МРНТИ 27.17.23; 27.17.21

Квазимногообразия коммутативных колец

Башеева А.О., Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Республика Казахстан, +77075542275, E-mail: basheeva@mail.ru

Работа посвящена вопросам неразрешимости квазиэквациональных теорий и проблеме конечной аксиоматизируемости. В 1966 году Тарский озвучил следующую проблему: Существует ли алгоритм, определяющий является ли эквациональная теория конечного множества конечных алгебр конечно аксиоматизируемой? В 1986 году Мальцевым был задан следующий вопрос: Существует ли конечно базируемые полугруппы, группы и кольца с неразрешимой эквациональной теорией? Нуракунов А.М. (Nurakunov, 2012) доказал, что есть континуум квазимногообразий унаров с неразрешимой квазиэквациональной теорией, для которых проблема вхождения для конечных унаров неразрешима. В работе (Basheyeva, 2017) получены результаты для графов, дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп. В данной работе мы доказываем аналогичные результаты для комммутативных колец с единицей. Мы доказываем, что квазимногообразие коммутативных колец с единицей содержит континуум подквазимногообразий с неразрешимой квазиэквациональной теорией, для которых проблема вхождения для конечных колец также неразрешима. Кроме того, мы доказываем здесь, что в многообразии коммутативных колец с единицей существует континуум подквазимногообразий с ω-независимым базисом квазитождеств, которые, однако, не имеют независимого базиса квазитождеств. Кроме того, пересечение этих квазимногообразий имеет независимый базис квазитождеств.

Ключевые слова: квазиэквациональная теория, неразрешимая теория, квазитождество, квазимногообразие, базис квазитождеств, независимый базис, ω-независимый базис, рекурсивный независимый базис, коммутативное кольцо с единицей.

Комммутативті сақиналар квазикөпбейелер

Башеева А.О., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан Республикасы, +77075542275, Электрондық пошта: basheeva@mail.ru

Бұл жұмыс шешілмейтіндік квазиэквационалдық теория және түпкілікті аксиоматизациялану проблемасы сұрактарына арналған. 1966 жылы Тарский келесі мәселені көтерген: Ақырлы алгебралардың ақырлы жиынының эквационалды теориясы ақырлы аксиомаланатындығын анықтайтын алгоритм бар ма? 1986 жылы Мальцевтін келесі сұрағы қойылған болатын: шешілмейтіндік квазиэквационалдық теориясы бар ақырлы базисті жартылай группалар, группалар және сақиналар бар ма? Нуракунов А. М. (Nurakunov, 2012) шешілмейтіндік квазиэквационалдық теориясы бар түпкілікті тиісті болу мәселесі шешілмейтін унарлар квазикөпбейелер континуумы бар екендігін дәлелдеді. (Basheyeva, 2017) жұмысында графтар, дифференциалдық группоидтар және нүктелі абельдік группалар үшін нәтижелер алынған. Осы жұмыста біз бұл нәтижелерді бірлігі бар коммутативті сақиналар үшін дәлелдейміз. Және бірлігі бар коммутативті сақиналар квазикөпбейнелері үшін квазикөпбейнелер торының шешілмейтіндік квазиэквационалдық теориясы бар және түпкілікті тиісті болу мәселесі де шешілмейтін ішкі квазикөпбейелер континуумы бар болатындығын дәлелдейміз. Бұл жерде біз бірлігі бар коммутативті сақиналар квазикөпбейнелердін ω-тәуеліз базис квазитеңбетеңдіктері бар, бірақ тәуеліз базис квазитеңбетеңдіктері жок, ал олардың қилысуында тәуеліз базис квазитеңбетеңдіктері бар екендігін де дәлелдейміз.

Түйін сөздер: квазиэквационалдық теория, шешілімсіздік теория, квазитеңбетеңдіктер, квазикөпбейнелер, квазитеңбетеңдіктердің базистері, тәуелсіз базистер квазитеңбетеңдіктерің, ω-тәуелсіз базистер квазитеңбетеңдіктері, бірлігі бар коммутитивтік сақина.

