УДК 517.977.5

З.Н. Мурзабеков, А.З. Мурзабеков

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: murzabekov-zein@mail.ru

Синтез пропорционально-дифференциальных регуляторов для систем с закрепленными концами траекторий при наличии двусторонних ограничений на значения управлений*

Рассматривается задача оптимального управления нестационарными линейными системами с закрепленными концами траекторий при наличии внешних воздействий и квадратичным функционалом, который зависит от управления, состояния объекта и его производной. Предлагается конструктивный метод построения пропорционально-дифференцального регулятора, основанный по принципу обратной связи с учетом двусторонних ограничений на значения управлений. Задача решена с использованием множителей Лагранжа специального вида.
Ключевые слова: задача оптимального управления, множители Лагранжа, программное управление, принцип максимума, метод динамического программирования, дифференциальные уравнения, целевая функция.

Z.N. Murzabekov, A.Z. Murzabekov

The synthesis of the proportional differential regulators for systems with fixed ends of trajectories under two-sided constrained control

Optimal conrtol problem for nonstationary linear systems with fixed trajectory ends under external influences and with quadratic functional of control, state of the object and its derivative is considered. The constructive method for proportional differential and based on principle of feedback regulator construction taking into account two-sided constraints on control value is developed. The problem is solved by using the method of Lagrange multipliers of a special form.
Key words: optimal control problem, Lagrange multipliers, program control, maximum principle, the method of dynamic programming, differential equations, objective function.

З.Н. Мұрзабеков, А.З. Мұрзабеков

Басқару мәніне екіжақты шектеулері бар траекторияларының шеттері бекітілген жүйелер үшін пропорционал-дифференциалдық регуляторлардың синтезі

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 1652 / ГФ3.

Сыртқы әселері бар, траекторияларының шеттері бекітілген сызықты стационар емес жүйелерді тиімді басқарудың басқаруға, объект күйіне және оның туын дысына тәуелді квадраттық функционалды есебі қарастырылады. Кері байланыс қағида сына негізделген пропорционалды-дифференциалдық регуляторды басқару мәнін е қойылған екіжақты шектеуді ескере отырып құрудың конструктивті әдісі ұсынылады. Е сеп Лагранждың арнайы түрдегі көбейткіштерін пайдаланып шешілген.
Түйін сөздер: Лагранж көбейткіштері, тиімді басқару есебі, программалық басқару, максимум қағидасы, динамикалық программалау әдісі, дифференциалдық теңдеулер, мақсаттық функция.

Введение

В работах в области автоматического управления можно найти различные примеры математической постановки и методы решения задач оптимального управления. В простейших моделях систем автоматического управления рассматриваются так называемые линейно-квадратичные задачи с линейным объектом управления и с квадратичным функционалом. Впервые аналитическое решение линейно-квадратичной задачи без ограничений на управление и со свободными правыми концами траекторий было получено в работах А.М. Летова и Р.Е. Калмана [1], [2].

Многие задачи оптимального управления рассматриваются в двух постановках. Согласно одной из них оптимальное управление ищется как функция времени и начального состояния системы (программное управление). Другая постановка этой же задачи предполагает синтез оптимального управления с обратной связью, т.е. выбор входного сигнала в виде некоторой функции от текущего состояния управляемой системы и времени. В основе решения задач оптимального управления в первой постановке лежит принцип максимума Понтрягина (решение сводится к соответствующей двухточечной краевой задаче), а решение задачи во второй постановке основано на методе динамического программирования (задача сводится к решению уравнения Беллмана). Работы Л.С. Понтрягина и Р. Беллмана составили математическую основу теории оптимального управления, послужили мощным толчком, как в развитии современной теории экстремальных задач, так и в создании численных методов решения таких задач [3], [4]. Эти методы были применены для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных и т.д.

Отметим, что важным этапом в истории естествознания явилась сочинение Ж.Л. Лагранжа "Аналитическая механика опубликованное в 1788 г. Трактат Лагранжа сыграл исключительную роль в развитии задач оптимизации и в развитии вариационного исчисления. Именно там была поставлена задача на условный экстремум. Для решения поставленной задачи Лагранж использовал основной прием, который стал знаменитым правилом множителей Лагранжа [5]. В настоящее время теория оптимизации, успешному применению которой способствует бурный прогресс в развитии средств вычислительной техники, вносит заметный вклад в ускорение научно-технического прогресса. Разработка различных способов построения алгоритмов управления, обладающих необходимыми для приложений свойствами, является актуальной задачей современных информационных технологий [6].

