1-бөлім Раздел 1 Section 1
Математика Математика Mathematics

ГРНТИ 27.29.17, 27.29.23

Несобственные интегралы в теории устойчивости многомерных регулируемых систем

Айсагалиев С.А. – доктор технических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77272211573,
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Аязбаева А.М. – младший научный сотрудник научно-исследовательского института математики и механики Казахского национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику нелинейных регулируемых систем, правая часть которых содержит нелинейные функции из заданного множества. Такая неопределенность правой части порождает неединственность решения, что приводит к необходимости исследования групповых свойств решений системы. Одним из таких свойств является абсолютная устойчивость тривиального решения, т.е. свойства при котором все решения, исходящие из любой начальной точки при любых нелинейных функциях из заданного множества, стремятся с течением времени к положению равновесия. Предлагается совершенно новый метод исследования абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем без привлечения каких-либо функций Ляпунова и частотных теорем, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Неособым преобразованием уравнение движения системы приводится к специальному виду, который позволяет представить подынтегральную функцию несобственных интегралов в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое является квадратичной формой приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое полный дифференциал функции по времени. Такое представление подынтегральной функции, в конечном счете, приводит к легко проверяемым критериям абсолютной устойчивости.
Ключевые слова: Неособое преобразование, несобственные интегралы, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана, секторы абсолютной устойчивости.

Көпөлшемді басқарылатын жүйелердің орнықтылық теориясындағы меншіксіз интегралдар

Айсағалиев С.Ә. – техника ғылымдарының докторы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, дифференциалдық теңдеулер және басқару теориясы кафедрасының профессоры, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Аязбаева А.М. – әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика ғызыми-зерттеу институтының кіші ғылыми кызметкері, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

Сызықты емес басқарылатын жүйелердің динамикасын сипаттайтын, оң шеті берілген жиынның сызықты емес функцияларын қамтитын жай дифференциалдық теңдеулер классы қарастырылады. Оң шетінің мұндай анықталмағандығы шешімнің жалғыз еместігін тудырады, сонымен қатар, жүйенің шешімдерінің топтық қасиеттерін зерттеу қажеттілігіне әкеледі. Мұндай қасиеттердің бірі тривиал шешімнің абсолютті орнықтылығы болып табылады, яғни, берілген жиынның кез келген сызықты емес функцияларында кез келген бастапқы нүктеден шығатын шешімдердің барлығы уақыт өте келе тепе-теңдік жағдайына келетін қасиеті орындалу керек. Жүйенің шешімінің бойында меншікті интегралдарды бағалау жолымен қандайда бір жиіліктік теоремалары мен Ляпунов функциясын қолданбай-ақ, сызықты емес басқарылатын жүйелердің абсолютті орнықтылығын зерттеудің жаңа әдісі ұсынылады. Ерекше емес түрлендіру арқылы жүйенің қозғалыс теңдеуі меншіксіз функциялардың интеграл астындағы функциясын екі қосылғыштың қосындысы ретінде көрсетуге мүмкіндік беретін арнайы түрге келтіріледі. Бірінші қосылғыш диагонал түрге келтірілген квадраттық форма болып табылады, ал екінші қосылғыш уақыт бойынша функцияның толық дифференциалы. Интеграл астындағы функцияның мұндай түрі, ақыры соңында, абсолютті орнықтылықтың оңай текселіретін критерийлеріне келеді.
Түйін сөздер: Ерекше емес түрлендіру, меншіксіз интегралдар, абсолютті орнықтылық, Айзерман есебі, абсолютті орнықтылықтың секторлары.

Improper integrals for stability theory of multidimensional regulated systems

Aisagaliev S.A. – Doctor of Technical Science of Differential equations and Control theory Department, Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Ayazbayeva A.M. – Junior Researcher of the Research Institute of Mathematics and Mechanics of al-Farabi Kazakh National University, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

A class of ordinary differential equations described the dynamics of nonlinear regulated systems the right-hand part of which contains the nonlinear functions of the given set is considered. The uncertainty of the right-hand side arises the non-uniqueness of the solution, that leads to the necessity to study the group properties of solutions of the system. One such property is the absolute stability of the trivial solution, i.e. properties at which all decisions coming from any starting point for any non-linear functions of the given set tend over time to an equilibrium position. A completely new method for the study of absolute stability of nonlinear regulated systems without involving any Lyapunov functions and frequency theorems is proposed by evaluating improper integrals along the solutions of the system. The motion equations of the system is led to a special form by non-singular transformation, which allows to represent the integrand improper integrals as the sum of two terms. The first term is a quadratic form reduced to the diagonal form, and the second term is the total differential function on time. The representation of the integrand, ultimately, leads to easily verifiable criteria for absolute stability.
Key words: Nonsingular transformation, improper integrals, absolute stability, Aizerman problem, absolute stability sectors.

1 Введение

Рассматривается уравнение движения регулируемых систем следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A, $|x_0| < \infty$, $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m))$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

Функция

$$\begin{gathered}\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) | 0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \\ \le \mu_{0i}\sigma_i^2, \ \forall \sigma_i, \ \sigma_i \in R^1, \ \varphi(0) = 0, \ \ |\varphi(\sigma)| \le \varphi_*, \ \forall \sigma, \ \sigma \in R^m, \ 0 < \varphi_* < \infty\},\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m}) > 0$ – диагональная матрица порядка $m \times m$, $|\cdot|$ – евклидова норма, $\varphi_* = const > 0$, $(*)$ – знак транспонирования. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами и для таких систем вектор функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (2).

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Если матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $x_* = 0$.

Заметим, что положению равновесия соответствует тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2). В статье, исследуется асимптотическая устойчивость в целом невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ при любом $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Полагаем, что при достаточно малой окрестности точки $\sigma = \sigma_* = 0$, функцию $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ можно аппроксимировать линейной функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $0 < \mu_i \le \mu_{0i}$, $i = \overline{1,m}$. Следовательно, при $|\sigma| < \delta$, $\delta > 0$ – достаточно малое число, уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x, \;\; x(0) = x_0, \;\; |x_0| < \infty, \;\; t \in I,$$

где $A_1(\mu) = A + B\mu S$, $0 < \mu_i \le \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $\overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – предельное значение, μ_i, $i = \overline{1,m}$ определяемое из гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$.

Если матрица $A_1(\mu)$, $0 < \mu_i \le \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – гурвицева, то существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $|x(t)| < \varepsilon_1$ при $|x_0| < \delta_1$, более того, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Таким образом, когда матрица $A_1(\mu)$, где $0 < \mu_i \le \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – гурвицева, то тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$.

Определение 1 *Тривиальное решение* $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ *системы* (1), (2) *называется абсолютно устойчивым, если: 1) матрицы* A, $A_1(\mu)$ *– гурвицевы, где* $0 < \mu_i \le \mu_{0i} < \overline{\mu}_{0i}$, $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m})$; *2) для всех* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *– решение дифференциального уравнения* (1) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0$, $|x_0| < \infty$.