Quasivarieties of commutative rings

Basheyeva A.O., the L.N. Gumilev Eurasian National University,
Astana, Kazakhstan, +77075542275, E-mail: basheeva@mail.ru

The work is devoted to the problem of undecidability of quasi-equational theories and to the problem of finite axiomatizability. In 1966, Tarsky poded the following problem: Is there an algorithm deciding if the equational theory of a finite set of finite structures is finitely axiomatizabile? In 1986, Maltsev asked the following question: Are there finitely based semigroups, groups, and rings with the undecidable equational theory? Nurakunov A.M. (Nurakunov, 2012) established the existence of continuum many quasivarieties of unars, for which the quasi-equational theory is undecidable and the finite membership problem is also undecidable. In in the paper (Basheyeva, 2017), some results in this direction are obtained for graphs, differential gruppoids, and pointed Abelian groups. In the present paper, we prove analogous results for the variety of commutative rings with unit. We prove also that the quasivariety of commutative rings with unit contains continuum many of subquasivarieties with the undecidable quasi-equational theoryб for which the finite membership problem is also undecidable. Apart from trhat, we prove here that the quasivariety of commutative rings with unit contains continuum many subquasivarieties which have an ω-independent quasi-equational basis but does not have an independent quasi-equational basis; moreover, the intersection of those does have an independent basis.
Key words: quasi-equational theory, undecidable theory, quasi-identity, quasivariety, quasi-equational basis, independent quasi-equational bases, recursive independent quasi-equational basis, commutative ring with unit.

1 Введение

Как один из интересных направлений в теории многообразий и квазимногообразий можно отметить вопрос изучения базисов тождеств и базисов квазитождеств в разных классах алгебр. Изучая квазиэквациональную теорию в определенных классах алгебр необходимо определить конечность базисов квазитождеств. Поиск решений вопроса конечной базируемости находился и до сих пор находится под влиянием проблемы Альфреда Тарского (Tarski, 1966: 275–288). Проблема Тарского была решена отрицательно в 1993 году Маккензи (McKenzie, 1996: 49–104), что на самом деле сделало проблему конечной базируемости более интересной и перспективной для исследований. Если бы проблема Тарского имела бы позитивное решение, то статус проблемы конечной аксиоматизируемости был бы совершенно иным. Возможно она бы существовала, однако, основным направлением исследований было бы улучшение известных алгоритмов и классификация их сложности. Проблема Тарского для квазиэквациональных теорий до сих пор не решена. В конце 90-х, ряд исследователей показали, что мощный метод Маккензи, используемый для решения проблемы Тарского, нельзя просто перенести на квазиэквациональные теории. Заметим, что интенсивное исследование конечных базисов тождеств начались с работ Бьярни Йонссона. В конце 60-х Б. Йонссон (Jónsson, 1967: 110–121), (Jónsson, 1968: 187–196) связал теорию решеток с теоретико-модельными аспектами универсальной алгебры. Первый, кто показал, как использовать результаты Б. Йонссона для получения результатов по проблеме конечной аксиоматизируемости, был Кирби Бэйкер (Baker, 1977: 207–243). Который доказал, что конечно порожденное конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечно аксиоматизируемо. Правильнее будет сказать, что именно работы Б. Йонссона, результат К. Бэйкера, проблема Тарского и решение этой проблемы Р. Маккензи определили современное направление исследований конечных базисов тождеств и конечных базисов квазитождеств.

Настоящая работа посвящена вопросам конечной вложимости и вопросам конечной базируемости квазимногообразий коммутативных колец с единицей. Объектом исследования является квазимногообразие коммутативных колец с единицей, а предметом исследования являются неразрешимость квазиэквациональной теории и независимые базисы квазитождеств. Основным результатом является построение континуума квазимногообразий коммутативных колец с единицей, для которых проблема вхождения для конечных систем и квазиэквациональная теория не разрешимы. А также в данной работе доказано существование континуума подквазимногообразий квазимногообразия коммутативных колец с единицей с ω-независимым базисом квазитождеств, которые не имеют независимого базиса квазитождеств, но пересечение которых, однако, имеет рекурсивный независимый базис квазитождеств. Отметим, что теорема 1 была упомянута в работе (Basheyeva, 2017: 252–263) без доказательства. Доказательство этой теоремы принадлежит автору настоящей работы. Отметим также, что первое утверждение теоремы 3 также следует из результатов работы (Kravchenko, 2017c: 1330-1337).