В данной работе рассматривается задача оптимального управления нестационарными линейными системами с закрепленными концами траекторий при наличии внешних воздействий и квадратичным функционалом, который зависит от управления, состояния объекта и ее производной. Для решения задачи использован метод, основанный на применении множителей Лагранжа специального вида, когда требуется перевести систему из заданного начального состояния в желаемое конечное состояние за фиксированный интервал времени [7]. Предлагается конструктивный пропорционально-дифференцальный регулятор и соответствующий алгоритм управления, основанный по принципу обратной связи с учетом двусторонних ограничений на значения управлений.

Постановка задачи

Рассмотрим управляемую линейную систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \tag{1}$$

$$u(t) \in U(t) = \Big\{ u \;\Big|\; \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t), \quad t \in (t_0, T) \Big\}, \tag{2}$$

где x - вектор состояния объекта управления размерности $n \times 1$; u - вектор кусочно-непрерывных управляющих воздействий размерности $m \times 1$; $A(t), B(t)$ - матрицы размерностей $n \times 1$ $n \times m$ соответственно; $f(t), \alpha(t), \beta(t)$ - кусочно-непрерывные ограниченные функции; x_0, x_1 - заданные вектора.

Будем предполагать, что система (1) управляема. Обозначим через $\Delta(t_0, T)$ множество всех допустимых управлений, удовлетворяющих условию $u(t) \in U(t), \;\; t \in [t_0, T]$, и соответствующих траекторий $x(t, u)$ системы (1), определенных на отрезке $t_0 \le t \le T$, т.е. множество всех допустимых пар $\{x(t), u(t)\}$:

$$\Delta(t_0, T) = \Big\{ (x, u) : u(t) \in U(t), \; \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \;\; t_0 < t < T,$$

$$x(t_0) = x_0, \;\; x(T) = x_1 \Big\}.$$

Пусть на множестве $\Delta(t_0, T)$ задан функционал, который зависит от управления, состояния объекта и его производной

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{T} \Big[\dot{x}^* D(t) \dot{x} + x^* Q(t) x + u^* R(t) u \Big] dt, \tag{3}$$

где $R(t)$ - симметричная положительно определенная $(m \times m)-$матрица; $Q(t), D(t)$ - симметричные положительно полуопределенные $(n \times n)-$матрицы. Символ $(^*)$ означает операцию транспонирования.

Задача 1. Найти синтезирующее управление $\overline{u}(x, t)$ такое, что соответствующая ему пара $\{\overline{x}(t), \overline{u}(t)\}$ доставляет минимальное значение функционалу (3), где $\overline{x}(t)$ является решением дифференциального уравнения (1) при управлении $\overline{u}(t) = \overline{u}(\overline{x}(t), t) \in E_m, \;\; t \in [t_0, T]$.

Задача 2. Найти синтезирующее управление $\tilde{u}(x, t)$ такое, что соответствующая ему пара $\{\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\}$ доставляет минимальное значение функционалу (3), где $\tilde{x}(t)$ является решением дифференциального уравнения (1) при управлении $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(\tilde{x}(t), t)$, удовлетворяющему ограничению (2).

Для решения задачи оптимального управления (1)–(3) использован метод, основанный на применении множителей Лагранжа специального вида [7].

Решение задачи 1

Для решения поставленной задачи образуем вспомогательный функционал. Для этого прибавим к функционалу (3) систему дифференциальных уравнений (1) с множителем $\lambda = Kx + q$, тогда получим:

$$L(x,u) = \int\limits_{t_0}^{T} \Big[\frac{1}{2}\dot{x}^* D(t)\dot{x} + \frac{1}{2}x^* Q(t)x + \frac{1}{2}u^* R(t)u +$$

$$+(q(t) + K(t)x)^*(A(t)x + B(t)u + f(t) - \dot{x})\Big]dt, \qquad (4)$$

где $q(t)$ - вектор размерности $n \times 1$; $K(t)$ - симметричная положительно определенная матрица размерности $n \times n$. Такое представление функционала $L(x,u)$ позволяет исходную задачу на условный экстремум свести к задаче на безусловный экстремум. Множитель $\lambda = Kx + q$ снимает ограничения, налагаемые на допустимые пары $\{x(t), u(t)\}$, в виде системы дифференциальных уравнений (1). Используя необходимые условия оптимальности для функционала (4), находим управление в следующем виде:

$$u(x(t),t) = -R^{-1}(t)B^*(t)(D(t)\dot{x}(t) + K(t)x(t) + q(t)). \qquad (5)$$

Для дальнейшего исследования поставленной задачи представим управление (5) в следующем виде:

$$u(x(t),t) = -(R(t)+B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)((K(t)+D(t)A(t))x(t)+q(t)+D(t)f(t)). \quad (6)$$

