

МРНТИ 27.53.21; 27.41.19

Задача Коши для уравнений Стокса

Даирбаева Г. – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +7272211589, E-mail: lazzat.dairbaeva@kaznu.kz

В данной работе рассматривается задача Коши для уравнений Стокса в области с криволинейной границей, неизвестно решение неизвестно на части границы. Данная задача является некорректной. Построены прямая и сопряженная задачи для исходных уравнений, введено понятие обобщенных решений для этих задач в пространствах Соболева. Решение для исходной задачи сводится к решению обратной задачи для прямой. Обратная задача представлена в операторной форме, построен целевой функционал, вычислен его градиент. Разработан вычислительный алгоритм для решения обратной задачи для уравнений Стокса на основе сочетания оптимизационного метода и метода конечных элементов (МКЭ).

Ключевые слова: Задача Коши, уравнения Стокса, обратная задача, МКЭ, оптимизационный метод.

Стокс теңдеулеріне арналған Коши есебі

Даирбаева Г. - физика-математика ғылымдарының кандидаты, математикалық және компьютерлік үлгілеу кафедрасының доценті, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ-сы, Қазақстан Республикасы, +7272211589, E-mail: lazzat.dairbaeva@kaznu.kz

Осы жұмыста қисық сызықты шегі бар салада Стокс теңдеулеріне арналған Коши есебі қарастырылады, шек бөліктеріне шешімі белгісіз. Бұл есеп қисынсыз болып табылады. Түзу сызылды және бастапқы теңдеулерге арналған түйіндес есептер жасалды, Соболев кеңістіктерінде осы есептерге жалпыланған шешім түсінігі енгізілді. Бастапқы есеп шешімі түзуге арналған кері есепті шешуге қисындасып келеді. Кері есеп операторлық үлгіде келтірілген, мақсатты функционал сызылып, оның градиенті есептелді. Стокс теңдеулеріне арналған кері есепті шешу мақсатында оңтайландыру әдістемесі және соңғы элемент әдістемесі (СЭӘ) негізінде есептеу алгоритмі әзірленді.

Түйін сөздер: Коши есебі, Стокс теңдеуі, кері есеп, СЭӘ, оңтайландыру әдістемесі.

The Cauchy problem for the Stokes equations

Dairbayeva G. - candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate Professor, Mathematical and Computer Modeling Department, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +7272211589, E-mail: lazzat.dairbaeva@kaznu.kz

In this paper we consider the Cauchy problem for the Stokes equations in domain with curvilinear boundary, the solution is not known on a part of the boundary. This problem is ill-posed. Direct and conjugate problems are constructed for the initial equations, the definition of generalized solutions are introduced for these problems in the Sobolev space. It is shown that the solution for the initial problem is reduced to the solution of the inverse problem for the direct problem. The inverse problem is represented in operator form, objective functional is constructed, its gradient is calculated. Computational algorithm is developed for solving the inverse problem for the Stokes equations on the basis of the combination of optimization method and the finite element method (FEM).

Key words: Cauchy Problem, Stokes equations, inverse problem, FEM, optimization method.

1 Введение

Обратные и некорректные задачи естествознания в настоящее время представляют большой интерес в прикладной математике. Таким задачам посвящено много литературы, например, обширный справочный материал представлен в монографии (Кабанихин, 2009). В большинстве случаев, как и в данной работе, обратные и некорректные задачи неустойчивы.

Рассмотрим задачу Коши для уравнений Стокса в криволинейной области $\Omega = \{(x, y) : -2\pi < x < 2\pi, \cos x + 1 < y < \cos x + 3\}$

$$\Delta \vec{u} - \nabla p = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}|_{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}} &= 0 \\ \vec{u}|_{\Gamma_{03}} &= \vec{\varphi} \end{aligned} \quad (3)$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{f}, \quad (x, y) \in \Gamma_0 \quad (4)$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2)$ – единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$,

