МРНТИ 27.29.17, 27.29.23

Несобственные интегралы в теории глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем

Айсагалиев С.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77272211573,
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Айсагалиева С.С., Научно-исследовательский институт математики и механики
КазНУ имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан,
+77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику многомерных фазовых систем со счетным положением равновесия с периодическими нелинейными функциями из заданного множества. Такая неопределенность правой части дифференциального уравнения порождает неединственность решения, что приводит к исследованию свойств решений уравнений с дифференциальными включениями. Предлагается совершенно новый подход к исследованию свойств решения динамических систем со счетным положением равновесия при неполной информации о нелинейностях. Путем неособого преобразования исходная система приводится к специальному виду, состоящему из двух частей. Первая часть дифференциальных уравнений разрешима относительно компонентов периодической функции, а вторая часть не содержит нелинейные функции. Исследованы свойства решений, получены оценки на решения исходной системы и преобразованной системы, доказана их ограниченность. Получены тождества относительно компонентов нелинейной функции и установлена их связь с фазовыми переменными. Исследованы свойства квадратичных форм относительно фазовых переменных и производных. Получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы для двух случаев: когда значения интегралов от компонентов нелинейной функции в периоде равны нулю; когда значения интегралов в периоде отличные от нуля. Эти результаты могут быть использованы для получения условий глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем.
Ключевые слова: Неособое преобразование, свойства решений, несобственные интегралы, динамическая система, счетное положение равновесия.

Көпөлшемді фазалық жүйелердің глобальді асимптотикалық орнықтылық теориясындағы меншіксіз интегралдар

Айсағалиев С.Ә., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қаласы,
Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Айсағалиева С.С., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика
ғызыми-зерттеу институты, Алматы қаласы, Қазақстан Республикасы,
+77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Берілген жиында сызықтық емес периодты функциялары бар тепе-теңдік жағдайы ақырлы көп өлшемді фазалық жүйелер динамикасын сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер класы қарастырылады. Дифференциалдық теңдеудің оң жақ бөлігіндегі мұндай анықталмағандық шешімнің жалғыз еместігін тудырады, ал бұл дифференциалдық қосындылары бар теңдеулердің шешімдерінің қасиеттерін зерттеуге әкеледі. Сызықсыздық туралы толық емес ақпаратында тепе-теңдік жағдайы ақырлы динамикалық жүйелерді шешу қасиеттерін зерттеуде жаңа әдіс ұсынылады. Ерекше емес түрлендіру арқылы бастапқы жүйе екі бөліктен тұратын арнайы түрге келтіріледі. Дифференциалдық теңдеулердің бірінші бөлігі периодты функцияның компоненттеріне қатысты шешіледі, ал екінші бөлігінде сызықсыз функциялар жоқ. Шешімнің қасиеттері зерттеліп, бастапқы жүйе және түрленген жүйенің шешімдеріне баға беріліп, олардың шектелгендігі дәлелденген. Сызықты емес функцияның компоненттеріне қатысты теңдіктер алынған және олардың фазалық айнымалымен байланысы орнатылған. Фазалық айнымалы және туындыларға қатысты квадраттық формалардың қасиеттері зерттелінген. Сызықтық емес функцияның компоненттерінің интегралдарының мәндері периодта нөлге тең және интегралдардың мәндері периодта нөлден өзгеше болған екі жағдайлары үшін жүйе шешімінің бойында меншіксіз интегралдардың бағалары алынған. Бұл нәтижелер көп өлшемді фазалық жүйелердің глобальді асимптоталық тұрақтылығы шарттарын алу үшін пайдаланылуы мүмкін.
Түйін сөздер: Ерекше емес түрлендіру, шешімнің қасиеттері, меншіксіз интегралдар, динамикалық жүйелер, тепе-теңдікдің ақырлы жағдайы.

Improper integrals for stability theory of multidimensional phase systems

Aisagaliev S.A., Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Kazakhstan, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Aisagalieva S.S., Research Institute of Mathematics and Mechanics of al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

A class of ordinary differential equations describing the dynamics of multidimensional phase systems with a countable equilibrium position with periodic nonlinear functions from a given set is considered. Such uncertainty of right side of the differential equation gives rise to the nonuniqueness of the solution, which leads to the study of the properties of solutions of equations with differential inclusions. A completely new approach to the study of the properties of the solution of dynamical systems with a countable equilibrium position with incomplete information on nonlinearities is proposed. By a nonsingular transformation, the original system is reduced to a special kind, consisting of two parts. The first part of the differential equations is solvable with respect to the components of the periodic function and the second part does not contain nonlinear functions. The properties of solutions are studied, estimates for the solutions of the original system and the transformed system are obtained and their boundedness is proved. Identities with respect to the components of the nonlinear function are obtained and their relation to the phase variables is established. The properties of quadratic forms with respect to phase variables and derivatives are studied. The estimates of improper integrals along the solution of the system are obtained for two cases: when the values of the integrals of the components of the nonlinear function in the period are zero; When the values of the integrals in the period are different from zero. These results can be used to obtain conditions for global asymptotic stability of multidimensional phase systems.
Key words: nonsingular transformation, properties of solutions, improper integrals, dynamical system, countable equilibrium position.

1 Введение

Рассмотрим динамическую систему с цилиндрическим фазовым пространством описываемую уравнением следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = x + R\varphi(x), \quad x(0) = x_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, C, R – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$, $\lambda_j(A)$ $j = \overline{1,n}$ – собственные значения матрицы A, $|x_0| < \infty$, $|\sigma_0| < \infty$, $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m))$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

Функция

$$\begin{gathered}\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C^1(R^m, R^m)/\mu_{1i} \leq \frac{d\varphi_i(\sigma_i)}{d\sigma_i} \leq \mu_{2i} \\ \varphi_i(\sigma_i) = \varphi_i(\sigma_i + \Delta_i), \ \ \forall \sigma_i, \ \ \sigma_i \in R^1, \ \ i = \overline{1,m}\},\end{gathered} \tag{2}$$

где Δ_i – период функции $\varphi_i(\sigma_i)$, $\mu_2 i$, $i = \overline{1,m}$ – заданные числа, $|\mu_1| < \infty$, $|\mu_2| < \infty$, $\mu_1 = (\mu_{11}, \ldots, \mu_{1m})$, $\mu_2 = (\mu_{21}, \ldots, \mu_{2m})$.

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений. $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\ Cx_* + R\varphi(\sigma_*) = 0$.

Поскольку $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $(R - CA^{-1}B)\varphi(\sigma_*) = 0$, то при $R - CA^{-1}B$ – неособая матрица порядка $m \times m$ система (1), (2) имеет стационарное множество.

$$\Lambda = \{(x_*, \sigma_*) \in R^{n+m}/x_* = 0, \ \ \varphi(\sigma_*) = 0\}.$$

Так как $\varphi(\sigma_*) = \varphi(\sigma_* + k\Delta) = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то положение равновесия системы (1), (2) является счетным множеством, $\sigma_* = (\sigma_{1*}, \ldots, \sigma_{m*})$, $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$.