Пусть матрица K является решением нелинейного матричного дифференциального уравнения типа Риккати:

$$\dot{K} + KA(t) + A^*(t)K - (K + D(t)A(t))^*B(t)(R(t) + B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)\times$$

$$\times(K + D(t)A(t)) + A^*(t)D(t)A(t) + Q(t) = 0, \qquad K(T) = K_1, \qquad (7)$$

а вектор-функция $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{q} + (A(t) - B(t)(R(t) + B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)(K(t) + D(t)A(t)))^*q(t) + (K(t)+$$

$$+A^*(t)D(t) - (K(t)+D(t)A(t))^*B(t)(R(t) + B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)D(t))f(t) = 0, \quad (8)$$

Далее, дифференциальное уравнение, определяющее закон движения системы (1) с управлением (6), будет следующим:

$$\dot{x} = A_1(t)x - B_1(t)q(t) + (E - B_1(t)D(t))f(t), \qquad (9)$$

$$\dot{q} = -A_1^*(t)q - (K(t) + A_1^*(t)D(t))f(t), \qquad (10)$$

с условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A(t) - B(t)(R(t) + B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)(K(t) + D(t)A(t)), \\ B_1(t) &= B(t)(R(t) + B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t), \end{aligned} \tag{11}$$

E – единичная матрица.

Отметим, что решения дифференциальных уравнений (9) и (10) удовлетворяют следующему соотношению:

$$x(t) = W(t,T)q(t) + y(t), \;\; t \in [t_0, T], \tag{12}$$

где матрица $W(t,T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{W} = WA_1^*(t) + A_1(t)W - B_1(t), \;\; W(T,T) = 0, \tag{13}$$

а функция $y(t),\ t \in [t_0, T]$, определяется из решения дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = A_1(t)y(t) + (E - B_1(t)D(t) + W(t,T)(K(t) + A_1^*(t)D(t)))f(t), y(T) = x_1. \tag{14}$$

Отсюда с учетом (12) находим начальное условие для дифференциального уравнения (14)

$$q(t_0) = W^{-1}(t_0,T)[x(t_0) - y(t_0)]. \tag{15}$$

Таким образом, получен следующий результат для задачи 1.

Теорема 1 *Для оптимальности пары $\{\overline{x}(t), \overline{u}(t)\}$ в задаче 1, необходимо и достаточно, чтобы:*

1. $\overline{x}(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = A_1(t)x - B_1(t)q(t) + (E - B_1(t)D(t))f(t), \tag{16}$$

с условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_1;$$

2. управление $\overline{u}(t) = u(\overline{x}(t), t)$ определялось следующим образом

$$\overline{u}(t) = -(R(t)+B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)((K(t)+D(t)A(t))\overline{x}(t)+q(t)+D(t)f(t)), \tag{17}$$

где матрица $K(t)$ является решением нелинейного матричного уравнения типа Риккати (7), а вектор-функция $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (8) с начальным условием (15).

Решение задачи 2

Для решения поставленной задачи 2 образуем вспомогательный функционал с применением множителей Лагранжа специального вида [7]. Для этого прибавим к выражению для функционала (4) систему дифференциальных уравнений (1) с множителем $\lambda_0 = Kx+q$ и дополнительно следующее выражение $\lambda_1^*(\alpha-u)+\lambda_2^*(u-\beta)+\lambda_3^*(x-Wq-y)$, где $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$.

В результате получим следующий функционал:

$$L(x,u) = \int_{t_0}^{T} \Big[\frac{1}{2}\dot{x}^* D(t)\dot{x} + \frac{1}{2}x^* Q(t)x + \frac{1}{2}u^* R(t)u + (q(t)+K(t)x)^*(A(t)x + B(t)u +$$

$$+ f(t) - \dot{x}) + \lambda_1^*(t)(\alpha(t)-u) + \lambda_2^*(t)(u-\beta(t)) + \lambda_3^*(t)(x - W(t,T)q(t) - y(t))\Big]dt, \quad (18)$$

где $q(t)$ - вектор размерности $n \times 1$; $K(t)$ - симметричная положительно определенная матрица размерности $n \times n$.