Иными словами, тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если оно асимптотически устойчиво в целом для любого $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Определение 2 *Условиями абсолютной устойчивости системы* (1), (2) *называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы* (A, B, S, μ_0), *при выполнении которых положение равновесия* $x_* = 0$ *абсолютно устойчиво.*

Кроме (2) рассмотрим следующее включение

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) | \varepsilon_i\sigma_i^2 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \\ \le r_{0i}\sigma_i^2, \;\; i = \overline{1,m}, \; \forall\sigma_i, \; \sigma_i \in R^1, \; \varphi(0) = 0, \;\; \varphi_i(\sigma_i) = \varepsilon_i\sigma_i + \varphi_{0i}(\sigma_i), \;\; i = \overline{1,m}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Из (3), в частности, когда $r_{0i} = r_{i0} + \varepsilon_i$, $i = \overline{1,m}$, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \varphi_0(\sigma)$, где $\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) > 0$, $\varphi_0(\sigma) = (\varphi_{01}(\sigma), \ldots, \varphi_{0m}(\sigma_m))$, имеем

$$\begin{aligned} &\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi_0(\sigma) \in C(R^m, R^m) | 0 \le \varphi_{0i}(\sigma_i)\sigma_i \le r_{i0}\sigma_i^2, \;\; i = \overline{1,m}, \\ &\forall\sigma_i, \; \sigma_i \in R^1, \; \varphi(0) = 0, \;\; \varphi_0(\sigma) \le \varphi_{0*}, \;\; \forall\sigma, \; \sigma \in R^m, \;\; 0 < \varphi_{0*} < \infty\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Определение 3 *Будем говорить, что функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi$ *принадлежит сектору* $[\varepsilon, r_0]$, $\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $r_0 = diag(r_{01}, \ldots, r_{0m})$, *если* $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \varphi_0(\sigma)$, $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$.

Как следует из включений (3), (4), в случае $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \varphi_(\sigma) \in \Phi$, где $\varphi_(\sigma) \in \Phi_1$ уравнение движения (1) запишется так

$$\dot{x} = (A + B\varepsilon S)x + B\varphi_0(\sigma), \ \ \sigma = Sx, \ \ x(0) = x_0, \ \ t \in I. \tag{5}$$

Определение 4 *Будем говорить, что в секторе* $[\varepsilon, r_0]$ *проблема Айзермана имеет решение, если: 1)* $r_0 = \overline{\overline{\mu}}_0$, *где* $\overline{\overline{\mu}}_0 = diag(\overline{\overline{\mu}}_{01}, \ldots, \overline{\overline{\mu}}_{0m})$, $\overline{\overline{\mu}}_0 = \overline{\mu}_0 - \delta$, $\delta = diag(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, $\delta_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ *– сколь угодно малые числа;* $\overline{\mu}_0$ *– предельная диагональная матрица гурвицевости; 2) для любого* $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\varepsilon \le \mu_i \le r_{0i}$, $i = \overline{1,m}$ *– решение системы* (1) *асимптотически устойчиво; 3) для любого* $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$ *тривиальное решение системы* (4), (5) *абсолютно устойчиво.*

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *Найти условие абсолютной устойчивости положения равновесия системы* (1), (2).

Задача 2 *Найти условие абсолютной устойчивости тривиального решения системы* (4), (5).

Задача 3 *Найти сектор* $[\varepsilon, r_0]$, *где тривиальное решение системы* (4), (5) *абсолютно устойчиво и проблема Айзермана имеет решение.*

2 Обзор литературы

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критическом случаях посвящено много работ. Среди них следует отметить монографии (Айзерман, 1963), (Лурье, 1951), (Попов, 1970), (Гелиг 1978). Существует два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье (Лурье, 1951) и метод В.М. Попова (Попов, 1970). Связь между этими методами установлена в работах В.А. Якубовича и его учеников (Гелиг 1978). Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей" . В конечном счете метод А.И. Лурье приводит к проверке разрешимости матричных неравенств. Естественно, довольно сложно применить такой подход для решения прикладных задач из-за неопределенности выбора произвольных постоянных в условиях абсолютной устойчивости.

Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси (Айсагалиев, 1969 : 38-48), (Айсагалиев, 1970 : 83-94).

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему (Айзерман М.А., 1949 : 186-188): пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \le \mu \le \mu_0$,

$\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1)/0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0\sigma^2,\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Айзермана была решена для систем второго порядка И.Г. Малкиным, Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема (Kalman, 1957 : 553-556): Пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu x$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1)/0 \leq \dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_0,\ \ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Калмана имеет положительные решение при $n = 2$.

Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая $n > 2$. В работе (Брагин, 2011 : 3-36) предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

В работах (Айсагалиев, 1994 : 748-757), (Айсагалиев, 2000), (Айсагалиев, 2012), (Aisagaliev, 2013 : 159-175) приведены результаты новых исследований абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований для систем со многими нелинейностями.

3 Материал и методы

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия многомерных нелинейных регулируемых систем состоящий из следующих разделов: неособое преобразование, свойства решений, оценки несобственных интегралов, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода является получение тождеств вдоль решения системы относительно входных и выходных переменных нелинейных элементов. Эти тождества позволяют использовать сведения о свойствах нелинейностей для оценки несобственных интегралов. При таком подходе к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем удается получить дополнительные соотношения, связывающие фазовые переменные, что позволяет получить более эффективные условия абсолютной устойчивости.

3.1 Неособое преобразование

Для простоты проверки предлагаемого условия абсолютной устойчивости целесообразно преобразовать исходное уравнение движения (1). Пусть матрица $B = \|B_1, \ldots, B_m\|$, где B_i, $i = \overline{1, m}$ – векторы столбцы $n \times 1$.

Лемма 1 *Пусть вектор-строка $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$ такие, что:*

$$\theta_i^* B_i = 1,\ \theta_i^* B_j = 0,\ \ j = \overline{1, m},\ \ i \neq j, \tag{6}$$

где $B_i \neq B_j$, $i \neq j$, $(*)$ *– знак транспонирования. Тогда вдоль решения уравнения* (1) *верно тождество*

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \varphi_i(\sigma_i(t)), \ \ t \in [0, \infty), \ \ i = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Если, кроме того, ранг $B^* = m$ *и определитель Грама*

$$\Gamma(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \begin{vmatrix} <\theta_1, \theta_1> & <\theta_1, \theta_2> & \ldots & <\theta_1, \theta_m> \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ <\theta_m, \theta_1> & <\theta_m, \theta_2> & \ldots & <\theta_m, \theta_m> \end{vmatrix} \neq 0, \tag{8}$$

то векторы θ_i, $i = \overline{1, m}$ *существует и они линейно независимы, где* $<\theta_i, \theta_j>$ *– скалярное произведение векторов* θ_i, θ_j, $i, j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Поскольку $\theta_i^* = (\theta_{i1}, \ldots, \theta_{in})$, $i = \overline{1, m}$, то умножая слева тождество $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ на θ_i^* имеем

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \theta_i B \varphi(\sigma(t)), \ \ t \in I, \ \ i = \overline{1, m},$$

где $\theta_i^* B = (\theta_i^* B_1, \ldots, \theta_i^* B_m)$. Отсюда, с учетом (6), получим (7). Заметим, что соотношение (6) запишется в виде линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} \theta_{i1} B_{11} + \theta_{i2} B_{12} + \ldots + \theta_{in} B_{1n} = 0, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \theta_{i1} B_{i1} + \theta_{i2} B_{i2} + \ldots + \theta_{in} B_{in} = 1, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \theta_{i1} B_{m1} + \theta_{i2} B_{m2} + \ldots + \theta_{in} B_{mn} = 0, \ \ i = \overline{1, m}. \end{gathered}$$

Если ранг $B^* = m$, то данная система уравнений имеет решение, θ_i, $i = \overline{1, m}$. Из условия (8) следует, что векторы θ_i, $i = \overline{1, m}$ линейно независимы. Лемма доказана.