Определение 1 *Стационарное множество Λ системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво, если для любой функции $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и любого начального состояния $(x_0, \sigma_0) \in R^{n+m}$, $|x_0| < \infty$, $|\sigma_0| < \infty$ решение системы $x(t) = x(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi)$, $\sigma(t) = \sigma(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi)$, $t \in I$ обладает свойством $x(t) \to x_* = 0$, $\sigma(t) \to \sigma_*$ при $t \to \infty$, где $\varphi(\sigma_*) = 0$.*

Определение 2 *Условием глобальной асимптотической устойчивости системы (1), (2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы $(A, B, C, R, \mu_1, \mu_2)$, при выполнении которых множество Λ глобально асимптотически устойчиво.*

Необходимо исследовать в отдельности два случая:

1.

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = 0, \quad \forall \sigma_i, \ \sigma_i \in R^1, \ \ i = \overline{1,m};$$

2.

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i \neq 0, \quad \forall \sigma_i, \ \sigma_i \in R^1, \ \ i = \overline{1,m}.$$

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *Найти оценки несобственных интегралов, вдоль решения системы (1), (2), для случаев 1, 2.*

Задача 2 *Найти новое эффективное условие глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества* Λ *системы* (1), (2) *для случая, когда*

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = 0, \quad \forall\sigma_i,\ \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1,m};$$

на основе оценки несобственных интегралов для случая 1.

Задача 3 *Найти новое эффективное условие глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества* Λ *системы* (1), (2) *для случая, когда*

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i \neq 0, \quad \forall\sigma_i,\ \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1,m};$$

на основе оценки несобственных интегралов для случая 2.

2 Обзор литературы

Первой работой, посвященной качественно-численным методам исследования фазовых систем, была статья Ф. Трикоми (Triomi, 1933 : 3-10). Применение метода точечных отображений к фазовым системам рассмотрено в работах А.А. Андронова и его последователей (Андронов, 1959), (Барбашин, 1969). Следующим этапом развития качественно-численных методов было применение периодических функций Ляпунова к исследованию фазовых систем. Основы теории периодических функций Ляпунова приведены в работах (Бакаев, 1959 : 105-110), (Бакаев, 1965 : 35-46). Методы построения различных периодических функций Ляпунова, обеспечивающих устойчивость в большинстве фазовых систем, можно найти в (Андронов, 1959). Приближенные нелокальные методы исследования фазовых систем изложены в (Фазовая синхронизация, 1975).

Оригинальным подходом к исследованию фазовых систем являются частотные условия асимптотической устойчивости, основанные на процедуре Бакаева-Гужа. Такой подход впервые предложен в работе Г.А. Леонова (Леонов, 1975 : 7-15). В последующих работах Леонова и его учеников (Леонов, 1976а : 10-15), (Леонов, 1976б : 10-17), (Леонов, 1978 : 115-124) исследованы ограниченности решения фазовых систем, асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений с периодическими нелинейностями, а также устойчивость и колебания фазовых систем. Библиографический обзор научной литературы по фазовым системам можно найти в монографиях (Применение метода функции Ляпунова в энергетике, 1975), (Айсагалиев, 2005).

3 Материал и методы

Предлагается новый метод исследования глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем со счетным положением равновесия, на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы для двух случаев. В данной статье приведены результаты фундаментальных исследований по следующим разделам: неособое преобразование, свойства решений системы (1), (2), оценка несобственных интегралов вдоль решения системы (1), (2). Эти результаты позволяют сформулировать условия глобальной асимптотической устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы.

3.1 Неособое преобразование

Цель неособого преобразования-приведения уравнения движения (1) к специальному виду, для использования свойства нелинейностей из (2) и получения оценки несобственных интегралов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) относительно фазовых переменных $x = x(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$. Представим матрицу B в виде $B = \|B_1, \ldots, B_m\|$, где B_i, $i = \overline{1,m}$ векторы столбцы $n \times 1$. Пусть матрица $\theta = \|\theta_1, \ldots, \theta_m\|$, где $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1,m}$. Матрицы B, Θ порядков $n \times m$.

Лемма 1 *Пусть векторы $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1,m}$ такие, что:*

$$\theta_i^* B_i = 1, \ \ \theta_i^* B_j = 0, \quad j = \overline{1,m}, \ \ i \neq j, \tag{3}$$

где $B_i \neq B_j$, $i \neq j$, $(*)$ – знак транспонирования. Тогда вдоль решения первого уравнения из (1) верно тождество

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \varphi_i(\sigma_i(t)), \ \ t \in [0,\infty), \ \ i = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Если, кроме того, ранг $B^* = m$ и определитель Грама

$$\Gamma(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \begin{vmatrix} <\theta_1, \theta_1> & <\theta_2, \theta_2> & \ldots & <\theta_1, \theta_m> \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ <\theta_m, \theta_1> & <\theta_m, \theta_2> & \ldots & <\theta_m, \theta_m> \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

то векторы θ_i, $i = \overline{1,m}$ удовлетворяющие условиям (3), (4) существуют и они линейно независимы, где $<\theta_i, \theta_j>$ – скалярные произведения векторов $\theta_i, \theta_j, i, j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Поскольку $\theta_i^* = (\theta_{i1}, \ldots, \theta_{in})$, $i = \overline{1,m}$, то умножая слева тождество $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ на θ_i^* имеем

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \theta_i^* B \varphi(\sigma(t)), \ \ t \in I, \ \ i = \overline{1,m},$$

где $\theta_i^* B = (\theta_i^* B_1, \ldots, \theta_i^* B_m)$. Отсюда с учетом (3), получим (4). Заметим, что соотношение (3) запишется в виде линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned} &\theta_{i1} B_{11} + \theta_{i2} B_{12} + \ldots + \theta_{in} B_{1n} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\theta_{i1} B_{i1} + \theta_{i2} B_{i2} + \ldots + \theta_{in} B_{in} = 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\theta_{i1} B_{m1} + \theta_{i2} B_{m2} + \ldots + \theta_{in} B_{mn} = 0, \ \ i = \overline{1,m}. \end{aligned}$$

Если ранг $B^* = m$, то данная система уравнений имеет решение, θ_i, $i = \overline{1,m}$. Из условия (5) следует, что векторы θ_i, $i = \overline{1,m}$ линейно независимы. Лемма доказана.

Лемма 2 *Пусть векторы $\theta_0 \in R^n$ такие, что: $\theta_0^* B_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, где $B_i \neq B_j$, $i \neq j$. Тогда вдоль решения первого уравнения из* (1) *верно тождество*

$$\theta_0^* \dot{x}(t) = \theta_0^* A x(t), \quad t \in I. \tag{6}$$

Если, кроме того, ранг $B^* = m$ и определитель Грама

$$\Gamma(\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n-m}) = \begin{vmatrix} <\theta_{01}, \theta_{02}> & \ldots & <\theta_{01}, \theta_{0n-m}> \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ <\theta_{0n-m}, \theta_{01}> & \ldots & <\theta_{0n-m}, \theta_{0n-m}> \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

то векторы $\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n-m}$ существуют и они линейно независимы, где $<\theta_{0i}$, $i = \overline{1, n-m}$ получены из θ_0 путем выбора $(n-m)$ произвольных компонентов вектора θ_0.