Множитель $\lambda_0 = Kx + q$ снимает ограничения, налагаемые на допустимые пары $\{x(t), u(t)\}$, в виде системы дифференциальных уравнений (1), а функции $\{\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t)\}$ - соответствующие ограничения, налагаемые на управления (3), множитель λ_3 сохраняет свойство (12) для определения начальных условий (15).

Методами дифференциального исчисления находим управление, доставляющее минимальное значение функционалу (18) в следующем виде:

$$\tilde{u}(x,t) = -R^{-1}(t)[B^*(t)(D(t)\dot{x}(t) + K(t)x(t) + q(t)) - \lambda_1(x,t) + \lambda_2(x,t)]. \quad (19)$$

Пусть матрица K является решением нелинейного матричного уравнения типа Риккати:

$$\dot{K} + KA(t) + A^*(t)K - (K + D(t)A(t))^* B(t)(R(t) + B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)\times$$

$$\times(K + D(t)A(t)) + A^*(t)D(t)A(t) + Q(t) = 0, \qquad K(T) = K_1, \quad (20)$$

а вектор-функция $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{q} + A_1^*(t)q - W^{-1}(t,T)B(t)\phi(x,t) + (K(t) + A_1^*(t)D(t))f(t) = 0, \quad (21)$$

Множитель λ_3 определим таким образом, чтобы выполнялось условие (12) для определения начального условия дифференциального уравнения (21):

$$\lambda_3(x,t) = -((K(t) + D(t)A(t))^* + W^{-1}(t,T))B(t)\phi(x,t),$$

где $\phi(x,t) = (R(t) + B^*(t)D(t)B(t))^{-1}[\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)]$, матрица $W(t,T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{W} = WA_1^*(t) + A_1(t)W - B_1(t), \;\; W(T,T) = 0,$$

а функция $y(t)$ – дифференциальному уравнению

$$\dot{y}(t) = A_1(t)y(t) + (E - B(t)(R(t) + B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)D(t) +$$

$$+W(t,T)(K(t)+A_1^*(t)D(t))f(t), \qquad y(T)=x_1.$$

Обозначим

$$w(x,t)=$$

$$=-(R(t)+B^*(t)D(t)B(t))^{-1}B^*(t)((K(t)+D(t)A(t))x(t)+q(t)+D(t)f(t)), \qquad (22)$$

затем определим множители $\lambda_1(x,t)\geq 0, \lambda_2(x,t)\geq 0$, управление $\tilde{u}(x,t)$ таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned}&(R(t)+B^*(t)D(t)B(t))(\tilde{u}(x,t)-w(x,t))-\lambda_1(x,t)+\lambda_2(x,t)=0,\\ &\lambda_1^*(x,t)(\alpha(t)-\tilde{u}(x,t))=0, \;\; \lambda_2^*(x,t)(\tilde{u}(x,t)-\beta(t))=0.\end{aligned} \qquad (23)$$

Для этого используем следующие выражения:

$$\lambda_1^0(x,t)=-inf(0,w(x,t)-\alpha(t)), \;\; \lambda_2^0(x,t)=-inf(0,\beta(t)-w(x,t)). \qquad (24)$$

Используя результаты из (24) осуществим выбор λ_1,λ_2, $\tilde{u}$ следующим образом:

- если $\lambda_{1i}^0=0$, $\lambda_{2i}^0=0$, то принимаем $\lambda_{1i}=0$, $\lambda_{2i}=0$, а значения $\tilde{u}_i$ определяем из уравнения (23);
- если $\lambda_{1i}^0>0$, то принимаем $\lambda_{2i}=0$, $\tilde{u}_i=\alpha_i$, а значения λ_{1i} определяем из уравнения (23);
- если $\lambda_{2i}^0>0$, то принимаем $\lambda_{1i}=0$, $\tilde{u}_i=\beta_i$, а значения λ_{2i} определяем из уравнения (23).

Таким образом, получен следующий результат для задачи 2.