Лемма 2 *Пусть вектор* $\theta_0 \in R^n$ *такой, что* $\theta_0^* B_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, *где* $B_i \neq B_j$, $i \neq j$. *Тогда вдоль решения уравнения* (1) *верно тождество*

$$\theta_0^* \dot{x}(t) = \theta_0^* A x(t), \ \ t \in I. \tag{9}$$

Если, кроме того, ранг $B^* = m$ *и определитель Грама*

$$\Gamma(\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n-m}) = \begin{vmatrix} <\theta_{01}, \theta_{02}> & \ldots & <\theta_{01}, \theta_{0n-m}> & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ <\theta_{0n-m}, \theta_{01}> & \ldots & <\theta_{0n-m}, \theta_{0n-m}> & \end{vmatrix} \neq 0, \tag{10}$$

то векторы $\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n-m}$ *существуют и они линейно независимы, где* θ_{0i}, $i = \overline{1, n-m}$ *получены из* θ_0 *путем выбора* $(n - m)$ *– произвольных компонентов вектора* θ.

Доказательство. Пусть вектор $\theta_0 = (\theta_{10}, \ldots, \theta_{n0}) \in R^n$. Тогда соотношение $\theta_0^* B_i = 0$, $i = \overline{1, m}$ запишется так

$$\theta_{10} B_{11} + \ldots + \theta_{n0} B_{1n} = 0, \ldots, \theta_{10} B_{m1} + \ldots + \theta_{n0} B_{mn} = 0. \tag{11}$$

Если ранг $B^* = m$, то система (11) имеет решение $\theta_0 = \theta_0(\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n,0})$, где $\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n0}$ – любые числа. Определим векторы $\theta_{01} \in R^n, \dots, \theta_{0n-m} \in R^n$ путем выбора произвольных чисел $\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n0}$. В частности, $\theta_{01} = \theta_0(1, 0, \dots, 0)$, $\theta_{02} = \theta_0(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\theta_{0n-m} = \theta_0(0, \dots, 0, 1)$.

Умножая слева тождество (1) на θ_0^* получим (9). По условию леммы выполнено неравенство (10). Следовательно, векторы $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$ линейно независимы. Так как $\theta_{0i}^* B_i = 0$, $i = \overline{1, n-m}$, то тождество (9) равносильно тому, что

$$\theta_{0i}^* \dot{x}(t) = \theta_{0i}^* A x(t), \quad t \in I, \quad i = \overline{1, n-m}. \tag{12}$$

Лемма доказана.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta_1, \dots, \theta_m \ \ \theta_{01}, \dots, \theta_{0n-m}\| \tag{13}$$

порядка $n \times n$ равен n. Тогда уравнение (1) равносильно следующей системе уравнений

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n + \varphi_1(\sigma_1), \dots, \dot{y}_m = c_{m1} y_1 + \ldots + c_{mn} y_n + \varphi_m(\sigma_m), \\ \dot{y}_{m+1} = c_{m+1,1} y_1 + \ldots + c_{m+1,n} y_n, \dots, \dot{y}_n = c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n, \\ \sigma_1 = d_{11} y_1 + \ldots + d_{1n} y_n, \dots, \sigma_m = d_{m1} y_1 + \ldots + d_{mn} y_n, \end{gathered} \tag{14}$$

где $y_i = \theta_i^* x$, $i = \overline{1, m}$, $y_{m+i} = \theta_{0i}^* x$, $i = \overline{1, n-m}$.

Доказательство. Так как ранг $R = n$, то из (13) следует, что векторы $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$, $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$ образует базис в R^n. Тогда векторы

$$\begin{aligned} &\theta_1^* A x = c_{11} \theta_1^* x + \ldots + c_{1m} \theta_m^* x + c_{1m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{1n} \theta_{0n-m}^* x, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\theta_m^* A x = c_{m1} \theta_1^* x + \ldots + c_{m,m} \theta_m^* x + c_{m,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{mn} \theta_{0n-m}^* x, \\ &\theta_{01}^* A x = c_{m+1,1} \theta_1^* x + \ldots + c_{m+1,m} \theta_m^* x + c_{m+1,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{m+1,n} \theta_{0n-m}^* x, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\theta_{0n-m}^* A x = c_{n1} \theta_1^* x + \ldots + c_{nm} \theta_m^* x + c_{n,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{n,n} \theta_{0n-m}^* x, \end{aligned} \tag{15}$$

где c_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ коэффициенты разложения $A^* \theta_i$, $i = \overline{1, m}$, $A^* \theta_{0i}$, $i = \overline{1, n-m}$ по базисам $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$, $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$. Из (15) с учетом (7), (9), (12) получим систему уравнений (14) относительно переменных $y_1, \dots, y_n$.

Аналогично, путем разложения векторов $S_i^* \in R^n$ по базисам θ_i, $i = \overline{1, m}$, θ_{0i}, $i = \overline{1, n-m}$ получим

$$\sigma_1 = S_1 x = d_{11} \theta_1^* x + \ldots + d_{1m} \theta_m^* x + d_{1m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + d_{1n} \theta_{0n-m}^* x,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\sigma_m = S_m x = d_{m1} \theta_1^* x + \ldots + d_{m,m} \theta_m^* x + d_{m,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + d_{m,n} \theta_{0n-m}^* x,$$

где $S^* = (S_1^*, \dots, S_m^*)$. Лемма доказана.

Система уравнений (14) в векторной форме имеет вид

$$\dot{y} = C y + E \varphi(\sigma), \quad \sigma = D y, \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0, \tag{16}$$

где C, E, D – постоянные матрицы порядков $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$ соответственно, $C = \|c_{ij}\|$, $i,j = \overline{1,n}$, $D = \|d_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $E = \begin{pmatrix} I_m \\ O_{n-m,m} \end{pmatrix}$, I_m – единичная матрица порядка $m \times m$, $O_{n-m,m}$ – матрица порядка $(n-m)\times m$ с нулевыми элементами. Если матрица $K = R^*$, то $y = Kx = R^*x$, $x = K^{-1}y = (R^*)^{-1}y$, матрицы C, E, D равны $C = KAK^{-1} = (R^*)^{-1}AR^{-1}$, $D = SK^{-1} = S(R^*)^{-1}$, $E = KB = R^*B$. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) с нелинейностями (2) с неособым преобразованием $x = K^{-1}y = (R^*)^{-1}y$ приводится к виду (16).