2 Обзор литературы

В работе (Birkgoff, 1935: 433–454) получена одна из первых теорем о конечной базируемости в универсальной алгебре. Затем в работе (Neumann, 1937) была предложена проблема конечной базируемости для групп. Первый нетривиальный класс групп, для которых был найден утвердительный ответ, был классом нильпотентных групп (Lyndon, 1952: 579–583). Проблема конечной базируемости для колец была предложена (Specht, 1950: 557-589). Результаты конечной базируемости для коммутативных колец известны из работы (Cohen, 1967: 267–273). То, что тождества, выполняющиеся на конечных кольцах, имеют конечный базис, было установлено (Kruse, 1973: 298–318) и независимо (Львов, 1973: 267–298, 667–668, 735). Кроме того, если R является кольцом с нильпотентным идеалом N, таким что R/N конечно, то тождества R имеют конечный базис. Это было доказано в (Kruse, 1973: 298–318).

Одним из первых А. Тарский (Tarski, 1966: 275–288) построил пример многообразия универсальных алгебр, не имеющих независимого базиса квазитождеств. Вопрос о существовании независимого базиса квазитождеств для алгебраических систем без конечного базиса квазитождеств изучался А.И. Мальцевым (Maltsev 1967: 1005–1014). Позднее В.А. Горбунов (Gorbunov, 1977: 340–369) привел пример квазимногообразия с двумя унарными операциями и константой без независимого базиса квазитождеств, который тем не менее имеет ω-независимый базис квазитождеств. Им же в работе (Gorbunov, 1999: 331) был построен пример конечной унарной алгебры, которая не имеет как независимого, так и ω-независимого базиса квазитождеств.

Одни из первых результатов, устанавливающих существование многообразий универсальных алгебр с неразрешимой эквациональной теорией получены в работах Тарского и Чена (Chin, 1951: 341–384), (Tarski, 1953: 188–189), (Tarski A, 1987). Нуракунов (Nurakunov, 2012: 1–17) доказал, что существует континуум многообразий унаров с неразрешимой квазиэквациональной теорией, у которой проблема вхождения для конечных унаров также неразрешима. В работе (Клейман, 1982: 62–108.)

найдены конечно базируемые многообразия с неразрешимой эквациональной теорией относительно групп, а относительно полугрупп в трудах (Albert, 1992: 179–192), (Murskii, 1968: 663–670).

При исследовании квазиэквациональной теории в некоторых классах алгебраических систем большую роль играет конечность базисов квазитождеств. На сегодняшний день можно найти множество интересных работ о независимых базисах квазитождеств по различным классам алгебраических систем. Так А.Н. Федоров (Fedorov, 1986: 590–597) установил, что свободная 2-нильпотентная группа произвольного ранга $n \geq 2$ не имеет независимого базиса квазитождеств относительно класса групп без кручения. Н.Я. Медведев (Medvedev, 1985: 111–117) доказал существование континнума квазимногообразий разрешимых групп, не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно класса групп без кручения. Интересный результат был получен В.И. Тумановым (Tumanov, 1984: 811–815), где установлено, что любую конечную решетку можно изоморфно вложить в конечную решетку без независимого базиса квазитождеств. Существование континуума квазимногообразий унаров без независимого базиса квазитождеств доказал Карташов (Kartashov, 1980: 173–193), аналогичный результат для конечных псевдо-булевых и топобулевых алгебр получил Тропин (Tropin, 1988: 79–99), для ориентированных графов — Сизый (Sizyi, 1994: 783–794), для алгебр с двумя унарными операциями в сигнатуре — Кравченко (Kravchenko, 2016: 388–394), в случае дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп (Basheyeva, 2017: 252–263), в случае неориентированных графов см. (Kravchenko, 2017b: 80-89), для антимногообразий унаров (Kartashova, 2011: 521–532), для многообразия точечных абелевых групп и для квизимногообразий ориентриованных графов, содержащих недвудольные графы, в работе (Kravchenko, 2017a). На сегодняшний день в работе (Kravchenko, 2017c: 1330–1337) было найдено общее и достаточное условие для существования континуума квазимногообразий с ω-независимым, но без независимого базиса квазитождеств. Здесь мы показываем существование континуума квазимногообразий комутативных колец с единицей с ω-независимым базисом квазитождеств, но без независимого базиса квазитождеств, пересечение которых имеет рекурсивный независимый базис квазитождеств. А также, что есть континуум квазимногообразий коммутативных колец с единицей с неразрешимой квазиэквациональной теорией, для которых проблема вхождения для конечных систем также неразрешима.