Доказательство. Пусть вектор $\theta_0 = (\theta_{10}, \ldots, \theta_{n0}) \in R^n$. Тогда соотношение $\theta_0^* B_i = 0$, $i = \overline{1,m}$ запишется так

$$\theta_{10} B_{11} + \ldots + \theta_{n0} B_{in} = 0, \ldots, \theta_{10} B_{m1} + \ldots + \theta_{n0} B_{mn} = 0. \tag{8}$$

Если ранг $B^* = m$, то система (8) имеет решение $\theta_0 = \theta_0(\theta_{m+1,0}, \ldots, \theta_{n,0})$, где $\theta_{m+1,0}, \ldots, \theta_{n0}$ – любые числа. Определим векторы $\theta_{01} \in R^n, \ldots, \theta_{0n-m} \in R^n$ путем выбора произвольных чисел $\theta_{m+1,0}, \ldots, \theta^{n,0}$. В частности, $\theta_{01} = \theta_0(1, 0, \ldots, 0)$, $\theta_{02} = \theta_0(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\theta_{0n-m} = (0, \ldots, 0, 1)$.

Умножая тождество $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ слева на θ_0^* получим (6). По условию Леммы выполнено неравенство (7). Следовательно, векторы $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$ линейно независимы. Так как $\theta_{0i}^* B_i = 0$, $i = \overline{1, n-m}$, то тождество (6) равносильно тому, что

$$\theta_{0i}^* \dot{x}(t) = \theta_{0i}^* A x(t), \quad t \in I, \quad i = \overline{1, n-m}. \tag{9}$$

Лемма доказана.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$P = \|\theta_1, \ldots, \theta_m, \theta_{01}, \ldots, \theta_{0n-m}\| \tag{10}$$

порядка $n \times n$ равен n. Тогда уравнение (1) *равносильно следующей системе уравнений*

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1 = c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n + \varphi_1(\sigma_1), \ldots, \dot{y}_m = c_{m1} y_1 + \ldots + c_{mn} y_n + \varphi_m(\sigma_m), \\ \dot{y}_{m+1} = c_{m+1,1} y_1 + \ldots + c_{m+1,n} y_n, \ldots, \dot{y}_n = c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n, \\ \dot{\sigma}_1 = d_{11} y_1 + \ldots + d_{1n} y_n + R_1 \varphi(\sigma), \ldots, \dot{\sigma}_m = d_{m1} y_1 + \ldots + d_{mn} y_n + R_m \varphi(\sigma). \end{array} \tag{11}$$

где $y_i = \theta_i^* x$, $i = \overline{1,m}$, $y_{m+i} = \theta_{0i}^* x$, $i = \overline{1, n-m}$, $R^* = (R_1^*, \ldots, R_m^*)$.

Доказательство. Так как ранг $P = n$, то из (10) следует, что векторы $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1,m}$, $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$ образует базис в R^n. Тогда векторы

$$\begin{array}{l} \theta_1^* A x = c_n \theta_1^* x + \ldots + c_{1m} \theta_m^* x + c_{1m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_m \theta_{0n-m}^* x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_m^* A x = c_{m1} \theta_1^* x + \ldots + c_{m,m} \theta_m^* x + c_{m,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{mn} \theta_{0n-m}^* x, \\ \theta_{01}^* A x = c_{m+1,1} \theta_1^* x + \ldots + c_{m+1,m} \theta_m^* x + c_{m+1,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{m+1,n} \theta_{0n-m}^* x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_{0n-m}^* A x = c_{n1} \theta_1^* x + \ldots + c_{n,m} \theta_m^* x + c_{n,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{n,n} \theta_{0n-m}^* x \end{array} \tag{12}$$

где c_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$ коэффициенты разложения $A^*\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, $A^*\theta_{0i}$, $i=\overline{1,n-m}$ по базисам $\theta_i\in R^n$, $i=\overline{1,m}$, $\theta_{0i}\in R^n$, $i=\overline{1,n-m}$. Из (12) с учетом (4), (6), (9) получим систему уравнений (11) относительно переменных $y_1,\ldots,y_n$.

Аналогично, путем разложения вектора $c_i^*\in R^n$ по базисам θ_i, $i=\overline{1,m}$, θ_{0i}, $i=\overline{1,n-m}$ получим

$$\begin{array}{l}\dot\sigma_1={}_1x+R^1\varphi(\sigma)=d_{11}\theta_1^*x+\ldots+d_{1m}\theta_m^*x+d_{1m+1}\theta_{01}^*x+\ldots+d_{1n}\theta_{0n-m}^*x+R^1\varphi(\sigma),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot\sigma_m={}_mx+R^m\varphi(\sigma)=d_{m1}\theta_1^*x+\ldots+d_{mm}\theta_m^*x+d_{m,m+1}\theta_{01}^*x+\ldots+d_{mn}\theta_{0n-m}^*x+R^m\varphi(\sigma),\end{array}$$

где $C^*=(C_1^*,\ldots,C_m^*)$, $R^*=(R_1^*,\ldots,R_m^*)$. Лемма доказана.

Система уравнений (11) в векторной форме имеет вид

$$\dot y=\overline{A}y+\overline{B}\varphi(\sigma),\quad \dot\sigma=\overline{C}y+R\varphi(\sigma),\quad \varphi(\sigma)\in\Phi_0, \tag{13}$$

где $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ – постоянные матрицы порядков $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$ соответственно, $\overline{A}=\|c_{ij}\|$, $i,j=\overline{1,n}$; $\overline{B}=\begin{pmatrix}I_m\\O_{n-m,m}\end{pmatrix}$, $\overline{C}=\|d_{ij}\|$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, I_m – единичная матрица порядка $m\times m$, $O_{n-m,m}$ – матрица порядка $(n-m)\times m$ с нулевыми элементами. Если матрица $K=P^*$, то $y=Kx=P^*x$, $x=K^{-1}y=(P^*)^{-*1}y$, матрица $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ равны $\overline{A}=KAK^{-1}=(P^*)A(P^*)^{-1}$, $\overline{B}=KB=P^*B$, $\overline{C}=CK^{-1}=C(P^*)^{-1}$. Таким образом, дифференциальные уравнения (1) с нелинейностями (2) с неособым преобразованием $x=K^{-1}y=(P^*)^{-1}y$ приводятся к виду (13).

3.2 Свойства решений

Для получения оценок несобственных интегралов вдоль решения системы (1). Необходимо показать ограниченность решения системы (1), (2) и получить тождества вдоль решения уравнения (13).