3.2 Свойства решений

Рассмотрена ограниченность решений системы (1), (2), а также уравнений (16). Получены тождества вдоль решения уравнения (16) и исследовано ее асимптотическое свойство.

Теорема 1 *Пусть матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$ и выполнены условия лемм 1 – 3. Тогда верны оценки:*

$$|x(t)| \le c_0,\ |\dot{x}(t)| \le c_1,\ t \in I, \tag{17}$$

$$|y(t)| \le c_2,\ |\dot{y}(t)| \le c_3,\ t \in I, \tag{18}$$

$$|\sigma(t)| \le c_4,\ |\dot{\sigma}(t)| \le c_5,\ t \in I, \tag{19}$$

где $c_i = const > 0$, $c_i < \infty$, $i = \overline{0,5}$. Кроме того, функции $x(t)$, $y(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ равномерно непрерывны.

Доказательство. Так как матрица $C = KAK^{-1}$, то из гурвицевости матрицы A следует гурвицевость матрицы C, т.е. $Re\lambda_j(A) = Re\lambda_j(C) < 0$, $j = \overline{1,n}$. Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau,\ t \in I.$$

Заметим, что из гурвицевости матрицы A следует оценка $\|e^{At}\| \le ce^{(a+\varepsilon)t}$, $c = c(\varepsilon) > 0$, $\forall t$, $t \in I$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, величина $a = \max\limits_{1\le j\le n} Re\lambda_j(A) < 0$. Тогда

$$|x(t)| \le \|e^{At}\|\ |x_0| + \int\limits_0^t \|e^{A(t-\tau)}\|\ \|B\|\ |\varphi(\sigma(\tau))|d\tau \le$$

$$\le c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t}\ \|B\|\varphi_* \int\limits_0^t e^{-(a+\varepsilon)\tau}\ d\tau =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t}\ + ce^{(a+\varepsilon)t}\ \|B\|\varphi_*[-\frac{1}{a+\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}] =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}c\|B\|\varphi_*(-1 + e^{(a+\varepsilon)t}) \le$$

$$\le c|x_0| - \frac{1}{a+\varepsilon}c\|B\|\varphi_* = c_0,$$

где $e^{(a+\varepsilon)t} \le 1$, $t \in I$, $a+\varepsilon < 0$, $-\dfrac{1}{a+\varepsilon} > 0$, $|\varphi(\sigma(t))| \le \varphi_*$, $\forall\ t$, $t \in I$. Отсюда следует ограниченность решения системы (1), (2). Из уравнения (1) следует, что

$$|\dot{x}(t)| \le \|A\|\ |x(t)| + \|B\|\ |\varphi(\sigma(t))| \le \|A\|c_0 + \|B\|\varphi_* = c_1,\ \ \forall t,\ \ t \in I,$$

Тогда

$$|\sigma(t)| \le \|S\|\ |x(t)| \le \|S\|c_0 = c_4,\ \ |\dot{\sigma}(t)| \le \|S\|\ |\dot{x}(t)| \le \|S\|c_1 = c_5,\ \ \forall t,\ \ t \in I.$$

Так как функция $y(t) = Kx(t)$, $t \in I$, то $|y(t)| \le \|K\||x(t)| \le \|K\|c_0 = c_2$, $|\dot{y}| \le \|K\||\dot{x}(t)| \le \|K\|c_1 = c_3$, $\forall\ t$, $t \in I$.

Итак, доказаны оценки (17) – (19). Из ограниченности функций $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ следуют равномерные непрерывности функции $x(t)$, $y(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$. Теорема доказана.

Следует отметить, что: 1. Из оценки $|x(t)|$, $t \in I$ имеем $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)| = |x(\infty)| \le c|x_0| - \dfrac{1}{a}c\|B\|\varphi_* = \overline{c}_0$, $c_0 \le \overline{c}_0$ в силу непрерывности $x(t)$, $t \in I$, где $a < 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} |y(t)| = |y(\infty)| \le \|K\|\overline{c}_0$, $\lim\limits_{t\to\infty} |\sigma(t)| = |\sigma(\infty)| \le \|s\|\overline{c}_0$.

2. Если $x_0 \in S_\rho = \{x_0 \in R^n||x_0| \le \rho,\ \ \rho > 0\}$, то $|\sigma| \le \|S\|(c\rho - \dfrac{c}{a}\|B\|\varphi_*) = \overline{c}_4$.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3. Тогда вдоль решения системы* (16) *верны тождества:*

$$\varphi(\sigma(t)) = \dot{Y}_1(t) - C_1Y_1(t) - C_2Y_2(t),\ t \in I, \tag{20}$$

$$\sigma(t) = D_1Y_1(t) + D_2Y_2(t),\ t \in I, \tag{21}$$

$$\dot{\sigma}(t) = D_1\dot{Y}_1(t) + D_2C_3Y_1(t) + D_2C_4Y_2(t),\ t \in I, \tag{22}$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix},\ \ t \in I. \tag{23}$$

Доказательство. Если матрицы C, D представить в виде (23), где $C_1 = \|c_{ij}\|$, $i,j = \overline{1,m}$; $C_2 = \|c_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{m+1,n}$; $C_3 = \|c_{ij}\|$, $i = \overline{m+1,n}$, $j = \overline{1,m}$; $C_4 = \|c_{ij}\|$, $i,j = \overline{m+1,n}$; $D_1 = \|d_{ij}\|$, $i,j = \overline{1,m}$; $D_2 = \|d_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{m+1,n}$, то уравнение (16) запишется так

$$\dot{Y}_1 = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \varphi(\sigma),\quad \dot{Y}_2 = C_3Y_1 + C_4Y_2,\ \ t \in I, \tag{24}$$

$$\sigma = D_1Y_1 + D_2Y_2,\ \ Y_1 = Y_1(t),\ \ Y_2 = Y_2(t),\ \ \sigma = \sigma(t),\ \ t \in I. \tag{25}$$

Тогда тождество (20) следует из первого уравнения (24), тождества (21), (22) следуют из (25) с учетом второго уравнения из (24). Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3. Тогда для любых матриц* Λ, Γ, M, L *порядков* $m \times (n-m)$, $(n-m) \times (n-m)$, $m \times (n-m)$, $m \times m$ *соответственно, вдоль решения уравнения* (16) *верны тождества*

$$Y_1^*(t)\Lambda\dot{Y}_2(t) = Y_1^*(t)\Lambda C_3Y_1(t) + Y_1^*(t)\Lambda C_4Y_2(t),\ \ t \in I, \tag{26}$$

$$Y_2^*(t)\Gamma\dot{Y}_2(t) = Y_2^*(t)\Gamma C_3 Y_1(t) + Y_2^*(t)\Gamma C_4 Y_2(t), \ \ t \in I, \tag{27}$$

$$\dot{Y}_1^*(t)MY_2(t) = \frac{d}{dt}[Y_1^*(t)MY_2(t)] - Y_1^*(t)MC_3Y_1(t) - Y_1^*(t)MC_4Y_2(t), \ \ t \in I, \tag{28}$$

$$\dot{Y}_1^*(t)LY_1(t) = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}Y_1^*(t)(L+L^*)Y_1(t)] - \dot{Y}_1^*(t)L^*Y_1(t), \ \ t \in I. \tag{29}$$