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \Gamma_{03}, \quad \Gamma_1 = \{(x, y) : x = 2\pi, 2 \leq y \leq 4\},$$

$$\Gamma_{01} = \{(x, y) : -2\pi \leq x \leq 2\pi, x = 2\pi, y = \cos x + 1\},$$

$$\Gamma_{02} = \{(x, y) : -2\pi \leq x \leq 2\pi, x = 2\pi, y = \cos x + 3\},$$

$$\Gamma_{03} = \{(x, y) : x = -2\pi, 2 \leq y \leq 4\}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = (\vec{n}\nabla)\vec{u} = (\vec{n}\nabla u_1, \vec{n}\nabla u_2) = \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_1}{\partial y}, n_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = ((p - u_{1x})n_1 - u_{1y}n_2, (p - u_{2x})n_2 - n_1u_{2y})$$

$$\vec{n} = \left(-\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \right), \quad \text{если } (x, y) \in \Gamma_{01},$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \right), \quad \text{если } (x, y) \in \Gamma_{02},$$

условия (4) можно записать в следующем виде

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \left((-p + u_{1x}) \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \frac{(-p + u_{2x})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{u_{2y} \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \right) = (f_1, f_2),$$

если $(x, y) \in \Gamma_{01}$,

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \left(\frac{(p - u_{1x}) \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \frac{-\sin x u_{2x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{(p - u_{2y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \right) = (f_1, f_2), \quad (x, y) \in \Gamma_{02},$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = ((-p + u_{1x}), u_{2x}) = (f_1, f_2), \quad (x, y) \in \Gamma_{03},$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = ((p - u_{1x}), -u_{2x}) \quad \text{при } (x, y) \in \Gamma_1.$$

2 Материалы и методы

Метод исследования некорректной задачи (1) – (4) заключается в сведении ее к обратной задаче по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче для исходных уравнений (Кабанихин, 2009).

2.1 Постановка прямой задачи

Рассмотрим следующую задачу

$$\Delta \vec{u} - \nabla p = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (5)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (6)$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{q}, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}|_{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}} &= 0 \\ \vec{u}|_{\Gamma_{03}} &= \vec{\varphi}, \quad (x, y) \in \Gamma_{03} \end{aligned} \quad (8)$$

Задачу (5) – (8), в которой по заданным функциям $\vec{q} = (q_1(y), q_2(y))$, $\vec{\varphi} = (\varphi_1(y), \varphi_2(y))$ нужно найти функции $\vec{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y))$, $p(x, y)$, будем называть прямой.

Для задачи (5) – (8) налагаем условия склейки на границе

$$\Gamma_{04} = \{x = 0, 2 \leq y \leq 4\} :$$

$$\varepsilon_1^- u_{1x}(0-0, y) = \varepsilon_1^+ u_{1x}(0+0, y), \quad (9)$$

$$\varepsilon_2^- u_{2x}(0-0, y) = \varepsilon_2^+ u_{2x}(0+0, y), \quad y \in [2, 4] \quad (10)$$

Рассмотрим пространства Соболева $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ с соответствующими нормами

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx dy + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим пространство следов функций из $W_2^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$ и обозначим это пространство через $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} u^2 ds + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(z) - u(h)|^2}{|z - h|} ds ds \right)^{1/2}, \quad (11)$$

где $z = (x, y)$, $h = (u, v)$.

Сужение функций из $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ на часть границы $\Gamma_0(\Gamma_{02}, \Gamma_1)$ обозначим через $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$, $(W_2^{1/2}(\Gamma_{02}), W_2^{1/2}(\Gamma_1))$ с нормой (11), где $\partial\Omega$ заменяется на $\Gamma_0(\Gamma_{02}, \Gamma_1)$.

Дадим определение обобщенного решения прямой задачи (5) – (8).

Определение. Пусть $\varphi \in W_2^{1/2}(\Gamma_{02})$ и $q \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*$. Обобщенным решением прямой задачи (5) – (8) будем называть совокупность функций

$$(\vec{u}, p) : \vec{u} \in W_2^1(\Omega), \vec{u}|_{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}} = 0, \vec{u}|_{\Gamma_{03}} = \vec{\varphi}, p \in L_2(\Omega),$$

удовлетворяющие тождеству

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \nabla \vec{v} dx dy + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx dy + \\ & + \int_2^4 [q_1 v_1 + q_2 v_2](2\pi, y) dy + \\ & + k_1(\varepsilon) \int_2^4 u_{1x}(0-0, y) v_1(0, y) dy + k_2(\varepsilon) \int_2^4 u_{2x}(0-0, y) v_2(0, y) dy = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

для $\forall \vec{v} \in W_2^1(\Omega), \vec{v}|_{\Gamma_0} = 0$. Здесь $k_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^-}{\varepsilon_1^+}, k_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^-}{\varepsilon_2^+}$.