Теорема 1 *Пусть матрица A гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A)<0$, $j=\overline{1,n}$ и выполнены условия лемм 1-3. Тогда верны оценки:*

$$|x(t)|\le c_0,\quad |\dot x(t)|\le c_1,\quad t\in I, \tag{14}$$

$$|y(t)|\le c_2,\quad |\dot y(t)|\le c_3,\quad t\in I, \tag{15}$$

$$|\dot\sigma(t)|\le c_4,\quad t\in I, \tag{16}$$

где $c_i=const>0$, $c_i<\infty$, $i=\overline{0,5}$. Кроме того, функции $x(t)$, $y(t)$, $\sigma(t)$, $t\in I$ равномерно непрерывны.

Доказательство. Заметим, что периодическая непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$ ограничена, т.е. $|\varphi(\sigma)|\le\overline{\varphi}$, $0<\overline{\varphi}<\infty$, $\forall\sigma$, $\sigma\in R^n$. Решение дифференциального уравнения (1) относительно $x(t)$, $t\in I$ имеет вид

$$x(t)=e^{At}x_0+\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau,\quad t\in I.$$

Отсюда с учетом того, что матрица A – гурвицева и $\|e^{At}\| \leq c(\varepsilon)e(a+\varepsilon)t$, $t \in I$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, $a = \max\limits_{1\leq j\leq n} Re\lambda_j(A) < 0$, $|\varphi(\sigma(t))| \leq \overline{\varphi}$, $t \in I$, получим

$$|x(t)| \leq c(\varepsilon)|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + c(\varepsilon)|x_0|e^{(a+\varepsilon)t}\|B\|\overline{\varphi}\left[-\frac{1}{a+\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}\right] \leq c_0,$$

где $c_0 = const$, $0 < c_0 < \infty$, $0 < c(\varepsilon) < \infty$. Итак, $|x(t)| \leq c_0$, $\forall t$, $t \in I$, $\forall\varphi$, $\varphi \in \Phi_0$. Так как $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, то $|\dot{x}(t)| \leq \|B\|\ |\varphi(\sigma(t))| \leq \|A\|c_0 + \|B\|\overline{\varphi} = c_1$. Следовательно, $|\dot{x}(t)| \leq c_1$, $\forall t$, $t \in I$, $\forall\varphi$, $\varphi \in \Phi_0$. Из $|x(t)| \leq c_0$, $|\dot{x}(t)| \leq c_1$, $\forall t$, $t \in I$ следует оценка (14) и равномерная непрерывность функции $x(t)$, $t \in I$. По условию теоремы выполнены условия лемм 1-3, следовательно, матрицы $\overline{A}$, A подобны т.е. $\lambda_j(A) = \lambda_j(\overline{A})$, $j = \overline{1,n}$, $y_i = \theta_i^* x$, $i = \overline{1,m}$, $y_{m+i} = \theta_{0i}^* x$, $i = \overline{1, n-m}$, $y = Kx = P^*x$. Тогда $|y(t)| \leq \|P^*\|\ |x(t)| \leq \|P^*\|c_0 = c_2$, $\forall t$, $t \in I$, $|\dot{y}(t)| \leq \|P^*\|\ |\dot{x}(t)| \leq \|P^*\|c_1 = c_3$, $\forall t$, $t \in I$. Таким образом, доказаны оценки (15).

Наконец из (13) следует, что $|\dot{\sigma}(t)| \leq \|\overline{c}\|\ |y(t)| + \|R\|\ |\varphi(\sigma(t))| \leq \|\overline{c}\|c_2 + \|R\|\overline{\varphi} = c_4$, $\forall t$, $t \in I$, $\forall\varphi$, $\varphi \in \Phi_0$. Следовательно, верна оценка (10). Из ограниченности производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{\sigma}$, $t \in I$. Теорема доказана.

Следует отметить, что: 1. Из оценки $|x(t)| \leq c_0$, $\forall t$, $t \in I$ имеем $\lim\limits_{t\to\infty}|x(t)| = |x(\omega)| \leq c(\varepsilon)|x_0| - \dfrac{1}{a}\|B\|\overline{\varphi} = \overline{c}_0 \leq c_0$ в силу несправедливости $|x(t)|$, $t \in I$, $a < 0$; 2. $\lim\limits_{t\to\infty}|y(t)| = |y(\omega)| = \|K\|c_0$, $\lim\limits_{t\to\infty}|\dot{\sigma}(t)| = |\dot{\sigma}(\infty)| \leq c_4$.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия лемм 1-3. Тогда вдоль решения системы* (13) *верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_n y(t), \quad t \in I, \tag{17}$$

$$H_1\dot{y}(t) = \overline{A}_{12}y(t), \quad t \in I, \tag{18}$$

$$\dot{\sigma}(t) = (\overline{C} - R\overline{A}_H)y(t) + RH_0\dot{y}(t), \quad t \in I, \tag{19}$$

где

$$H_0 = (I_m,\ O_{m,n-m}), \quad H_1 = (O_{n-m,m},\ I_{n-m}), \quad \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = I_n, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} \\ \overline{A}_{12} \end{pmatrix},$$

$$\overline{A}_{11} = \begin{pmatrix} C_{11} \dots C_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ C_{m1} \dots C_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} d_{11} \dots d_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ d_{m1} \dots d_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_{12} = \begin{pmatrix} C_{m+1,1} \dots C_{m+1,n} \\ \dots\dots\dots \\ C_{n1} \dots C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку выполнены условия лемм 1-3, то верно соотношение (11). Заметим, что

$$H_0\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_m \end{pmatrix}, \quad H_1\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из (1) следует, что

$$\varphi_1(\sigma_1) = \dot{y}_1 - c_{11}y_1 - \ldots - c_{1n}y_n, \ldots, \varphi_m(\sigma_m) = \dot{y}_m - c_{m1}y_1 - \ldots - c_{mn}y_n,$$

$$\dot{\sigma} = \overline{c}yR\varphi(\sigma), \quad H_1\dot{y} = \overline{A}_{12}y,$$

где $\varphi_i(\sigma_i) = \varphi_i(\sigma_i(t))$, $i = \overline{1,m}$, $y_i = y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $\dot{y}_i = \dot{y}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$. Отсюда следуют тождества (17) - (19). Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть выполнены условия лемм 1-4. Тогда для любых матриц* Λ, M, $N = N^*$ *порядков* $n\times n$, $n\times n$, $(n-m)\times(n-m)$ *вдоль решения уравнения (13) верны тождества*

$$\dot{y}^*(t)\Lambda\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)\Lambda\dot{y}(t)] - \dot{y}^*(t)\Lambda^*\ddot{y}(t), \quad t \in I, \tag{20}$$

$$y^*(t)M\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}[y^*(t)My(t)] - y^*(t)M^*\dot{y}(t), \quad t \in I, \tag{21}$$

$$y^*(t)H_1^*NH_1\dot{y}(t) = y^*(t)H_1^*N\overline{A}_{12}y(t), \quad t \in I. \tag{22}$$

Доказательство. Тождество (20) непосредственно следует из равенства $\dfrac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)\Lambda\dot{y}(t)] = \ddot{y}^*(t)\Lambda^*\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda\ddot{y}(t)$, $t \in I$, а тождество (21) из равенства $dfracddt[y^*(t)My(t)] = \dot{y}^*(t)M^*y(t) + y^*(t)M\dot{y}(t)$, $t \in I$. Как следует из формулы (18) для любой симметричной матрицы $N = N^*$ порядка $(n-m)\times(n-m)$ верно тождество (22). Лемма доказана.