3 Материал и методы

Напомним некоторые основные определения и общепринятые обозначения из теории квазимногообразий. Все определения, не вошедшие сюда, можно найти в монографии В. А. Горбунова (Gorbunov, 1998), а так же смотрите (Semenova, 2012: 889–905), (Schwidefsky, 2014: 1099–1126).

Пусть $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ — множество простых чисел, упорядоченное по возрастанию, а $\mathcal{P}_{fin}(X)$ — множество конечных подмножеств множества X. Множество натуральных чисел мы обозначаем через ω. Для любого непустого конечного множества $F \subseteq \omega$ полагаем $[F] = \prod_{i \in F} p_i$. Пусть также $[\varnothing] = 1$.

Квазитождествами называются предложения вида

$$\forall \overline{x}\ \psi_1(\overline{x}) \& \ldots \& \psi_k(\overline{x}) \to \psi_0(\overline{x}),$$

где $\psi_i(\overline{x})$-атомарные формулы и $i \leqslant k$.

Пусть $\mathbf{K_0}$-класс алгебраических систем сигнатуры σ. Класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K_0}$ является $\mathbf{K_0}$-*квазимногообразием*, если

$$\mathbf{K} = \{\mathcal{A} \in \mathbf{K_0} / \mathcal{A} \models \Psi\}$$

для некоторого множества квазитождеств Ψ сигнатуры σ.

В этом случае мы будем говорить, что Ψ является *базисом квазитождеств* класса $\mathbf{K}$ относительно $\mathbf{K_0}$. Базис Ψ для $\mathbf{K}$ относительно $\mathbf{K_0}$ называется *независимым*, если для любого $\psi \in \Psi$ множество $\Psi \setminus \psi$ уже не является базисом для $\mathbf{K}$ относительно $\mathbf{K_0}$. Базис квазитождеств Ψ класса $\mathbf{K}$ относительно $\mathbf{K_0}$ называется ω-*независимым*, если найдется разбиение $\Psi = \bigcup_{n\in\omega} \Psi_n$, где для любого $n < \omega$ множество $\bigcup_{m\neq n} \Psi_m$ уже не является базисом для $\mathbf{K}$ относительно $\mathbf{K_0}$.

Предложение 1 *(Gorbunov, 1998: 319, предложение 6.3.1) Пусть* $\mathbf{K}$ *— произвольное квазимногообразие,* $\mathbf{K}_0$ *— его собственное подквазимногообразие. Если* $\mathbf{K}_0$ *имеет бесконечный независимый базис квазитождеств относительно* $\mathbf{K}$*, тогда для любого квазимногообразия* $\mathbf{K}_1 \in \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$*, содержащего* $\mathbf{K}_0$ *и конечно аксиоматизируемого относительно* $\mathbf{K}$*, число покрытий* $\mathbf{K}_0$ *в* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}_1)$ *бесконечно.*

Вспомним некоторые определения и утверждения, которые нам будут необходимы при доказательстве основных результатов, касающихся коммутативных колец с единицей.

Определение 1 *Кольцом называется система* $(R, +, \cdot)$ *с двумя бинарными алгебраическими операциями, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

(P1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *для любых* a, b, $c \in R$

(P2) Существует элемент $0 \in R$ *такой, что* $0 + a = a + 0 = a$ *для любого* $a \in R$.