Доказательство. Тождества (26), (27) непосредственно следуют из (24). Тождество (28) следует из равенства

$$\frac{d}{dt}[Y_1^*(t)MY_2(t)] = \dot{Y}_1^*(t)MY_2(t) + Y_1^*(t)M\dot{Y}_2(t),$$

где $\dot{Y}_2(t)$, $t \in I$ определяется из второго уравнения (24). Тождество (29) следует из формулы

$$\dot{Y}_1^*(L+L^*)Y_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[Y_1^*(t)(L+L^*)Y_1(t)], \ \ t \in I.$$

Лемма доказана.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A –гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того:*

1) скалярная непрерывная функция $W(y) > 0 \ \forall\, y$, $y \in R^n$, $y \neq 0$, $W(0) = 0$;

3) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty W(y(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 1, то верна оценка (18). Пусть выполнены предпосылки теоремы. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Предположим противное т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \neq 0$. Тогда существует последовательность $\{t_k\} \subset [0,\infty)$ такая, что $|y(t_k)| \geq \varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Выберем $t_{k+1} - t_k \geq \varepsilon_1 > 0$. Поскольку $y(t)$, $t \in I$ – непрерывно дифференцируема и $y(t) \leq c_2$, $|\dot{y}(t)| \leq c_3$, $t \in I$ (см. теорему 1), то $|y(t) - y(t_k)| \leq c|t - t_k|$, $\forall\, t$, $t \in [t_k - \dfrac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \dfrac{\varepsilon_1}{2}]$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty W(y(t))dt \geq \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} W(y(t))dt,$$

где $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \geq |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \geq \varepsilon - c\dfrac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_0 > 0$.

Поскольку

$$\int\limits_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} W(y(t))dt \geq W_{\min} \cdot m, \quad W_{\min} = \min_{\varepsilon_0 \leq |y| \leq c_2} W(y),$$

то

$$\int\limits_0^\infty W(y(t))dt = \infty.$$

Это противоречит второму условию теоремы. Теорема доказана.

3.3 Несобственные интегралы

На основе тождеств (20) – (22) и равенств (26) – (29) и теоремы 1 могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения уравнения (16), где $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой диагональной матрицы $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m})$ порядка $m \times m$, вдоль решения уравнения* (16) *несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_1 = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t)\tau_1 D_1 \dot{Y}_1^*(t) - \dot{Y}_1^*(t) L_1^* Y_1(t)]dt + \\ + \int\limits_0^\infty W_1(y(t))dt + l_1 + l_2 = \sum_{i=1}^m \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i^*(\sigma_i)\tau_{1i} d\sigma_i = \bar{c}_1 < \infty, \\ |l_1| < \infty, \quad |l_2| < \infty, \end{gathered} \tag{30}$$

где

$$l_1 = \frac{1}{2} Y_1^*(t)(L_1 + L_1^*)Y_1(t)\Big|_0^\infty, \quad L_1 = \tau_1 D_2 C_3 - D_1^* \tau_1 C_1, \quad |l_1| < \infty, \tag{31}$$

$$l_2 = -Y_1^*(t)[M_1 C_3 Y_1(t) + M_1 C_4 Y_2(t)]\Big|_0^\infty, \quad M_1 = \tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2, \quad |l_2| < \infty, \tag{32}$$

функция

$$\begin{gathered} W_1(y(t)) = -Y_1^*(t)(C_1^* \tau_1 D_2 C_3 + \tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2)Y_1(t) - \\ -Y_1^*(t)[C_3^* D_2^* \tau_1 C_2 + C_1^* \tau_1 D_2 C_4 + (\tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2^*)C_4]Y_2(t) - \\ -Y_2^*(t) C_2^* \tau_1 D_2 C_4 Y_2(t), \quad t \in I. \end{gathered} \tag{33}$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, $|y(\infty)| \le c_2 < \infty$, $|y(0)| \le c_2 < \infty$. Несобственный интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \varphi^*(\sigma(t))\tau_1 \dot{\sigma}(t)dt = \sum_{i=1}^m \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i^*(\sigma_i)\tau_{1i} d\sigma_i = \bar{c}_1 < \infty,$$

в силу того, что $|\sigma(0)| \le c_4 < \infty$, $|\sigma(\infty)| \le c_4 < \infty$, где функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Так как выполнены условия леммы 4, то верны тождества (20), (22). Тогда

$$I_1 = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1(t) - C_1 Y_1(t) - C_2 Y_2(t)]^* \tau_1 [D_1 \dot{Y}_1(t) + D_2 C_3 Y_1(t) + D_2 C_4 Y_2(t)]dt =$$

$$= \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma)\tau_1 d\sigma = \bar{c}_1 < \infty.$$

Отсюда с учетом тождеств (28), (29), получим

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \{[\dot{Y}_1^* \tau_1 D_1 \dot{Y}_1 + \dot{Y}_1^* (\tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2) Y_2] + \dot{Y}_1^* (\tau_1 D_2 C_3 -$$

$$- D_1^* \tau_1 C_1)^* Y_1] + [-Y_1^* C_1^* \tau_1 D_2 C_3 Y_1 - Y_1^* (C_3^* D_2^* \tau_1 C_2 + C_1^* \tau_1 D_2 C_4) Y_2 -$$

$$- Y_2^* C_2^* \tau_1 D_2 C_1 Y_2]\} dt = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t) \tau_1 D_1 \dot{Y}(t) - \dot{Y}_1^*(t)(\tau_1 D_2 C_3 -$$

$$- D_1^* \tau_1 C_1)^* Y_1(t)] dt + \int\limits_0^\infty W_1(y(t)) dt + l_1 + l_2 = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma) \tau_1 d\sigma =$$

$$= \bar{c}_1 < \infty, \quad |l_1| < \infty, \quad |l_2| < \infty,$$

где матрицы $M_1 = \tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2$, $L_1 = \tau_1 D_2 C_3 - D_1^* \tau_1 C_1$, l_1, l_2, $W_1(y)$ определяются формулами (31) – (33) соответственно. Итак, доказана оценка (30).