Прямая задача (5) – (8) в смысле данного определения обобщенного решения является корректной (Ладыженская, 1961).

2.2 Обратная задача для прямой задачи (5) – (8)

Рассмотрим дополнительную информацию для задачи (5) – (8):

$$\left(P\vec{u} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_0} = \vec{f} \tag{13}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} \frac{(-p + u_{1x}) \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = f_1(x, y) \\ \frac{u_{2x} \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{(-p + u_{2y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = f_2(x, y), (x, y) \in \Gamma_{01}, \\ \frac{(p - u_{1x}) \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = f_1(x, y) \\ \frac{-\sin x u_{2x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{(p - u_{2y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = f_2(x, y), (x, y) \in \Gamma_{02}, \\ \begin{cases} -p + u_{1x} = f_1(x, y) \\ u_{2x} = f_2(x, y), (x, y) \in \Gamma_{03}. \end{cases} \end{cases}$$

Сделаем постановка следующей обратной задачи.

$$\Delta \vec{u} - \nabla p = 0, \tag{14}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}|_{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}} &= 0 \\ \vec{u}|_{\Gamma_{03}} &= \vec{\varphi}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\left(P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_1} = \vec{q}, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (17)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1^- u_{1x}(0 - 0, y) = \varepsilon_1^+ u_{1x}(0 + 0, y) \\ \varepsilon_2^- u_{2x}(0 - 0, y) = \varepsilon_2^+ u_{2x}(0 + 0, y), \quad y \in [2, 4]. \end{cases} \quad (18)$$

Требуется найти $\vec{q}(x, y)$ в задаче (14) – (18) с дополнительным условием (13). Обратную задачу (14) – (18), (13) можно записать в операторной форме

$$A\vec{q} = \vec{f} \quad (19)$$

где $: (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$, $f = (f_1, f_2)|_{\Gamma_0}$ – заданная функция, $q = (q_1, q_2)|_{\Gamma_1}$ – неизвестная функция. Пространства, аналогичные пространствам $(W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*$, $(W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$ введены в работе (Bastay, 2006).

Оператор A определен следующим образом

$$A : \vec{q} := \left(P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_1} \rightarrow \vec{f} := \left(P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_0}. \quad (20)$$

Здесь $Aq = (Aq_1, Aq_2)$, где

$$Aq_1 = \begin{cases} \frac{(-p + u_{1x})\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, & (x, y) \in \Gamma_{01}, \\ \frac{(p - u_{1x})\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, & (x, y) \in \Gamma_{02}, \\ -p + u_{1x}, & (x, y) \in \Gamma_{03}. \end{cases}$$

$$Aq_2 = \begin{cases} \frac{u_{2x}\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{-p + u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, & (x, y) \in \Gamma_{01} \\ \frac{-u_{2x}\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{p - u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, & (x, y) \in \Gamma_{02} \\ u_{2x}, & (x, y) \in \Gamma_{03}. \end{cases}$$

Для решения уравнения (19) применяется оптимизационный метод Ландвебера. Для этого рассмотрим следующий функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|Aq_1 - f_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|Aq_2 - f_2\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
J(q_1, q_2) = & \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{(-p + u_{1x}\sin x) + u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_1 \right)^2 (x, \cos x + 1) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx + \\
& \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{u_{2x}\sin x - p + u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_2 \right)^2 (x, \cos x + 1) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx + \\
& \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{(p - u_{1x}\sin x - u_{1y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_1 \right)^2 (x, \cos x + 3) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx + \\
& \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{-u_{2x}\sin x + p - u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_2 \right)^2 (x, \cos x + 3) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx + \\
& \int_2^4 (-p + u_{1x} - f_1)^2 (-2\pi, y) dy + \int_2^4 (u_{2x} - f_2)^2 (-2\pi, y) dy.
\end{aligned}$$

Для применения оптимизационного метода для решения уравнения (19) построим сопряженную задачу к прямой задаче (5) – (8).