(P3) Для любого $a \in R$ *существует элемент* $-a \in R$ *такой, что* $-a + a = a + (-a) = 0$.

(P4) $a + b = b + a$ *для любых* $a, b \in R$.

(P5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *и* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *для любых* $a, b, c \in R$.

Кольцо $(R, +, \cdot)$ называется *коммутативным кольцом*, если оно удовлетворяет дополнительному условию $a \cdot b = b \cdot a$ для любого $a, b \in R$. Пусть $\mathbf{R}$ обозначает многообразие коммутативных колец с единицей. Для любого $x \in R \in \mathcal{R}$ пусть

$$0 \cdot x = 0,$$

$$1 \cdot x = x,$$

$$n \cdot x = \underbrace{(x + \ldots + x)}_{n}$$

Далее через $\mathcal{R}_n$ будем обозначать цикл длины n, то есть коммутативное кольцо с единицей от одного порождающего x с определяющим соотношением $nx = 0$.

Предложение 2 *Пусть* $\mathbf{C} = \{\mathcal{C}_n | n < \omega\}$ *вычислимый класс конечных систем конечной сигнатуры, удовлетворяющая следующим условиям:*

(E_0) $\mathcal{C}_n$ *нетривиальная система для любого* $n < \omega$

(E_1) *если* $k < \omega$ *и* $n, n_0, \ldots, n_k < \omega$, *то* $\mathcal{C}_n \in \mathbf{SP}(\mathcal{C}_{n_0}, \ldots, \mathcal{C}_{n_k})$ *тогда и только тогда, когда* $n \in \{n_0, \ldots, n_k\}$.

Тогда существует континуум квазимногообразий $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Q}(C)$, *для которых проблема вхождения для конечных систем неразрешима.*

Доказательство. Пусть $N \subseteq \omega$ произвольное множество. Полагаем

$$\mathbf{K}_N = \{C_i | i \in N\}, \quad \mathbf{R}_N = \mathbf{Q}(\mathbf{K}_N).$$

Пусть $(\mathbf{R}_N)_{fin}$ обозначает класс конечных систем из $\mathbf{R}_N$.

Утверждение 1 $\mathbf{R}_N \cap \mathbf{C} = \mathbf{K}_N$.

Доказательство утверждения 1. Очевидно, что $\mathbf{K}_N \subseteq \mathbf{R}_N \cap \mathbf{C}$. Наоборот пусть $\mathcal{C}_n \in \mathbf{R}_N \cap \mathbf{C}$ для некоторого целого $n < \omega$. Тогда $\mathcal{C}_n \in \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s(\mathbf{K}_N)$. Так как $\mathcal{C}_n$ конечная система, то она l-проективна, т.е. $\mathcal{C}_n \in \mathbf{SP}(\mathbf{K}_N)$. Опять, так как $\mathcal{C}_n$ конечна, существуют целые числа $n_0, \ldots, n_k \in N$ такие, что $\mathcal{C}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{C}_{n_0}, \ldots, \mathcal{C}_{n_k})$. Более того по нашим предположениям о классе $\mathbf{C}$ получаем, что $n \in \{n_0, \ldots, n_k\} \subseteq N$; это означает, что $\mathcal{C}_n \in \mathbf{K}_N$. Утверждение 1 доказано.

Из утверждения 1 следует

Утверждение 2 *Если* $\mathbf{R}_{N_0} = \mathbf{R}_{N_1}$, *то* $N_0 = N_1$.

Утверждение 3 *Если множество* $(\mathbf{R}_N)_{fin}$ *вычислимо, то множество* N *также вычислимо.*

Доказательство утверждения 3. Если $(\mathbf{R}_N)_{fin}$ вычислимое множество, то множество $N' = \{n < \omega | \mathcal{C}_n \in \mathbf{R}_N\}$ вычислимо по нашему предположению. По утверждению 2, $N = N^{'}$, это означает, что множество N так же вычислимо. Утверждение 3 доказано.