3.3 Несобственные интегралы

На основе неособого преобразования и используя свойства решений системы (1), (2) могут быть полученны оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (13), в отдельности для двух случаев:

$$\text{а)} \int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = 0, \ \ i\overline{1,m}; \quad \text{б)} \int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i \neq 0, \ \ i\overline{1,m};$$

где $\sigma_i \in R^1$, Δ_i – период функции $\varphi_i(\sigma_i)$.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия лемм 1-5 и теоремы 1, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой диагональной матрицы $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \ldots, \tau_{1m}) > 0$ порядка $m\times m$, вдоль решения системы (13) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_{10} = \int\limits_0^\infty [-y^*(t)\Lambda_1\ddot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_2\ddot{y} + y^*(t)\Lambda_3\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_4\dot{y}(t) - \\ -\ddot{y}^*(t)\Lambda_5\ddot{y}(t) - y^*(t)\Lambda_6 y(t)]dt \leq \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)\Lambda_2\dot{y}(t) + \\ +y^*(t)\Lambda_3 y(t)]dt < \infty, \end{gathered} \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered} \Lambda_1 = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*(\mu_1\tau_1 + \tau_1\mu_2)H_0, \quad \Lambda_2 = \overline{A}_{11}^*\tau_1 H_0 + H_0^*R^*\mu_1\tau_1 H_0 + \\ +H_0^*R^*\tau_1\mu_2 H_0, \quad \Lambda_3 = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1 A_{11} - 2(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1\mu_2 RH_0 - \\ -(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_1\mu_2\overline{A}_{11}, \quad \Lambda_4 = -H_0^*R^*\mu_1\tau_1\overline{A}_{11} - \overline{A}_{11}^*\tau_1\overline{A}_{11} - H_0^*R^*\mu_1\tau_1\mu_2 RH_0 - \\ -H_0R^8\tau_1\mu_2\overline{A}_{11}, \quad \Lambda_5 = -H_0^*\tau_1 H_0, \quad \Lambda_6 = -(\overline{C} - R\overline{A}_{11})\mu_1\tau_1\mu_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11}), \\ \mu_1 = diag(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1m}), \quad \mu_2 = diag(\mu_{21}, \ldots, \mu_{2m}), \quad \|\mu_1\| < \infty, \quad \|\mu_2\| < \infty. \end{gathered} \tag{24}$$

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует, что

$$\left(\mu_{1i} - \frac{\dot{\varphi}_i}{\dot{\sigma}_i}\right)\left(\frac{\dot{\varphi}_i}{\dot{\sigma}_i} - \mu_{2i}\right) \geq 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}(t), \ \ t \in I, \tag{25}$$

где

$$\frac{d\varphi(\sigma(t))}{d\sigma} = \frac{\frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\sigma}(t)}, \quad t \in I.$$

Умножая тождество (25) на $\dot{\sigma}^2(t)$, получим

$$(\mu_{1i}\dot{\sigma}_i - \dot{\varphi})(\dot{\varphi}_i - \mu_{2i}\dot{\sigma}_i) \geq 0, \ \ \forall t, \ \ t \in I.$$

Тогда для любой величины $\tau_{1i} > 0$ верно неравенство

$$(\mu_{1i}\dot{\sigma}_i - \dot{\varphi}_i)\tau_{1i}(\dot{\varphi}_i - \mu_{2i}\dot{\sigma}_i) \geq 0, \quad \forall t, \ \ t \in I. \tag{26}$$

Из (26) следует, что

$$(\mu_1\dot{\sigma}_i - \dot{\varphi}) : *\tau_1(\dot{\varphi} - \mu_2\dot{\sigma}) \geq 0, \quad \forall t, \ \ t \in I, \tag{27}$$

где $\mu_1 = \mathrm{diag}(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1m})$, $\tau_1 = \mathrm{diag}(\tau_{11}, \ldots, \tau_{1m}) > 0$, $\mu_2 = \mathrm{diag}(\mu_{21}, \ldots, \mu_{2n})$.

Тогда несобственный интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^\infty (\mu_1\dot{\sigma} - \dot{\varphi})^*\tau_1(\dot{\varphi} - \mu_2\dot{\sigma})dt = \int\limits_0^\infty [\dot{\sigma}^*\mu_1^*\tau_1\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^*\tau_1\dot{\varphi} -$$

$$-\dot{\sigma}^*\mu_1^*\tau_1\mu_2\dot{\sigma} + \dot{\varphi}^*\tau_1\mu_2\dot{\sigma}]dt \geq 0,$$

где $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t) - H_0\ddot{y}(t) - \overline{A}_{11}\dot{y}$, $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(t) = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})y(t) + RH_0\dot{y}(t)$, $t \in I$ в силу тождеств (17), (18) соответственно, $\mu_1^* = \mu_1$, $\mu_2^* = \mu_2$. Отсюда в силу того, что:

$$\dot{\sigma}^*\mu_1\tau_1\dot{\varphi} = y^*(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1H_0\ddot{y} + \dot{y}^*H_0^*R^*\mu_1\tau_1H_0\ddot{y} -$$

$$-y^*(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1\overline{A}_{11}\dot{y} - \dot{y}^*H_0^*R^*\mu_1\tau_1\overline{A}_{11}\dot{y},$$

$$-\dot{\varphi}^*\tau_1\dot{\varphi} = -\ddot{y}^*H_0^*\tau_1H_0\ddot{y} + 2\dot{y}^*\overline{A}_{11}^*\tau_1H_0\ddot{y} - \dot{y}^*\overline{A}_{11}^*\tau_1\overline{A}_{11}\dot{y},$$

$$\dot{\sigma}^*\mu_1\tau_1\mu_2\dot{\varphi} = y^*(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1\mu_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11})y - \dot{y}^*H_0^*R^*\mu_1\tau_1\mu_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11})y -$$

$$-y^*(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1\mu_2RH_0\dot{y} - \dot{y}^*H_0^*R^*\mu_1\tau_1\mu_2RH_0\dot{y},$$

$$\dot{\varphi}^*\tau_1\mu_2\dot{\varphi} = y^*(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_1\mu_2H_0\ddot{y} + \dot{y}^*H_0^*R^*\tau_1\mu_2H_0\ddot{y} -$$

$$-y^*(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_1\mu_2\overline{A}_{11}\dot{y} - \dot{y}^*H_0^*R^*\tau_1\mu_2\overline{A}_{11}\dot{y},$$

имеем

$$I_1 = \int\limits_0^\infty [y^*\Lambda_1\ddot{y} + \dot{y}^*\Lambda_2\ddot{y} + y^*\Lambda_3\dot{y} + \dot{y}^*\Lambda_4\dot{y} + \ddot{y}^*\Lambda_5\ddot{y} + y^*\Lambda_6 y]dt \geq 0. \tag{28}$$