Сопряженная задача имеет вид

$$\Delta \psi - \nabla g = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{div} \psi = 0 \quad (22)$$

$$(\psi_{1x} - g)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi_{2x}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(g\vec{n} - \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_1} = 0 \quad (23)$$

$$\psi|_{\Gamma_0} = \mu. \quad (24)$$

Здесь $\psi = (\psi_1, \psi_2)$:

$$\psi_1|_{\Gamma_0} = \begin{cases} 2 \left(\frac{(-p + u_{1x})\sin x + u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_1 \right), & (x, y) \in \Gamma_{01} \\ -2 \left(\frac{(p - u_{1x})\sin x - u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_1 \right), & (x, y) \in \Gamma_{02} \\ -2(-p + u_{1x} - f_1), & (x, y) \in \Gamma_{03} \end{cases}$$

$$\psi_2|_{\Gamma_0} = \begin{cases} 2 \left(\frac{u_{2x}\sin x - p + u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_2 \right), & (x, y) \in \Gamma_{01} \\ -2 \left(\frac{-u_{2x}\sin x + p - u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_2 \right), & (x, y) \in \Gamma_{02} \\ -2(u_{2x} - f_2), & (x, y) \in \Gamma_{03}. \end{cases}$$

Аналогично, как для прямой задаче обобщенное решение сопряженной задачи (21) – (24) удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$-\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla v dx dy + \int_{\Omega} g \operatorname{div} v ds = 0,$$

$$\psi|_{\Gamma_0} = \mu,$$

$$v|_{\Gamma_0} = 0.$$

Вычислен градиент данного функционала $\nabla J = (J'_{q_1}, J'_{q_2})$, где

$$J'_{q_1} = \psi_1|_{L_2(\Gamma_1)},$$

$$J'_{q_2} = \psi_2|_{L_2(\Gamma_1)},$$

ψ есть решение сопряженной задачи (21) – (24), в которой граничная функция $\mu(x, y)$ имеет следующий вид

$$\mu(x, y) = 2[Aq - f](x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0.$$

Для применения метода конечных элементов проведена триангуляция области Ω , которая показана рисунке 1:

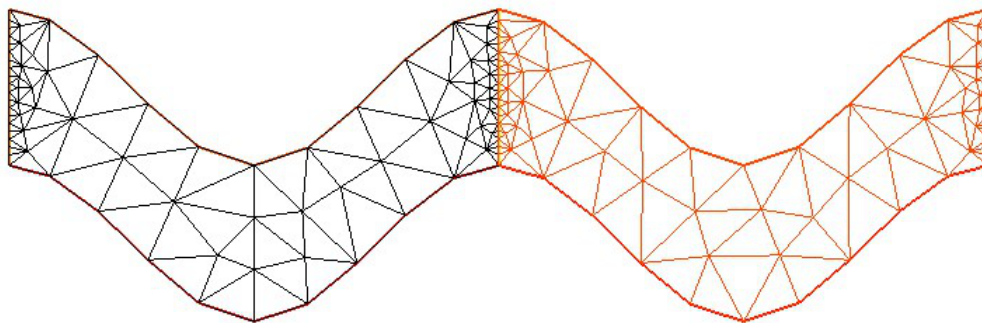


Рисунок 1 – Триангуляция области Ω

2.3 Сходимость обратной задачи по функционалу

В качестве оптимизационного метода для решения обратной задачи (14) – (18), (13) рассмотрим метод Ландвебера

$$q_{n+1} = q - \alpha J' q_n,$$

$$\alpha \in (0, \|A\|^{-2}), \quad \text{где } q_n = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)}).$$

Сходимость последовательности q_n по функционалу доказывается аналогично, как в (Kabanikhin, 2006).

Теорема (о сходимости по функционалу метода Ландвебера). Пусть $A : (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$ — линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого $f \in (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$ существует точное решение q_T уравнения $Aq = f$. Тогда при любом $q_0 \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*$ и $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$ последовательность q_n , определяемая равенствами

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad q_0 \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*,$$

сходится по функционалу, и имеет место оценка

$$J(q_n) \leq \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}.$$

2.4 Численное решение обратной задачи

Из алгоритма метода Ландвебера видно, что для вычисления приближенного решения q_n для каждого n приходится решать прямую задачу (5) – (8) и сопряженную (21) – (24). Для численного решения прямой и сопряженных задач применяется метод конечных элементов (Larry J. Segerlind, 1984), число разбиения сторон области $n = 30$. В качестве нулевого приближения решения обратной задачи (19) взято нулевое приближение $q_{(1)0} = 0$, $q_{(2)0} = 0$, а параметр $\alpha = 0,01$.

