - \bar{s} \geq 0$ и для всех $t - s \geq \bar{t} - \bar{s} \geq 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\ln|X(t,s)|}{q(t)-q(s)} \geq \gamma - \varepsilon$$

или

$$|X(t,s)| \geq \exp\left[(\gamma-\varepsilon)(q(t)-q(s))\right]$$

для всех $t - s \geq \bar{t} - \bar{s} \geq 0$. Учитывая отрезок $[t_0, \bar{t}]$, получаем, что для $\varepsilon > 0$ существует $\overline{d}_\varepsilon > 0$ и для матрицы Коши линейной системы (1) с условием (2) выполняется неравенство

$$|X(t,s)| \geq \overline{d}_\varepsilon e^{(\gamma-\varepsilon)(q(t)-q(s))}$$

при всех $t \geq s \geq t_0$. Так как число $\omega_0(A, q)$ точная верхняя грань чисел осуществляющее такую оценку, то имеет место неравенство

$$\omega_0(A, q) \geq \gamma \tag{9}$$

В силу (8) и (9) имеет место равенство (7).

Нелинейная система дифференциальных уравнений и оценка снизу решений в классе $\mathbf{L}(\varphi(\mathbf{t}))$.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A\,(t)\,x + f(t,x) \quad t \in I \equiv [t_0; +\infty), \;\; x \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

где матрица $A(t)$ непрерывна при $t \geq t_0$ и удовлетворяет условию (2), векторная функция $f(t,x)$ непрерывна в области $G = I \times \mathbb{R}^n$ и $f(t,0) = 0$.
Обозначим через $L(\varphi(t))$ класс векторных функций $f(t,x)$ удовлетворяющих неравенству

$$|f(t,x)| \leq \delta(t)|x|, \tag{11}$$

где норма возмущения, непрерывная функция $\delta(t)$ при $t \geq t_0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\delta(t)}{\varphi(t)} = 0 \tag{12}$$

Теорема 1. Если в нелинейной системе дифференциальных уравнений (10), для системы первого приближения (1) выполняется условие (2) и возмущения $f(t,x) \in L(\varphi(t))$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $d_\varepsilon > 0$ такое, что для всех ненулевых решений системы (10) равномерно выполняются неравенство

$$|x(t)| \geq d_\varepsilon |x(t_0)| e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon][q(t)-q(t_0)]}$$

при всех $t \geq t_0$.

Доказательство

Как известно, решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (10), удовлетворяют уравнению

$$x(t) = X(t, t_0)\, x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,s) f(s, x(s)) ds. \tag{13}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из (6) вытекает неравенство

$$|X(t,t_0)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(t_0)]} \tag{14}$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon/3, 1 \geq d_{\varepsilon_1} > 0$$

Используя (11) и (14) оценивая по норме (13) получим неравенство

$$|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(t_0)]} |x(t_0)| - \int\limits_{t_0}^{t} |X(t,s)|\delta(s)|x(s)| ds \tag{15}$$

при всех $t \geq s \geq t_0$. Из (15) вытекает неравенство

$$e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)}|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t_0)}|x(t_0)| - e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} |X(t,s)|\delta(s)|x(s)| ds \tag{16}$$

Пологая

$$a(t) \equiv e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)} \tag{17}$$

из (16) получим неравенство в следующем виде

$$a(t)|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} a(t_0)|x(t_0)| - a(t) \int\limits_{t_0}^{t} |X(t,s)|\delta(s)|x(s)| ds$$

или

$$a(t)|x(t)| + a(t) \int\limits_{t_0}^{t} |X(t,s)|\delta(s)|x(s)| ds \geq d_{\varepsilon_1} a(t_0)|x(t_0)| \tag{18}$$

Из (18) в силу (14) вытекает следующие неравенства

$$a(t)|x(t)| + a(t)\int\limits_{t_0}^{t} |X(t,s)|\delta(s)|x(s)|ds - d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)| \geq a(t)|x(t)| + \tag{19}$$

$$+a(t)\int\limits_{t_0}^{t} d_{\varepsilon_1}e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(s)]}\delta(s)|x(s)|ds - d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)| \geq 0$$

и рассмотрим неравенство

$$a(t)|x(t)| + a(t)\int\limits_{t_0}^{t} d_{\varepsilon_1}e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(s)]}\delta(s)|x(s)|ds - d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)| \geq 0 \tag{20}$$

В (20) выносим функцию $e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)}$ из под знака интеграла и учитывая, что $a(s) \equiv e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(s)}$ получим неравенство

$$a(t)|x(t)| + a(t)\int\limits_{t_0}^{t} d_{\varepsilon_1}a(s)\delta(s)|x(s)|ds - d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)| \geq 0. \tag{21}$$

Положим

$$\nu(t) = a(t)|x(t)| \tag{22}$$

Теперь используя интегральное уравнение

$$I(\nu) \equiv \nu(t) + \int\limits_{t_0}^{t} d_{\varepsilon_1}\nu(s)\delta(s)ds - C = 0 \tag{23}$$