Как следует из формул (20), (21) верны соотношения

$$\dot{y}^*\Lambda_2\ddot{y} = \frac{d}{dt}[\dot{y}^*\Lambda_2\dot{2}] - \dot{y}^*\Lambda_2^*\ddot{y}, \quad y^*\Lambda_3\dot{y} = \frac{d}{dt}[y^*\Lambda_3 y] - y^*\Lambda_3^*\dot{y}. \tag{29}$$

Из (28) с учетом (29), получим

$$I_1 = \int_0^\infty [y^*\Lambda_1\ddot{y} - \dot{y}^*\Lambda_2\ddot{2} - y^*\Lambda_3\dot{y} + \dot{y}^*\Lambda_4\dot{y} + \ddot{y}^*\Lambda_5\ddot{y} + y^*\Lambda_6 y]dt+$$
$$+\int_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot{y}^*\Lambda_2\dot{y} + y^*\Lambda_3 y]dt \geq 0. \tag{30}$$

Из (30) следует оценка (23), где

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)\Lambda_2\dot{y}(t) + y^*(t)\Lambda_3 y(t)]dt = \dot{y}^*(\infty)\Lambda_2\dot{y}(\infty) + y^*(\infty)\Lambda_3 y(\infty) -$$
$$-\dot{y}^*(0)\Lambda_2\dot{y}(0) - y^*(0)\Lambda_3 y(0) < \infty,$$

в силу оценки (15). Теорема доказана.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любых вектор-строк* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in R^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R^n$ *вдоль решения системы (13) несобственный интеграл*

$$I_{20} = \int_0^\infty [-\ddot{y}^*(t)\alpha\ddot{y}(t) - \dot{y}^*(t)\beta^*\beta\dot{y}(t) - y^*(t)\gamma^*\gamma y(t) + 2\dot{y}^*(t)\alpha^*\beta\ddot{y}(t) -$$
$$-2y^*(t)\alpha^*\gamma\ddot{y}(t) + 2y^*(t)\beta^*\gamma\dot{y}(t)]dt \leq \int_0^\infty \frac{d}{dt}[2\dot{y}^*(t)\beta^*\alpha\dot{y}(t) + 2y^*(t)\gamma^*\beta y(t)]dt < \infty, \tag{31}$$

где

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}[2\dot{y}^*(t)\beta^*\alpha\dot{y}(t) + 2y^*(t)\gamma^*\beta y(t)]dt = 2\dot{y}^*(\infty)\beta^*\alpha\dot{y}(\infty) +$$
$$+2y^*(\infty)\gamma^*\beta y(\infty) - 2\dot{y}^*(0)\beta^*\alpha\dot{y}(0) - 2y^*(0)\gamma^*\beta y(0) < \infty.$$

Доказательство. Несобственный интеграл

$$I_2 = \int_0^\infty [\alpha\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + \gamma y(t)]^*[\alpha\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + \gamma y(t)]dt =$$

$$= \int_0^\infty [\ddot{y}^*\alpha^*\alpha\ddot{y} + \dot{y}^*\beta^*\beta\dot{y} + y^*\gamma^*\gamma y + 2\dot{y}^*\beta^*\alpha\ddot{y} + 2y^*\gamma^*\alpha\ddot{y} + 2y^*\gamma^*\beta\dot{y}]dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \{\ddot{y}\alpha^*\alpha\ddot{y} + \dot{y}^*\beta^*\beta\dot{y} + y^*\gamma^*\gamma y + \frac{d}{dt}[2\dot{t}^*\beta^*\alpha\dot{y}] -$$

$$-2\dot{y}^*\alpha^*\beta\ddot{y} + 2y^*\gamma^*\alpha\ddot{y} + \frac{d}{dt}[2y^*\gamma^*\beta y] - 2y^*\beta^*\gamma y^*\}dt \geq 0.$$

Далее, как в доказательстве теоремы 2, можно показать, что $I_{20} < \infty$. Теорема доказана.

Заметим, что оценки несобственных интегралов I_{10}, I_{20} определяемых неравенствами (23), (31) соответственно, верны как для случая а), так и для случая б) периодических нелинейностей $\varphi_i(\sigma_i)$, $i = \overline{1,m}$ со свойствами указанными выше.

Рассмотрим случай, когда

$$\int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = 0, \quad \forall\sigma_i, \;\; \sigma_i \in R^1, \;\; i = \overline{1,m}. \tag{32}$$

Теорема 4 *Пусть выполнены условия теоремы 2, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ удовлетворяет условию (32), где $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m))$. Тогда для любой диагональной матрицы $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \ldots, \tau_{2m})$ вдоль решения системы (13) несобственный интеграл*

$$I_{30} = \int\limits_0^\infty [-y^*(t)T_1^*\dot{y}(t) + y^*(t)T_2y(t) + \dot{y}^*(t)T_3\dot{y}(t)]dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\Delta)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma -$$
$$- \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)T_1y(t)]dt < \infty, \tag{33}$$

где $T_1 = -\overline{A}_{11}^*\tau_2RH_0 + (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_2H_0$, $T_2 = -\overline{A}_{11}^*\tau_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11})$, $T_3 = H_0^*\tau_2RH_0$, $\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\Delta)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma = \sum\limits_{i=1}^m \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\Delta)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}d\sigma_i$.

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_0^\infty \varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}\dot{\sigma}_i(t)dt = \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}d\sigma_i = \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_(0)\pm\Delta_i} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}d\sigma_i +$$
$$+ \int\limits_{\sigma_i(0)\pm\Delta_i}^{\sigma_(0)\pm2\Delta_i} \varphi_i(\sigma_i)d\sigma_i + \ldots + \int\limits_{\sigma_i(0)\pm k\Delta_i}^{\sigma_(0)\pm(k+1)\Delta_i} \varphi_i(\sigma_i)d\sigma_i + \int\limits_{\sigma_i(0)\pm(k+1)\Delta_i}^{\sigma_(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)d\sigma_i = \tag{34}$$
$$= \int\limits_{\sigma_i(0)\pm(k+1)\Delta_i}^{\sigma_(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)d\sigma_i < \infty,$$

где величины

$$\int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_(0)\pm\Delta_i} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}d\sigma_i = 0, \ldots, \int\limits_{\sigma_i(0)\pm k\Delta_i}^{\sigma_(0)\pm(k+1)\Delta_i} \varphi_i(\sigma_i)d\sigma_i = 0,$$

для любых $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ Δ_i – период функции $\varphi_i(\sigma_i)$. Иными словами, для любых $\sigma_i(\infty)$ найдется такое натуральное число k, где длина отрезка $[\sigma_i(0) \pm (k+1)\Delta_i, \sigma_i(\infty)]$ меньше чем Δ_i.

Несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_3 = \int\limits_0^\infty \varphi^*(sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_0^\infty \sum_{i=1}^m \varphi_i(\sigma_i(t))\tau_{2i}\dot{\sigma}_i(t)dt = \\ = \int\limits_0^\infty [H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t)]^*\tau_2[(\overline{C} - R\overline{A}_{11})y(t) + RH_0\dot{y}(t)]dt = \\ = \int\limits_0^\infty [y^*(t)T_1\dot{y}(t) + y^*(t)T_2y(t) + \dot{y}^*(t)T_3\dot{y}(t)]dt = \\ = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty \end{aligned} \tag{35}$$

в силу неравенства (34), где $\varphi(\sigma(t)) = H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t)$, $\dot{y} = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})y(t) + RH_0\dot{y}(t)$, $t \in I$.