На рисунках 2-4 показаны компоненты точного решения $(u_{(1)}, u_{(2)}, p)$ прямой задачи (5) – (8). На рисунках 5-7 приведены компоненты нулевого приближения $(u_{(1)0}, u_{(2)0}, p_{(0)})$ решения прямой задачи (5) – (7). На рисунках 8-10 показаны компоненты приближенного решения $(u_{(1)}, u_{(2)}, p)$ прямой задачи при 1000 итераций. Рисунки 11, 12 иллюстрируют погрешности скорости $(u_{(1)}, u_{(2)})$ и давления p в норме сеточного аналога нормы в $L_2(\Gamma_1)$, где горизонтальная ось - итерации, вертикальная - погрешность, на рисунке 13 показана погрешность приближенного решения q обратной задачи.

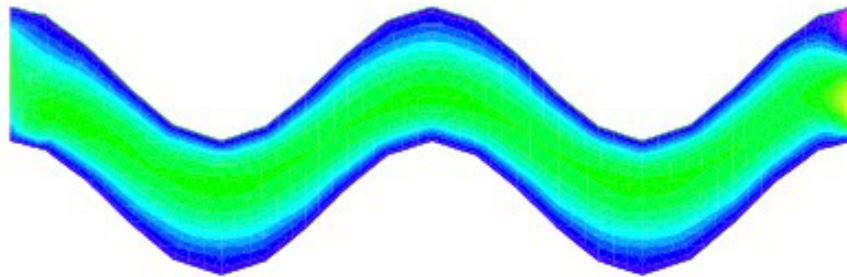


Рисунок 2 – Точное решение прямой задачи. Скорость $u_{(1)}$

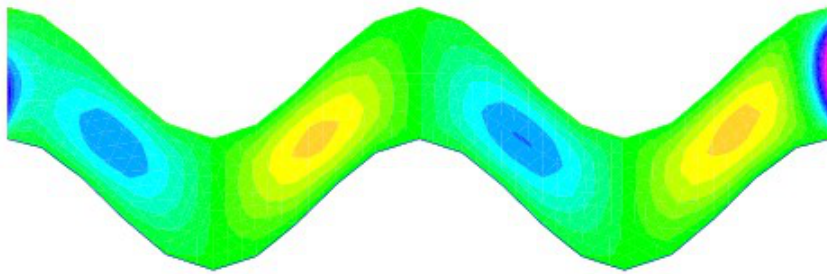


Рисунок 3 – Точное решение прямой задачи. Скорость $u_{(2)}$

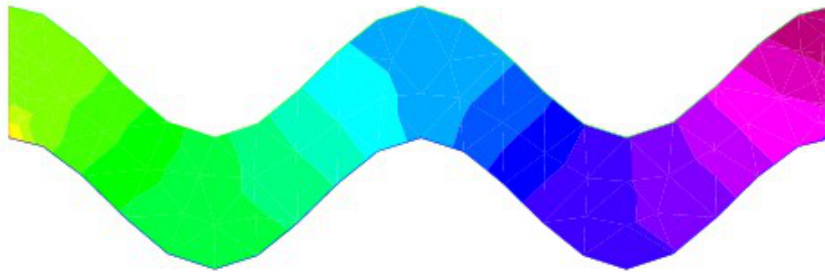


Рисунок 4 – Точное решение прямой задачи. Давление p

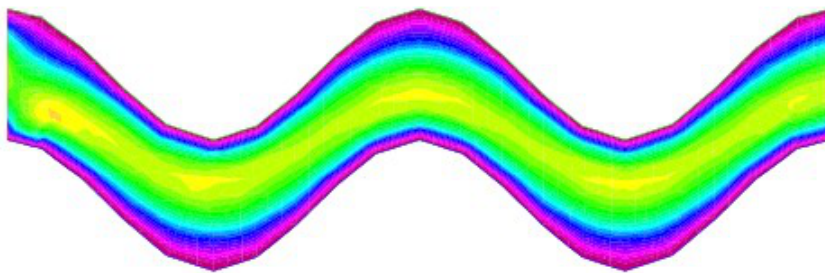


Рисунок 5 – Нулевое приближение решения прямой задачи. Скорость $u_{(1)0}$

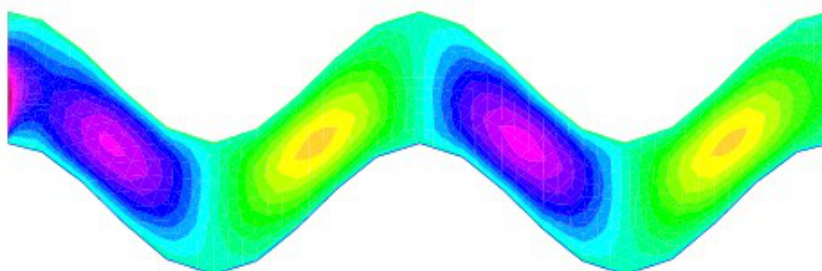


Рисунок 6 – Нулевое приближение решения прямой задачи. Скорость $u_{(2)0}$

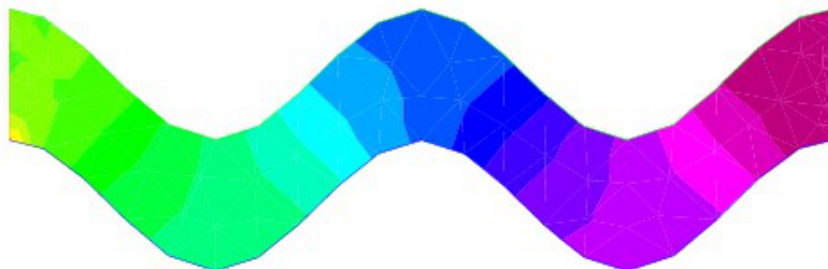


Рисунок 7 – Нулевое приближение решения прямой задачи. Давление $p_{(0)}$

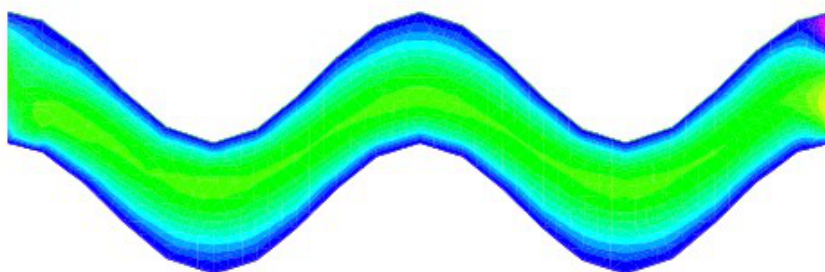


Рисунок 8 – Приближенное решение прямой задачи. Скорость $u_{(1)}$