оценим неравенство (21), где $C = d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)|$ константа. Из (23) переходя к дифференциальному уравнению получим

$$\dot{\nu}(t) + d_{\varepsilon_1}\delta(t)\nu(t) = 0$$

Отсюда, интегрируя получаем, что

$$\nu(t) = Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} d_{\varepsilon_1}\delta(\tau)d\tau} \tag{24}$$

Заметим, что при $\nu_2(t) \geq \nu_1(t)$ имеет место

$$I[\nu_2] \geq I[\nu_1]$$

Следовательно, из (21) вытекает, что имеет место неравенство

$$a(t)|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)|e^{-\int\limits_{t_0}^{t} d_{\varepsilon_1}\delta(\tau)d\tau} \tag{25}$$

Из (25) в силу (17) и учитывая, что $1 \geq d_{\varepsilon_1} > 0$ имеем

$$e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)}|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t_0)}|x(t_0)| e^{-\int\limits_{t_0}^{t} d_{\varepsilon_1}\delta(\tau)d\tau} \geq d_{\varepsilon_1} e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t_0)}|x(t_0)| e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \delta(\tau)d\tau} \tag{26}$$

Из (26) вытекает неравенство

$$|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(t_0)]-\int\limits_{t_0}^{t} \delta(\tau)d\tau} |x(t_0)| \tag{27}$$

Из (12) вытекает, что существует такое $T > t_0$ и для $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon/3)$ имеет место неравенство

$$\delta(t) \leq \varepsilon_2 \varphi(t)$$

при $t \geq T$ Поэтому в силу (3) из (27) вытекает, что имеет место неравенство

$$|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} d_{\varepsilon_2} e^{\int\limits_{t_0}^{t}[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1-\varepsilon_2]dq} |x(t_0)| \tag{28}$$

где $d_{\varepsilon_2} = e^{-\int\limits_{t_0}^{T}\delta(\tau)d\tau} > 0$.
Теперь, полагая $d_\varepsilon = d_{\varepsilon_1} d_{\varepsilon_2}$ и учитывая, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$ из (28) получаем, что равномерно для всех ненулевых решений системы (6) имеет место неравенство

$$|x(t)| \geq d_\varepsilon |x(t_0)| e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon][q(t)-q(t_0)]}$$

при всех $t \geq t_0$. Теорема 1 доказана.
Легко устанавливается следующее утверждение.

Теорема 2. Если линейная система (1) с условием (2) имеет положительный обобщенный нижний особый показатель т.е., $\omega_0(A, q) > 0$, то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (10), где $f(t, x) \in L(\varphi(t))$, является неустойчивым по Ляпунову при $t \to \infty$.
Примечание 3. Результаты полученные в работе [7] и в данной работе показывают, что обобщенные особые показатели верхнее и нижнее являются устойчивыми асимптотическими характеристиками дифференциальных систем.

Заключение

Определены обобщенные нижние особые показатели линейных систем дифференциальных уравнений. Установлены равномерные оценки снизу решений использованием обобщенных нижних особых показателей в определенных классах нелинейных систем дифференциальных уравнений. Установлены, что обобщенные особые показатели являются более устойчивыми характеристиками систем дифференциальных уравнений.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантового финансирование научной программы №311 от 13.05.2016

Литература

[1] *Персидский К.П.* Об устойчивости движения по первому приближению // Математический сборник. - 1933. - Т. 40, №3. – с. 284-292.

[2] *Bohl P.* Uber Differentialgleichungen // J. Reine und angew. Math. – 1913. –B. 144. – p. 284-318.

[3] *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. - М., 1966.- 576 с.

[4] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1970. - 536 с.

[5] *Изобов Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Математический анализ. Итоги науки и техники. - 1974. - Т. 12. - С. 71-146.

[6] *Алдибеков Т.М.* Обобщенные центральные и обобщенные особые показатели системы дифференциальных уравнений. // Математически журнал ИМ МОН РК. 2003.- Т. 3, №1(7). - С.15-18.

[7] *Aldibekov T.M., Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M.* Generalized singular exponent's linear system of differential equations // KazNU BULLETIN. Mathematics, Mechanics and Computer Science Series. 1(88) 2016. P.47-54.

References

[1] *Persidskii K.P.* On the stability of motion in the first approximation // Matematical collection. - 1933. - V. 40, №3. – p. 284-292.(in Russian)

[2] *Bohl P.* Uber Differentialgleichungen // J. Reine und angew. Math. – 1913. –B. 144. – p. 284-318.

[3] *Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemyskii V.V.* The theory of Lyapunov exponents and its application to stability issues. - M., 1966.- 576 p. (in Russian)

[4] *Daletskii Y.L., Krein M.G.* Stablitity of solutions of differential equations in a Banach space. - M., Nauka, 1970. – 536 p. (in Russian)

[5] *Izobov N.A.* Linear systems of ordinary differential equations // Matematical analysis. The results of science and technology. - 1974. – Vol. 12. – p. 71-146. (in Russian)

[6] *Aldibekov T.M.* Generalized central and generalized singular exponents of the system of differential equations // Mathematical journal IM MES RK. 2003.- Vol.3, No.1(7). - p.15-18.

[7] *Aldibekov T.M. ,Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M.* Generalized singular exponent's linear system of differential equations // KazNU BULLETIN. Mathematics, Mechanics and Computer Science Series. 1(88) 2016. P.47-54.