Из (35) с учетом того, что $y^*(t)T_1\dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt}(y^*T_1y) - y^*T_1^*\dot{y}$, получим оценку (33). Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда

$$\int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = \overline{\alpha}_\varepsilon \neq 0, \quad \forall \sigma_i, \ \ \sigma_i \in R^1, \ \ i = \overline{1,m}. \tag{36}$$

Определим величины ν_i, $\overline{\beta}_i$ так, чтобы $\overline{\beta}_i = \int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} |\varphi_i(\xi_i)|d\xi_i$, $\nu_i = \dfrac{\overline{\alpha_i}}{\overline{\beta_i}}$, $i = \overline{1,m}$.

Теорема 5 *Пусть выполнены условия теоремы 2, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ удовлетворяет условию (36), величины $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$ такие, что $\overline{\alpha}_i - \nu_i\overline{\beta}_i = 0$, $i = \overline{1,m}$. Тогда для любых диагональных матриц $\tau_3 = diag(\tau_{31}, \ldots, \tau_{3m})$, $\tau_4 = diag(\tau_{41}, \ldots, \tau_{4m}) > 0$, $\tau_5 = diag(\tau_{51}, \ldots, \tau_{5m}) > 0$ таких, что $4\tau_4\tau_5 - (\nu\tau_5)(\nu\tau_5) > 0$, $\nu = diag(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, вдоль решения системы (13) несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_{40} = \int\limits_0^\infty [-y^*(t)\Gamma_1^*\dot{y}(t) + y^*(t)\Gamma_2y(t) + \dot{y}^*(t)\Gamma_3\dot{y}(t)]dt \leq \sum_{i=1}^m \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \Phi_i(\sigma_i)\tau_{3i}d\sigma_i - \\ - \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)\Gamma_1y(t)]dt < \infty, \end{aligned} \tag{37}$$

где $\Phi_i(\sigma_i) = \varphi_i(\sigma_i) - \nu_i|\varphi_i(\sigma_i)|$, $i = \overline{1,m}$, $\Gamma_1 = N_1 - Q_2^* - Q_3 + M_1$, $\Gamma_2 = N_2 - Q_1 - M_2$, $\Gamma_3 = N_3 - Q_4 - M_0$.

Здесь матрицы N_i, $i = \overline{1,3}$, Q_i, $i = \overline{1,4}$, M_i, $i = \overline{0,2}$ *определяются равны:*

$$N_1 = -\overline{A}_{11}^*\tau_3 RH_0 + (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_3 H_0, \quad N_2 = -\overline{A}_{11}^*\tau_3(\overline{C} - R\overline{A}_{11}), \quad N_3 = H_0^*\tau_3 RH_0,$$

$$Q_1 = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_5(\overline{C} - R\overline{A}_{11}), \quad Q_2 = H_0^*R^*\tau_5(\overline{C} - R\overline{A}_{11}), \quad Q_3 = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_5 RH_0,$$

$$Q_4 = H_0^*R^*\tau_5 RH_0, \quad M_0 = H_0^*\tau_4 H_0, \quad M_1 = 2\overline{A}_{11}^*\tau_4 H_0, \quad M_2 = \overline{A}_{11}^*\tau_4\overline{A}_{11}.$$

Доказательство. Заметим, что функция $\Phi_i(\sigma_i)$, $i = \overline{1,m}$ обладает свойством

$$\int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \Phi_i(\xi_i)d\xi_i = \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i - \nu_i \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} |\varphi_i(\xi_i)|d\xi_i = \overline{\alpha}_i - \nu_i\overline{\beta}_i = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \Phi_i(\sigma_i)\tau_{3i}d\sigma_i = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^\infty \Phi_i(\sigma_i(t))\tau_{3i}\dot{\sigma}_i(t)dt < \infty \tag{38}$$

для любых чисел τ_{3i}, $i = \overline{1,m}$. Данное неравенство следует из (14) после замены $\varphi_i(\sigma_i)$ на $\Phi_i(\sigma_i)$, $i = \overline{1,m}$.

Рассмотрим функционал

$$S_i(t) = \varphi_i(\sigma_i(t))\tau_{3i}\dot{\sigma}_i(t) - \tau_{4i}\varphi_i^2(\sigma_i) - \tau_{5i}\dot{\sigma}_i^2(t) - \Phi_i(\sigma_i)\tau_{3i}\dot{\sigma}_i =$$

$$= -\tau_{4i}\varphi_i^2(\sigma_i) - \tau_{5i}\dot{\sigma}_i^2 + \nu_i|\varphi_i(\sigma_i)|\tau_{3i}\dot{\sigma}_i = -\left[\sqrt{\tau_{5i}}\dot{\sigma}_i - \frac{\nu_i\tau_{3i}}{2\sqrt{\tau_{5i}}}|\varphi_i(\sigma_i)|\right]^2 +$$

$$+\left(\frac{\nu_i\tau_{3i}^2}{4\sqrt{\tau_{5i}}} - \tau_{4i}\right)\varphi_i^2(\sigma_i) \le 0, \quad \forall t, \quad t \in I, \quad i = \overline{1,m},$$

в силу того, что $4\tau_{4i}\tau_{5i} - \nu_i^2\tau_{3i}^2 > 0$, $i = \overline{1,m_0}$. Отсюда следует, что

$$\varphi_i(\sigma_i(t))\tau_{3i}\dot{\sigma}_i(t) - \tau_{4i}\varphi_i^2(\sigma_i) - \tau_{5i}\dot{\sigma}_i^2(t) \le \Phi_i(\sigma_i)\tau_{3i}\dot{\sigma}_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{39}$$

Суммируя по i в пределах от 1 до m из (39), получим

$$\varphi^*(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) - \varphi^*(\sigma(t))\tau_4\varphi(\sigma(t)) - \dot{\sigma}^*(t)\tau_5\dot{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^{m}\Phi_i(\sigma_i)\tau_{3i}\dot{\sigma}_i, \ \ \sigma_i = \sigma_i(t), \ \ t \in I. \tag{40}$$

Интегрируя по t в пределах от 0 до ∞ из (40), получим

$$\begin{aligned} I_4 &= \int\limits_0^\infty [\varphi^*(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) - \varphi^*(\sigma(t))\tau_4\varphi(\sigma(t)) - \dot{\sigma}^*(t)\tau_5\dot{\sigma}(t)]dt \le \\ &\le \int\limits_0^\infty \sum_{i=1}^{m}\Phi_i(\sigma_i(t))\tau_{3i}\dot{\sigma}_i(t)dt = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^\infty \Phi_i(\sigma_i(t))\tau_{3i}\dot{\sigma}_i(t)dt < \infty, \end{aligned} \tag{41}$$