Теорема 2 *Для оптимальности пары $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))\in\Delta(t_0,T)$ в задаче 2, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{x}(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению*

$$\dot{x}=A_1(t)x-B_1(t)q(t)+B(t)\phi(x,t)+(E-B_1(t)D(t))f(t), x(t_0)=x_0, x(T)=x_1. \quad (25)$$

Управление $\tilde{u}(t)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{u}(t)=-R^{-1}(t)[B^*(t)(D(t)\dot{\tilde{x}}(t)+K(t)\tilde{x}(t)+q(t))-\lambda_1(\tilde{x},t)+\lambda_2(\tilde{x},t)], \qquad (26)$$

где матрица $K(t)$ является решением уравнения (20), функция $q(t)$ удовлетворяет уравнению (21), а множители $\lambda_1(\tilde{x},t)\geq 0, \lambda_2(\tilde{x},t)\geq 0$ определяются из уравнения (23).

Пример. Рассмотрена задача оптимального управления:

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T\left[7\dot{x}_1^2+x_1^2+u^2\right]dt, \qquad (27)$$

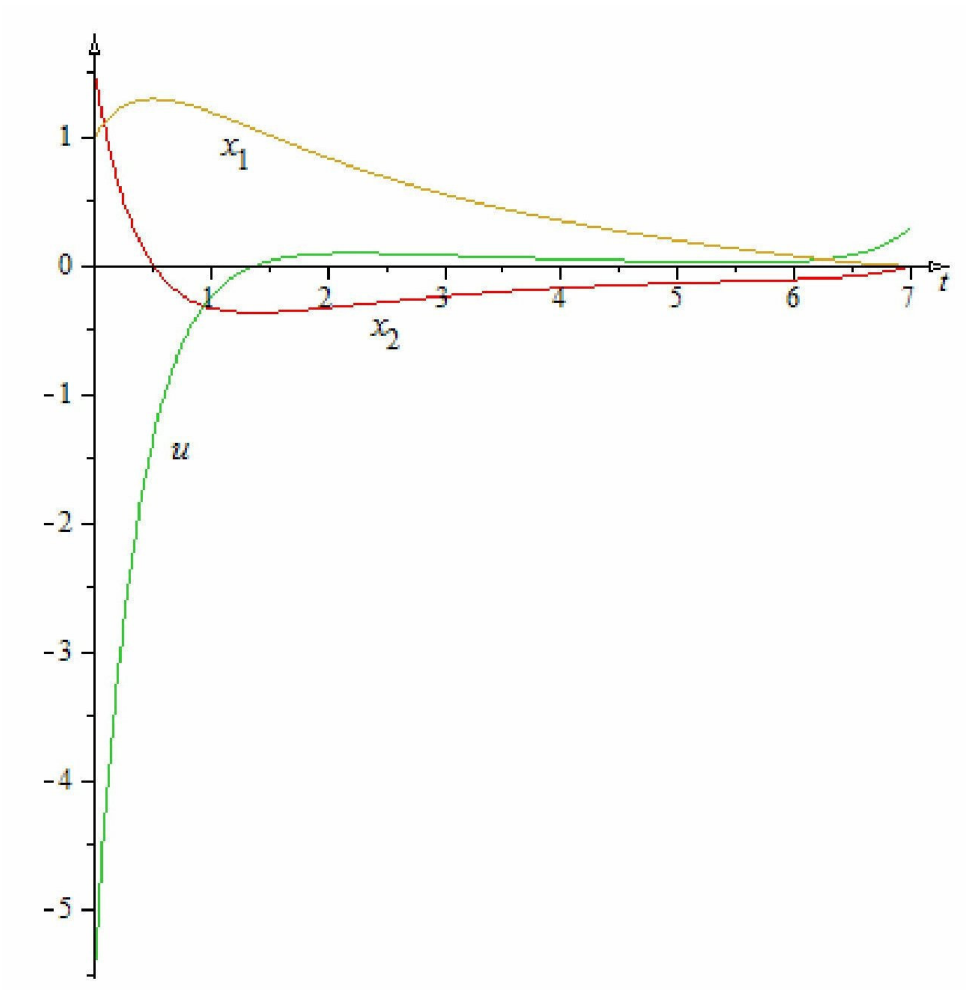

Рисунок 1. График оптимального управления и оптимальных траекторий без ограничений на управления