Далее, учитывая что $Y_1(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$, $Y_2(t) = (y_{m+1}, \dots, y_n(t))$, $t \in I$, $|Y_1(t)| < \infty$, $|Y_2(t)| < \infty$, $\forall\, t$, $t \in I$, имеем $|l_1| < \infty$, $|l_2| < \infty$. Теорема доказана.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой диагональной матрицы* $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) \geq 0$ *порядка* $m \times m$, *вдоль решения уравнения* (16) *несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_2 = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t) \tau_2 \mu_0^{-1} \dot{Y}_1(t) - \dot{Y}_1^*(t) L_2^* Y_1(t)] dt + \\ + \int\limits_0^\infty W_2(y(t)) dt + l_3 \leq 0, \quad |l_3| < \infty, \end{gathered} \tag{34}$$

где

$$\begin{gathered} l_3 = -\frac{1}{2} Y^*(t)(L_2 + L_2^*) Y_1(t) \Big|_0^\infty - Y_1^*(t) M_2 (C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)) \Big|_0^\infty, \\ L_2 = -2\tau_2 \mu_0^{-1} C_1 - \tau_2 D_1, \quad M_2 = -2\tau_2 \mu_0^{-1} C_2 - \tau_2 D_2, \end{gathered} \tag{35}$$

функция

$$\begin{gathered} W_2(y) = Y_1^*(t)(C_1^* \tau_2 D_1 + \tau_2 D_2 C_3 + 2\tau_2 \mu_0^{-1} C_2 C_3 + C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_1) Y_1(t) + \\ + Y_1^*(t)(D_1^* \tau_2 C_2 + C_1^* \tau_2 D_2 + \tau_2 D_2 C_4 + 2\tau_2 \mu_0^{-1} C_2 C_4 + 2 C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2) Y_2(t) + \\ + Y_2^*(t)(C_2 \tau_2 D_2 + C_2^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2) Y_2(t), \quad t \in I. \end{gathered} \tag{36}$$

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует

$$\frac{\varphi_i(\sigma_i)}{\sigma_i} \leq \mu_{0i}, \quad \frac{\sigma_i}{\varphi_i(\sigma_i)} \geq \mu_{0i}^{-1}, \;\; \forall \sigma_i, \;\; \sigma_i \in R^1, \;\; \overline{1, m}.$$

Следовательно, $\sigma_i\varphi_i(\sigma_i) \geq \mu_{0i}^{-1}\varphi_i^2(\sigma_i)$, $i=\overline{1,m}$. Тогда для любой величины $\tau_{2i}\geq 0$ верно неравенство $\varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}\sigma_i - \mu_{0i}^{-1}\tau_{2i}\varphi_i^2(\sigma_i)\geq 0$, $i=\overline{1,m}$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{m}[\mu_{0i}^{-1}\tau_{2i}\varphi_i^2(\sigma_i)-\varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}\sigma_i]\leq 0. \tag{37}$$

Пусть $\tau_2 = diag(\tau_{21},\ldots,\tau_{2m})\geq 0$, $\mu_0^{-1}=diag(\mu_{01}^{-1},\ldots,\mu_{0m}^{-1})$. Тогда неравенство (37) запишется в виде

$$\varphi^*(\sigma)\tau_2\mu_0^{-1}\varphi(\sigma)-\varphi^*(\sigma)\tau_2\sigma\leq 0,\ \ \forall\sigma,\ \ \sigma\in R^m. \tag{38}$$

Из (38) следует, что несобственный интеграл

$$I_2=\int_0^\infty[\varphi^*(\sigma(t))\tau_2\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))-\varphi^*(\sigma(t))\tau_2\sigma(t)]dt\leq 0.$$

Отсюда с учетом тождеств (20), (21), имеем

$$\begin{gathered}I_2=\int_0^\infty\{[\dot{Y}_1(t)-C_1Y_1(t)-C_2Y_2(t)]^*\tau_2\mu_0^{-1}[\dot{Y}_1(t)-C_1Y_1(t)-C_2Y_2(t)]-\\ -[\dot{Y}_1(t)-C_1Y_1(t)-C_2Y_2(t)]\tau_2[D_1Y_1(t)+D_2Y_2(t)]\}dt\leq 0.\end{gathered} \tag{39}$$

Тогда несобственный интеграл (39), с учетом тождеств (28), (29), может быть представлен в виде (34), где $L=-2\tau_2\mu_0^{-1}C_1-\tau_2D_1$, $M=-2\tau_2\mu_0^{-1}C_2-\tau_2D_2$. Величина l_3, функция $W_2(y)$ определяются формулами (35), (36) соответственно. Оценка $|l_3|<\infty$ следует из оценок $|Y_1(t)|<\infty$, $|Y_2(t)|<\infty$, $\forall\, t,\ t\in I$. Теорема доказана.

Лемма 6 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$. Тогда для любых векторов $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in R^m$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in R^m$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-m})\in R^{n-m}$, вдоль решения уравнения (16) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered}I_3=\int_0^\infty[\dot{Y}_1^*(t)(-\alpha^*\alpha)\dot{Y}_1(t)+\dot{Y}_1^*(t)L_3^*Y_1(t)]dt+\\ +\int_0^\infty W_3(y(t))dt+l_4\leq 0,\ \ |l_4|<\infty,\end{gathered} \tag{40}$$

где

$$\begin{gathered}l_4=-Y_1^*(t)(L_3+L_3^*)Y_1(t)\Big|_0^\infty-Y_1^*(t)M_3(C_3Y_1(t)+C_4Y_2(t))\Big|_0^\infty,\\ L_3=2\alpha^*\beta,\ \ M_3=2\alpha^*\gamma,\end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{gathered}W_3(y)=Y_1^*(t)(2\alpha^*\gamma C_3-\beta^*\beta)Y_1(t)+Y_1^*(t)(2\alpha^*\gamma-2\beta^*\gamma)Y_2(t)+\\ +Y_2^*(t)(-\gamma^*\gamma)Y_2(t),\ \ t\in I.\end{gathered} \tag{42}$$

Доказательство. Несобственный интеграл

$$I_3 = -\int\limits_0^\infty [\alpha\dot{Y}_1(t) + \beta Y_1(t) + \gamma Y_2(t)]^*[\alpha\dot{Y}_1(t) + \beta Y_1(t) + \gamma Y_2(t)]dt \leq 0.$$

Далее, используя тождества (28), (29), где $M_3 = 2\alpha^*\gamma$, $L_3 = 2\alpha^*\beta$, получим (40), где l_4, $W_3(y)$ определяются формулами (41), (42) соответственно. Лемма доказана.

Лемма 7 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой симметричной матрицы $\Gamma = \Gamma^*$ порядка $(n-m)\times(n-m)$ несобственный интеграл*

$$I_4 = \int\limits_0^\infty W_4(y(t))dt = \frac{1}{2}Y_2^*(t)\Gamma Y_2(t)\Big|_0^\infty < \infty, \tag{43}$$

где

$$W_4(y) = Y_2(t)\Gamma C_3 Y_1(t) + Y_2(t)\Gamma C_4 Y_2(t), \quad t \in I. \tag{44}$$

Доказательство. Как следует из формулы (24) производная $\dot{Y}_2(t) = C_3Y_1(t) + C_4Y_2(t)$, $t \in I$. Тогда для любой симметричной матрицы $\Gamma = \Gamma^*$ порядка $n-m\times(n-m)$ верно тождество (см. (27))

$$Y_2^*(t)\Gamma\dot{Y}_2(t) = Y_2^*(t)\Gamma C_3 Y_1(t) + Y_2^*(t)\Gamma C_4 Y_2(t), \quad t \in I. \tag{45}$$

интегрируя тождество (45) по t в пределах от 0 до ∞, получим формулу (43), где $W_4(y)$ определяется по формуле (44). Лемма доказана.