в силу неравенства (38). Из неравенств $4\tau_{4i}\tau_{5i} - \nu_i^*\tau_{3i}^2 > 0$, $i = \overline{1,m}$ следует, что $4\tau_4\tau_5 - (\nu\tau_3)(\nu\tau_3) > 0$. Так как верны тождества

$$\varphi^*(\sigma(t))\tau_3\dot\sigma(t) = y^*(t)N_1\dot y(t) + y^*(t)N_2y(t) + \dot y^*(t)N_3\dot y(t), \;\; t \in I,$$

$$-\dot\sigma^*(t)\tau_5\dot\sigma(t) = -y^*(t)Q_1\dot y(t) - y^*(t)Q_2y(t) - \dot y^*(t)Q_3\dot y(t) - \dot y^*Q_4\dot y(t), \;\; t \in I,$$

$$-\varphi^*(\sigma(t))\tau_4\varphi(\sigma(t)) = -y^*(t)M_0\dot y(t) + y^*(t)M_1y(t) - \dot y^*(t)M_2\dot y(t), \;\; t \in I,$$

то неравенство (41) запишется так

$$I_4 = \int\limits_0^\infty y^*(t)\Gamma_1\dot y(t) + y^*(t)\Gamma_2y(t) + \dot y^*(t)\Gamma_3\dot y(t) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^m \int\limits_0^\infty \Phi_i(\sigma_i(t))\tau_{3i}\dot\sigma_i(t)dt < \infty.$$

Отсюда, с учетом того, что $y^*(t)\Gamma_1\dot y(t) = \dfrac{d}{dt}[y^*(t)\Gamma_1y(t)] - y^*(t)\Gamma_1\dot y(t)$, $t \in I$ получим оценку (37). Теорема доказана.

4 Результаты и обсуждение

Динамическая система с цилиндрическим фазовым пространством со счетным положением равновесия путем неособого преобразования приведена к специальному виду, состоящему из двух частей. Первая часть дифференциальных уравнений разрешимы относительно компонентов периодической функции, а вторая часть не содержит нелинейные функций.

Исследованы свойства решений фазовой системы, получены оценки на решения исходной системы и преобразованной системы, доказана их ограниченность.

Получены тождества относительно компонентов периодической нелинейной функции и установлена из связь с фазовыми переменными. Исследованы свойства квадратичных форм относительно фазовых переменных и их производных.

На основе неособого преобразования и свойства решений получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы для двух случаев: 1) когда значения интегралов от компонентов нелинейной функции в природе равны нулю; 2) когда значения интегралов отличны от нуля.

Результаты фундаментальных исследований многомерных фазовых систем сформулированы в виде лемм и теорем со строгим доказательством. Эти результаты могут быть использованы для получения условий глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем.

Список литературы

[1] *Triomi F.* Integrazione di uniquzione differenziale presentatasi in electrotechnica // Annali della Roma schuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche Matematiche // Vol 2, No 2, 1933. – P. 3-10.

[2] *Айсагалиев С.А., Иманкул Т.Ш.* Теория фазовых систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2005. – 272 с.

[3] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 600 с.

[4] *Бакаев Ю.Н.* Некоторые вопросы нелинейной теории фазовых систем. – М.: Труды ВИЛ им. Жуковского, 1959, вып. 800. – С. 105-110.

[5] *Бакаев Ю.Н., Гуж А.А.* Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Допплера // Радиотехника и электроника, 1965. – Т. 10, № 1. – С. 35-46.

[6] *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическими фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 305 с.

[7] *Леонов Г.А.* Устойчивость и колебания фазовых систем // Сибирский матем. журнал, 1975. – № 5. – С. 7-15.

[8] *Леонов Г.А.* Об ограниченности решений фазовых систем // Вестник ЛГУ, 1976, № 1, –С 10-15.

[9] *Леонов Г.А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сибирский матема. журнал, 1976, № 1. – С. 10-17.

[10] *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Асимптотика решений системы интегро-дифференциальных уравнений с периодическими нелинейными функциями // Сибирский матем. журнал, 1978, № 4. – С. 115-124.

[11] *Применение метода функций Ляпунова в энергетике.* – Под ред. Тагирова М.А. – Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1975. – 301 с.

[12] *Фазовая синхронизация.* – Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. – М.: Связь, 1975. – 401 с.

References

[1] Aisagaliev S. A., Imankul T.,Sh. *Teoriya fazovyih sistem* [Theory of phase systems] (Kazakh universiteti, 2005), 272.

[2] Andronov A. A., Vitt A. Haykin S. E. *Teoriya kolebaniya* [Theory of oscillation], (M.: Fizmatgiz, 1959) : 600.

[3] Bakaev Yu.N. *Nekotoryie voprosyi nelineynoy teorii fazovyih sistem* [Some questions of the nonlinear theory of phase systems], (M.: Trudyi VIL im. Zhukovskogo, 1959) : 105–110.

[4] Bakaev Yu. N., Guzh A. A. *Optimalnyiy priem signalov chastotnoy modulyatsii v usloviyah effekta Dopplera* [An optimal reception of frequency modulation signals under the conditions of Doppler effect], *Radiotehnika i elektronika*, T. 10, No 1 (1965) : 36–46.

[5] Barbashin E. A., Tabueva V. A. *Dinamicheskie sistemyi s tsilindricheskimi fazovyim prostranstvom* [Dynamic systems with cylindrical phase space], (M.: Nauka, 1969) : 305.

[6] *Fazovaya sinhronizatsiya* [Phase synchronization], *Pod red. V.V. Shahgildyana i L.N. Belyustinoy*, (M.: Svyaz, 1975) : 401.

[7] Leonov G. A. «Ustoychivost i kolebaniya fazovyih sistem» [Stability and oscillations of phase systems], *Sibirskiy matem. zhurnal*, No 5 (1975) : 7–15.

[8] Leonov G. A. *Ob ogranichennosti resheniy fazovyih sistem* [Stability and oscillations of phase system], *Vestnik LGU*, No 1 (1976) : 10–15.

[9] Leonov G. A. «Ob odnom klasse dinamicheskih sistem s tsilindricheskim fazovyim prostranstvom» [On a class of dynamical systems with a cylindrical phase space], *Sibirskiy matema. zhurnal*, No 1 (1976) : 10–17.

[10] Leonov G. A., Smirnova V. B., «Asimptotika resheniy sistemyi integro-differentsialnyih uravneniy s periodicheskimi nelineynyimi funktsiyami» [Asymptotics of solutions of a system of integro-differential equations with periodic nonlinear functions], *Sibirskiy matem. zhurnal*, No 4 (1978) : 115–124.

[11] *Primenenie metoda funktsiy Lyapunova v energetike* [Application of the Lyapunov function method in the engineering], *Pod red. Tagirova M.A.*, (Novosibirsk: Nauka, Sib. otdelenie, 1975) : 301.

[12] Triomi F. «Integrazione di uniquzione differenziale presentatasi in electrotechnica», *Annali della Roma schuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche Matematiche*, Vol 2, No 2 (1933) : 3–10.