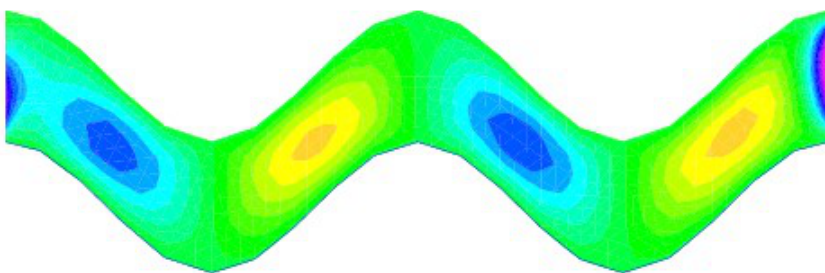


Рисунок 9 – Приближенное решение прямой задачи. Скорость $u_{(2)}$

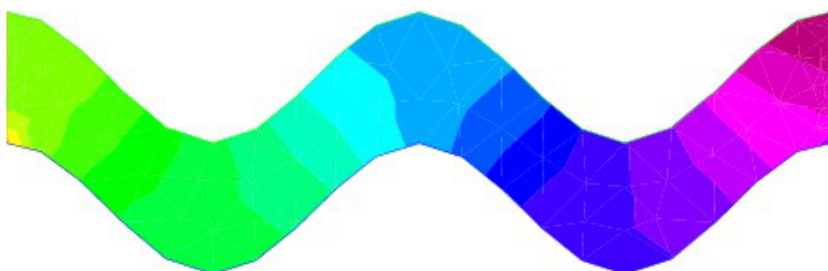


Рисунок 10 – Приближенное решение прямой задачи. Давление p

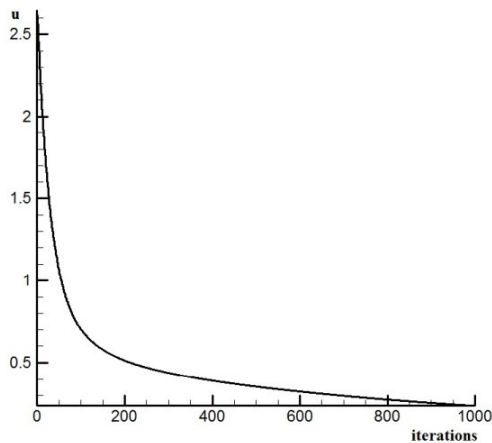


Рисунок 11 – Погрешность скорости u прямой задачи от количества итераций

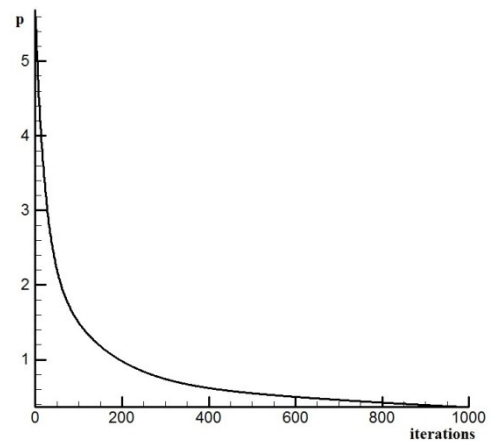


Рисунок 12 – Погрешность давления от количества итераций

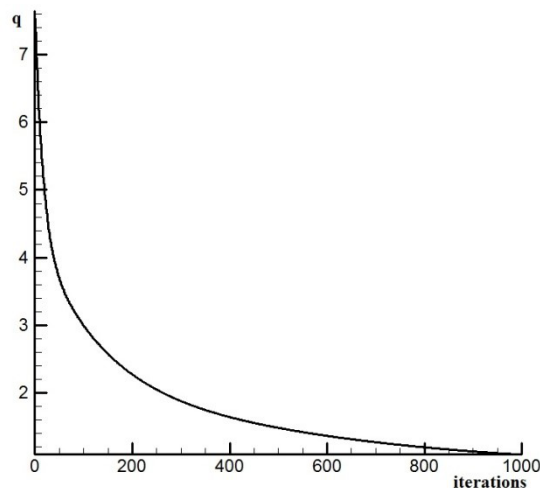


Рисунок 13 – Погрешность приближенного решения q обратной задачи от количества итераций

3 Заключение

Рассмотрена некорректная задача Коши для уравнений Стокса в криволинейной области. Показано сведение исходной задачи к обратной задаче для исходных уравнений, для прямой и сопряженных задач определены обобщенные решения и классы пространств функций. Для решения обратной задачи разработан вычислительный алгоритм с использованием оптимизационного метода Ландвебера, в котором предполагается также решение прямой и сопряженной задач. Показана сходимость обратной задачи по целевому функционалу. Для численного решения прямой и сопряженных задач применен МКЭ. Из численных результатов следует, что погрешности решений прямой и сопряженной задач сходятся к нулю с увеличением числа итераций, обратная задача сходится по функционалу.

Список литературы