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ x_1(t_0) = 1,\ x_2(t_0) = \frac{3}{2},\ x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0,\ t_0 \le t \le T; \tag{28}$$

$$-1 \le u(t) \le 1,\ t \in [t_0, T],\ t_0 = 0, T = 7. \tag{29}$$

Решение примера (*без ограничений на управления*). Для рассматриваемой задачи (27)-(29) матрица $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ определена из уравнения типа Риккати, а матрица $W(t,T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{w}_{11}(t) = 2w_{12}(t), \quad w_{11}(T) = 0,$$

$$\dot{w}_{12}(t) = -w_{11}(t) - 3w_{12}(t) + w_{22}(t), \quad w_{12}(T) = 0,$$

$$\dot{w}_{22}(t) = -2w_{12}(t) - 6w_{22}(t) - 1, \quad w_{22}(T) = 0.$$

Искомое оптимальное управление записывается в виде $u = -x_1 - 3\dot{x}_1 - q_2$, а оптимальные траектории $x_1^*(t), x_2^*(t)$ в интервале времени $[t_0, T]$ определяются из системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(t_0) = 1,$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) - q_2(t), \quad x_2(t_0) = \frac{3}{2},$$

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t), \quad q_1(t_0) = \overline{q}_1,$$

$$\dot{q}_2(t) = -q_1(t) + 2q_2(t), \quad q_2(t_0) = \overline{q}_2.$$

Здесь начальные условия $q(t_0)$ можно вычислить по формуле

$$q(t_0) = W^{-1}(t_0, T)x(t_0) = \begin{pmatrix} \overline{q}_1 \\ \overline{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05875 \\ 0.02244 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(t_0, T) = \begin{pmatrix} w_{11}(t_0) & w_{12}(t_0) \\ w_{12}(t_0) & w_{22}(t_0) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.03735 & 0.01427 \\ 0.01427 & 0.00545 \end{pmatrix}$$

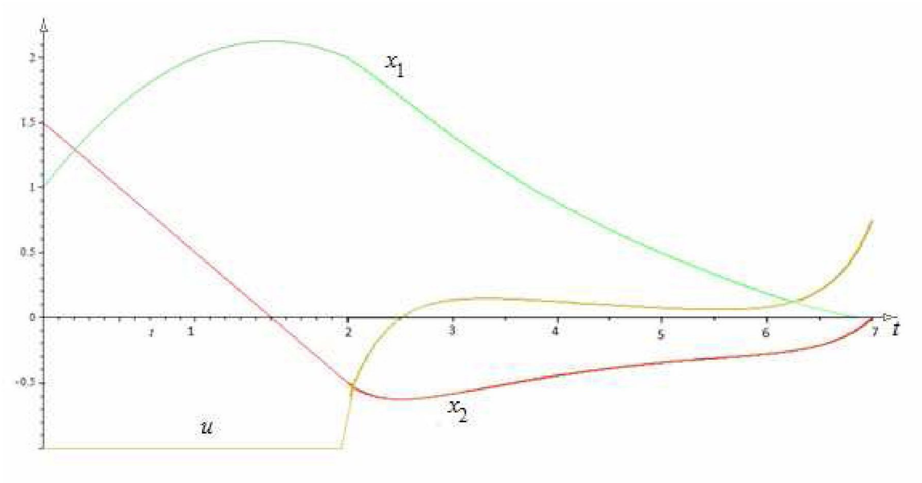

Рисунок 2. График оптимального управления и оптимальных траекторий с учетом ограничений на значения управления

Решение примера (*с ограничением на значения управления*). Искомое оптимальное управление записывается в виде $u(x^*, t) = \omega(x^*, t) + \phi(x^*, t)$, где

$$\omega(x^*, t) = -x_1^* - 3\dot{x}_1^* - q_2(t), \quad \phi(x^*, t) = -inf\{0; 1 + \omega(x^*, t)\} + inf\{0; 1 - \omega(x^*, t)\}$$

Оптимальные траектории $x_1^*(t), x_2^*(t)$ в интервале времени $[t_0, T]$ определяются из системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(t_0) = 1,$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 3\dot{x}_1(t) + \phi(x, t) - q_2(t), \quad x_2(t_0) = \frac{3}{2},$$

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t) + m_{12}(t)\phi(x,t), \quad q_1(t_0) = \overline{q}_1,$$
$$\dot{q}_2(t) = -q_1(t) + 3q_2(t) + m_{22}(t)\phi(x,t), \quad q_2(t_0) = \overline{q}_2.$$