Рассмотрим случай, когда $\varphi(\sigma) \in \Phi$ из (3), где $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \varphi_0(\sigma)$, функция $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$ (см. (4)). В этом случае, уравнение (5) с неособым преобразованием приводится к виду

$$\dot{y} = (C + E\varepsilon D)y + E\varphi_0(\sigma), \quad \sigma = Dy, \quad \varphi_0(\sigma) \in \Phi_1. \tag{46}$$

Обозначим через $\overline{A} = A + B\varepsilon S$, $\overline{C} = C + E\varepsilon D$. Теперь уравнения (5) и (46) запишутся так

$$\dot{x} = \overline{A}x + B\varphi_0(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad \varphi_0(\sigma) \in \Phi_1. \tag{47}$$

$$\dot{y} = \overline{C}y + E\varphi_0(\sigma), \quad \sigma = Dy, \quad \varphi_0(\sigma) \in \Phi_1. \tag{48}$$

где $\overline{C} = K\overline{A}K^{-1}$, $D = SK^{-1}$, $E = KB$, $K = R^*$, $\lambda_j(\overline{C}) = \lambda_j(\overline{A})$, $j = \overline{1,n}$.

Отсюда следует, что если матрица $\overline{A}$ из уравнения (47) гурвицева, то матрица $\overline{C}$ из уравнения (48) также гурвицева. Для уравнения (47), когда матрица $\overline{A}$ – гурвицева остаются верными утверждения теорем 1 – 4, лемм 4 – 7.

Лемма 8 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица $\overline{A}$ гурвицева, функция $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$. Тогда:*

1) для решения уравнения (48) *верны оценки*

$$|y(t)| \leq c_6, \ \ |\dot{y}(t)| \leq c_7, \ \ |\sigma(t)| \leq c_8, \ \ |\dot{\sigma}(t)| \leq c_9, \ \ t \in I,$$

где функции $y(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ равномерно непрерывны;

2) вдоль решения уравнения (48) *верны тождества*

$$\varphi_0(\sigma(t)) = \dot{\overline{Y}}_1(t) - \overline{C}_1\overline{Y}_1(t) - \overline{C}_2\overline{Y}_2(t), \ \ t \in I, \tag{49}$$

$$\sigma(t) = D_1\overline{Y}_1(t) + D_2\overline{Y}_2(t), \ \ t \in I, \tag{50}$$

$$\dot{\sigma}(t) = D_1\dot{\overline{Y}}_1(t) + D_2\overline{C}_3\overline{Y}_1(t) + D_2\overline{C}_4\overline{Y}_2(t), \ \ t \in I, \tag{51}$$

где

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \\ \overline{C}_3 & \overline{C}_4 \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} \overline{Y}_1(t) \\ \overline{Y}_2(t) \end{pmatrix};$$

3) уравнение (48) *может быть представлено в виде*

$$\dot{\overline{Y}}_1(t) = \overline{C}_1\overline{Y}_1(t) + \overline{C}_2\overline{Y}_2(t) + \varphi_0(\sigma), \ \ \dot{\overline{Y}}_2(t) = \overline{C}_3\overline{Y}_1(t) + \overline{C}_4\overline{Y}_2(t), \ \ t \in I; \tag{52}$$

4) верны тождества

$$\begin{aligned} \dot{\overline{Y}}{}_1^*(t)M\overline{Y}_2(t) = \frac{d}{dt}[\overline{Y}{}_1^*(t)M\overline{Y}_2(t)] - \overline{Y}{}_1^*(t)M\overline{C}_3\overline{Y}_1(t) - \\ -\overline{Y}{}_1^*(t)M\overline{Y}_4(t), \ \ t \in I, \end{aligned} \tag{53}$$

$$\dot{\overline{Y}}{}_1^*(t)L\overline{Y}_1(t) = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\overline{Y}{}_1^*(t)(L + L^*)\overline{Y}_1(t)] - \overline{Y}{}_1^*(t)L^*\overline{Y}_1(t), \ \ t \in I, \tag{54}$$

где M, L любые матрицы порядков $m \times (n - m)$, $m \times n$.

Доказательство леммы следует из теоремы 1 и лемм 4, 5. Формулы (49) – (54) могут быть получены аналогичным путем как в теоремах 1 – 4, лемм 4 – 7.

Лемма 9 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица $\overline{A}$ – гурвицева, функция $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$. Тогда:*

1) для любой диагональной матрицы τ_1 порядка $m \times m$, вдоль решения уравнения (48) *несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} \overline{I}_1 = \int\limits_0^\infty [\dot{\overline{Y}}{}_1^*(t)\tau_1 D_1\dot{\overline{Y}}_1(t) - \dot{\overline{Y}}{}_1^*(t)\overline{L}_1^*\overline{Y}_1(t)]dt + \int\limits_0^\infty \overline{W}_1(y(t))dt + \\ +\bar{l}_1 = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi_0^*(\sigma)\tau_1 d\sigma = \bar{c}_1 < \infty, \ \ |l_1| < \infty, \end{aligned} \tag{55}$$

где

$$\bar{l}_1 = \frac{1}{2}\overline{Y}_1^*(t)(\overline{L}_1 + \overline{L}_1^*)\overline{Y}_1^*(t)\Big|_0^\infty - \overline{Y}_1^*(t)\overline{M}[\overline{C}_3\overline{Y}_1(t) + \overline{C}_4\overline{Y}(t)]\Big|_0^\infty, \quad (56)$$
$$\overline{L}_1 = \tau_1 D_2\overline{C}_3 - D_1^*\tau_1\overline{C}_1, \quad \overline{M}_1 = \tau_1 D_2\overline{C}_4 - D_1^*\tau_1\overline{C}_2,$$

функция $\overline{W}_1(y)$ *определяется по формуле* (33)*, после замены* Y_1, Y_2, C_1, C_2, C_3, C_4 *на* $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$, $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$, $\overline{C}_4$ *соответственно;*

2) для любой диагональной матрицы $\tau_2 \geq 0$ *порядка* $m \times m$*, вдоль решения системы* (48) *несобственный интеграл*

$$\overline{I}_2 = \int_0^\infty [\dot{\overline{Y}}_1^*(t)\tau_2 r_{00}^{-1}\dot{\overline{Y}}(t) + \dot{\overline{Y}}_1^*(t)\overline{L}_2^*\dot{\overline{Y}}_1(t)]dt + \int_0^\infty \overline{W}_2(y(t))dt +$$
$$+\bar{l}_3 \leq 0, \quad |\bar{l}_3| < \infty, \quad (57)$$

где

$$\bar{l}_3 = -\frac{1}{2}\overline{Y}^*(t)(\overline{L}_2 + \overline{L}_2^*)\overline{Y}_1^*(t)\Big|_0^\infty - \overline{Y}_1^*(t)\overline{M}_2[\overline{C}_3\overline{Y}_1(t) + \overline{C}_4\overline{Y}_2(t)]\Big|_0^\infty, \quad |\bar{l}_3| < \infty, \quad (58)$$