4 Основные результаты

4.1 Проблема вхождения для конечных алгебр

Лемма 1 *Пусть* $n > 0, k > 1, k_1 > 1, \ldots, k_n > 1$ *целые числа такие, что множество* $\{k_1, \ldots, k_n\}$ *минимально относительно свойства* $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \ldots, \mathcal{R}_{k_n})$. *Тогда* $k = [k_1, \ldots, k_n]$. *С другой стороны, если* $k = [k_1, \ldots, k_n]$, *то* $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \ldots, \mathcal{R}_{k_n})$.

Доказательство леммы 1. Если $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \ldots, \mathcal{R}_{k_n})$, то легко увидеть, что $\mathcal{R}_k$ вложено в $\mathcal{R}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{R}_{k_n}$; Пусть ψ есть соответствующее вложение.

$$\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \ldots, \mathcal{R}_{k_n}) = \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s(\mathcal{R}_{k_1}, \ldots, \mathcal{R}_{k_n}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathbf{A}).$$

Система $\mathcal{R}_k$ l-проективна в $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$, и соответственно

$$\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \ldots, \mathcal{R}_{k_n}).$$

Теперь так как $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \ldots, \mathcal{R}_{k_n})$. В силу минимальности множества $\{k_1, \ldots, k_n\}$ получаем, что для любого $i \leqslant n$ существует нетривиальный гомоморфизм из $\mathcal{R}_k$ в $\mathcal{R}_{k_i}$. Поскольку $\mathcal{R}_{k_i}$ не содержит нетривиальных подколец, заключаем, что k_i делит k, поэтому $k = [k_1, \ldots, k_n]$ делит k. Тот факт, что $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \ldots, \mathcal{R}_{k_n})$, доказывает равенство $k = [k_1, \ldots, k_n]$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1 *Существует континуальное множество квазимногообразий* $\mathbf{K}$ *коммутативных колец с единицей таких, что проблема вхождения для конечных колец в* $\mathbf{K}$ *и квазиэквациональная теория* $\mathbf{K}$ *неразрешимы.*

Доказательство. Для некоторого положительного $n < \omega$ пусть ψ_n обозначает следующие квазитождество:

$$\forall x\ p_n \cdot x = 0 \to x = 0.$$

Полагаем также

$$\mathbf{K} = \{\mathcal{R}_{p_i} | i < \omega\}.$$

Из леммы 1 следует, что класс $\mathbf{K}$ удовлетворяет условиям (E_0)-(E_1). Пусть также

$$\Psi = \{\psi_n | 1 < n < \omega\},$$

$$\mathbf{K}_N = \{\mathcal{R}_{p_i} | i \in N\},$$

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{Q}(\mathbf{K}_N).$$

Пусть $Th_q(\mathbf{R}_N)$ обозначает квазиэквациональную теорию $\mathbf{R}_N$; тогда $Th_q(\mathbf{R}_N) = Th_q(\mathbf{K}_N)$. Из предложения 2 следует, что для квазимногообразия $\mathbf{R}_N$ проблема вхождения для конечных систем неразрешима, если множество N не является вычислиммым.

Утверждение 4 *Для* $n < \omega$ *имеет место включение* $\psi_n \in Th_q(R_N)$ *тогда и только тогда, когда* $n \notin N$.

Доказательство утверждения 4. Пусть $n < \omega$. Если $n \in N$, то $\mathcal{R}_{p_n} \in \mathbf{K}_N \subseteq \mathbf{R}_N$ и $\mathcal{R}_{p_n} \nvDash \psi_n$, откуда $\psi_n \notin Th_q(\mathbf{R}_N)$. Предположим теперь, что $n \notin N$. В этом случае p_i не делит p_n для любого $i \in N$. Это означает, что посылка ψ_n ложно в любом кольце $\mathcal{R}_i \in \mathbf{K}_N$ при любом означивании переменных. Но тогда $\mathcal{R}_i \vDash \psi_n$. Следовательно, в этом случае $\mathbf{K}_N \vDash \psi_n$. Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5 *Если* $Th_q(\mathbf{R}_N)$ *разрешима, тогда* N *вычислимо.*

Доказательство утверждения 5. Если квазиэквациональная теория $Th_q(\mathbf{R}_N)$ разрешима, то множество $\{n < \omega | \psi_n \in Th_q(\mathbf{R}_N)\}$ вычислимо. По утверждению дополнение N вычислимо, откуда следует, что само N тоже вычислимо. Утверждение 5 доказано.