- [1] Bastay G., Johansson T., Lesnik D., Kozlov K. Alternating Method for the Stationary Stokes System // ZAMM (Z. Angew. Math. Mech). – 2006. – Vol. 86. – С. 268-280.
- [2] Kabanikhin S.I., Dairbaeva G. The Cauchy problem for Laplace equation on plane // Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany). – 2006. – Vol. 93. – P. 89-102.
- [3] Larry J. Segerlind Applied finite elements analysis. – New York: United States Copyright, 1984. – 411 p.
- [4] Кabanikhин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
- [5] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Государственное издательство физик-математической литературы, 1961. – 310 с.

References

- [1] Bastay G., Johansson T., Lesnik D., Kozlov K., "An Alternating Method for the Stationary Stokes System", *ZAMM (Z. Angew. Math. Mech)* 86 (2006.): 268-280.
- [2] Kabanikhin S.I., Dairbaeva G., "The Cauchy problem for Laplace equation on plane", *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany)* 93 (2006): 89-102.
- [3] Larry J. Segerlind. *Applied finite elements analysis* (New York: United States Copyright, 1984), 411 p.
- [4] Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems* (Novosibirsk: Siberian scientific publishing, 2009), 457 p.
- [5] Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti* [Mathematical problems of dynamics of viscous incompressible fluid]. (M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fizik-matematicheskoy literatury, 1961), 310 s.