$\overline{L}_2 = -2\tau_2 r_{00}^{-1}\overline{C}_1 - \tau_2 D_1$, $\overline{M}_2 = -2\tau_2 r_{00}^{-1} - \tau_2 D_1$, $r_{00} = diag(r_{10}, \dots, r_{m0})$, $r_0 = diag(r_1, \dots, r_m)$, $r_0 = r_{00} + \varepsilon$, $\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, *функция* $\overline{W}_2(y)$ *определяется по формуле* (36)*, после замены* Y_1, Y_2, C *на* $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$, $\overline{C}$ *соответственно;*

3) для любых векторов строк $\alpha \in R^m$, $\beta \in R^m$, $\gamma \in R^{n-m}$ *несобственный интеграл*

$$\overline{I}_3 = \int_0^\infty [\dot{\overline{Y}}_1^*(t)(-\alpha^*\alpha)\dot{\overline{Y}}(t) + \dot{\overline{Y}}_1^*(t)\overline{L}_3^*\dot{\overline{Y}}_1(t)]dt +$$
$$+ \int_0^\infty \overline{W}_3(y(t))dt + \bar{l}_4 \leq 0, \quad |\bar{l}_4| < \infty, \quad (59)$$

где

$$\bar{l}_4 = -\overline{Y}_1^*(t)(\overline{L}_3 + \overline{L}_3^*)\overline{Y}_1^*(t)\Big|_0^\infty - \overline{Y}_1^*(t)\overline{M}_3[\overline{C}_3\overline{Y}_1(t) + \overline{C}_4\overline{Y}_2(t)]\Big|_0^\infty, \quad |\bar{l}_3| < \infty, \quad (60)$$

$\overline{L}_3 = 2\alpha^*\beta$, $\overline{M}_3 = 2\alpha^*\gamma$, *функция* $\overline{W}_3(y)$ *определяется по формуле* (42)*, после замены* Y_1, Y_2, C *на* $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$, $\overline{C}$ *соответственно;*

4) для любой симметричной матрицы $\Gamma = \Gamma^*$ *порядка* $(n-m) \times (n-m)$ *несобственный интеграл*

$$\overline{I}_4 = \int_0^\infty \overline{W}_4(y(t))dt = \frac{1}{2}\overline{Y}_2^*(t)\Gamma\overline{Y}_2(t)\Big|_0^\infty, \quad (61)$$

где $\overline{W}_4(y)$ *определяется по формуле* (44)*, после замены* Y_1, Y_2, C *на* $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$, $\overline{C}$ *соответственно.*

Доказательство леммы следует из теорем 3, 4 и лемм 6, 7. Формулы (55) – (61) следуют из теорем 3, 4 и лемм 6, 7.

4 Результаты и обсуждение

Для системы с ограниченными ресурсами, фазовые переменные ограниченные и являются равномерно непрерывными функциями. Эти свойства были использованы при оценке несобственных интегралов. Получены тождества относительно входных и выходных переменных нелинейных элементов, которые позволяют использовать сведения о свойствах нелинейностей из заданного множества. При таком подходе к исследованию абсолютной устойчивости удается получить дополнительные соотношения, связывающие фазовые переменные, получить более эффективные условий абсолютной устойчивости.

В работах (Айсагалиев, 1994 : 748-757), (Айсагалиев, 2000), (Айсагалиев, 2012), (Aisagaliev, 2013 : 159-175) приведены результаты исследования абсолютный устойчивости одномерных систем. Данная работа является продолжением этих исследований для систем со многими нелинейностями.

Список литературы

[1] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем // Издательство АН СССР, 1963. С.240

[2] *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. С.216

[3] *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. С.453

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.:Наука, 1978. С.400

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1969. №5. С.38-48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1970. №12. С.83-94.

[7] *Айзерман М.А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом"динамических систем // УМН, 1949. т. 4. № 4. с. 186-188.

[8] *Kalman R.E.* Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME, 1957. v. 79.3. pp. 553-556.

[9] *Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи ЧУА. Известия РАН. Теория и системы управления, 2011. № 4. с. 3-36.

[10] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. Минск-Москва. 1994. Т.30. №5. С.748-757.

[11] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2000. – С. 234

[12] *Айсагалиев С.А.* Теория устойчивости динамических систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2012. – 216 С.

[13] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Certain problems of Synchronization theory // Journal Inverse Ill Posed Problems, 21 (2013), – pp. 159-175.

References

[1] Aizerman M. A., Gantmaher F. R. *Absolyutnaya ustoychivost reguliruemyih sistem* [Absolute stability of regulated systems], (Izdatelstvo AN SSSR, 1963) : 240.

[2] Lurie A. I. *Nekotoryie nelineynyie zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Some nonlinear problems of automatic control theory], (M.: Gostehizdat, 1951) : 216.

[3] Popov V. M. *Giperustoychivost avtomaticheskih sistem* [Hyper-stability of automatic systems], (M.: Nauka, 1970) : 453.

[4] Gelig A. H., Leonov G. A., Yakubovich V. A. *Ustoychivost nelineynyih sistem s needinstvennyim sostoyaniem ravnovesiya* [Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state], (M.:Nauka, 1978) : 400.

[5] Aisagaliev S. A., «Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti vyinuzhdennyih dvizheniy v nelineynyih sistemah» [On the determination of the domain of absolute stability forced motions in nonlinear systems], *Izv. AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika* (1969) : 38–48.

[6] Aisagaliev S. A., «Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti sistemyi upravleniya s neskolkimi nelineynyimi elementami» [On the determination of the domain of absolute stability of a control system with several nonlinear elements], *AN SSSR. Avtomatika i telemehanika* (1970) : 83–94.

[7] Aizerman M. A., «Ob odnoy probleme, kasayuscheysya ustoychivosti v "bolshom"dinamicheskih sistem» [On one problem concerning stability in "large"dynamical systems], *UMN* (1949) : 186–188.

[8] Kalman R. E., «Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems», *Transactions of ASME* (1957) : 553–556.

[9] Bragin V. O., Vagaytsev V. I., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., «Algoritmyi poiska skryityih kolebaniy v nelineynyih sistemah. Problemyi Ayzermana, Kalmana i tsepi ChUA» [Algorithms for searching hidden oscillations in nonlinear systems. The problems of Aizerman, Kalman, and ChUA chain], *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemyi upravleniya* (2011) : 3–36.

[10] Aisagaliev S. A., «K teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyih sistem» [For the theory of absolute stability of regulated systems], *Differentsialnyie uravneniya. Minsk-Moskva*, Vol. 30. No 5 (1994) : 748–757.

[11] Aisagaliev S. A. *Teoriya reguliruemyih sistem* [Theory of regulated systems] (Kazakh universiteti, 2000), 234.

[12] Aisagaliev S. A. *Teoriya ustoychivosti dinamicheskih sistem* [Stability theory of dynamical systems] (Kazakh universiteti, 2012), 216.

[13] Aisagaliev S. A., Kalimoldayev M. N., «Certain problems of Synchronization theory», *Journal Inverse Ill Posed Problems*, No 21 (2013) : 159–175.