Здесь функции $w_{11}(t), w_{12}(t), w_{22}(t)$ и $m_{12}(t), m_{22}(t)$ являются элементами матриц

$$W(t,T) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) \\ w_{12}(t) & w_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad W^{-1}(t,T) = \begin{pmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) \\ m_{12}(t) & m_{22}(t) \end{pmatrix}$$

соответственно. Отметим, что нет необходимости вычисления $W^{-1}(t,T)$ при $t \in [t_1, T]$, поскольку в этом интервале имеем $\phi(x,t) \equiv 0$, а оптимальное управление $u^*(x,t)$ находим в следующем виде

$$u^*(x,t) = \begin{cases} -1, & t_0 \le t \le t_1 \\ -x_1^*(t) - 3\dot{x}_1^*(t) - q_2(t), & t_1 \le t \le T, \end{cases}$$

где переключение управления происходит в момент времени $t_1 = 1.9$, которое определено из условия $-x_1^*(t_1) - 3\dot{x}_1^*(t_1) - q_2(t_1) = -1$. Графики $u^* = u^*(x,t)$, $x_1^* = x_1^*(t)$, и $x_2^* = x_2^*(t)$ представлены на рисунке. Найденное управление $u^*(x,t)$ обеспечивает достаточно точное выполнение конечного условия $x^*(T) = 0$ (в численных расчетах были получены значения $x_1^*(T) \approx 0.1 * 10^{-7}$, $x_2^*(T) \approx 0.1 * 10^{-7}$).

Расчеты произведены на ПЭВМ с применением пакета прикладных программ Maple-7, в котором реализован вышеизложенный алгоритм решения задачи оптимального управления. На рисунке 1 приведены графики оптимальных траекторий движения системы и управления без ограничений, а на рисунке 2 - с учетом ограничений на значения управления.

Заключение

В данной работе предложен новый метод построения конструктивного пропорционально-дифференцального регулятора и соответствующий алгоритм управления, основанного по принципу обратной связи, переводящего систему из начального состояния в желаемое конечное состояние за заданный интервал времени при наличии ограничений на значения управления.

Задача решена с использованием множителей Лагранжа специального вида, зависящих от фазовых координат и времени. За счет выбора $\lambda_0(x,t) = K(t)x + q(t)$ удается построить оптимальное управление по принципу обратной связи, а $\lambda_1(x,t) \ge 0$ и $\lambda_2(x,t) \ge 0$ выбираются таким образом, чтобы были выполнены условия дополняющей нежесткости в методе множителей Лагранжа.

Предлагаемый алгоритм решения нестационарной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с закрепленными концами траекторий и ограничениями на значения управления реализован на ПЭВМ с применением пакета прикладных программ Maple-7 и апробирован для модельного примера.

Литература

[1] *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I // Авт. и телемех. – 1960. – Т.21. – №4. – С. 436–441.

[2] *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 1960. – V.5. – No.1. – P. 102–119.

[3] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

[4] *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1968. – 446 с.

[5] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430 с.

[6] Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. В 5-ти томах. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.

[7] *Мурзабеков З.Н.* Конструктивный метод решения краевых задач оптимального управления для линейных нестационарных управляемых систем при наличии внешних воздействий и ограничений на управления // Докл. НАН Респ. Казахстан. Сер. физ.-матем. – 2009. – №3. – С. 16–21.

References

[1] *Letov A.M.* Analiticheskoe konstruirovanie regulyatorov. I // Avt. i telemekh. – 1960. – T.21. – №4. – S. 436–441.

[2] *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 1960. – V.5. – No.1. – P. 102–119.

[3] *Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishenko E.F.* Matematichekaya teoriya optimalnykh processov. – M.: Nauka, 1976. – 392 s.

[4] *Bellman R., Kalaba R.* Dinamicheskoe programmirovanie i sovremennaya teoriya upravleniya. – M.: Nauka, 1968. – 446 s.

[5] *Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V.* Optimalnoe upravlenie. – M.: Nauka, 1979. – 430 s.

[6] Metody klassicheskoy soremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya / Pod red. K.A. Pupkova, N.D. Egupova. V 5-i tomakh. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2004. – 784 s.

[7] *Murzabekov Z.N.* Konstruktivnyy metod resheniya kraevykh zadach optimalnogo upravleniya nestatsionarnykh upravlyaemykhsistem pri nalichii vneshnikh vozdeystviy i ogranicheniy na upravleniya // Dokl. NAN Resp. Kazakhstan. Ser. fiz.-matem. – 2009. – №3. – S. 16–21.