Замечание о том, что существует континуум невычислимых множеств, имеющих невычислимые дополнения, завершает доказательство теоремы 1.

4.2 Независимые базисы квазитождеств

Пусть $I \subseteq P$. Через ψ_F^I обозначим квазитождество следующего вида:

$$\forall x \ [F] \cdot x = 0 \to [F \cap I] \cdot x = 0$$

Пусть $\Phi_I = \{\psi_F^I | F \in P_{fin}(P)\}$, а $\mathbf{R}_I$ - квазимногообразие, определенное в $\mathbf{R}$ множеством квазитождеств Φ_I.

Лемма 2 *Для любого $F \in P_{fin}(P)$, $\mathcal{R}_n \in \mathbf{R}_I$ тогда и только тогда, когда $F \subseteq I$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}_{[F]} \in \mathbf{R}_I$. Тогда $\mathcal{R}_{[F]} \models \psi_F^I$, следовательно, если в $\mathcal{R}_{[F]}$ истинно $[F]\cdot x = 0$, то $[F\cap I]\cdot x = 0$. Это возможно только когда $[F]$ делит $[F\cap I]$, т.е. $F \subseteq F\cap I \subseteq I$. Обратно очевидно.

Пусть множества $I \subseteq P$ и $P \setminus I$ бесконечны. Через ψ_F^p, где $F \in P_{fin}(P)$ и $p \notin F$ обозначим квазитождество:

$$\forall x \ [F \cup \{p\}] \cdot x = 0 \to [F] \cdot x = 0,$$

Пусть $\Psi_p = \{\psi_F^p | F \in P_{fin}(P), p \notin F\}$ и $\Psi_I = \bigcup_{p\in P\setminus I} \Psi_p$ и пусть $\mathbf{R}'_I$ обозначает квазимногообразие, определенное в $\mathbf{R}$ множеством квазитождеств Ψ_I.

Теорема 2 *Для любого бесконечного собственного подмножества $I \subseteq P$ квазимногообразие $\mathbf{R}_I$ не имеет независимого базиса квазитождеств.*

Доказательство. По предложению 1 достаточно показать, что для $\mathbf{R}_I$ не существует покрытий в решетке подквазимногообразий $\mathbf{R}$. Допустим в $\mathbf{R}_I$ существует покрытие $\mathbf{B}$ и пусть $\mathcal{R} \in \mathbf{B}\setminus\mathbf{R}_I$. Это значит, что существует квазитождество ψ_F^p, лежащее в Ψ_I, которое ложно в $\mathcal{R}$, то есть, $\mathcal{R} \models \neg\psi_F^p$. Следовательно, существует элемент $x \in \mathcal{R}$ такой, что $[F \cup \{p\}] \cdot x = 0$, но $[F] \cdot x \neq 0$. Согласно лемме 2 получим, что существует цикл $\mathcal{R}_r \leq \mathcal{R}$, причем r делит $[F\cup\{p\}]$, но r не делит $[F]$, где $F \neq \varnothing$. Пусть $\mathbf{B}' = \mathbf{B}\cap Mod(\psi_F^p)$. Получаем $\mathbf{R}_I \models \psi_F^p$ и $\mathcal{R}_r \models \neg\psi_F^p$. Таким образом, $\mathbf{R}_I \subseteq \mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$. Поскольку квазимногообразие $\mathbf{B}$ покрывает $\mathbf{R}_I$ в решетке квазимногообразий $Lq(\mathbf{R})$, имеем равенство $\mathbf{R}_I = \mathbf{B}'$. Выберем простое число $j \in P \setminus I$ такое, что r не делится на j. Следовательно $\mathcal{R}_j \in \mathbf{R}_I$ и $\mathcal{R}_{rj} \leq \mathcal{R}_r \times \mathcal{R}_j$. Откуда получаем, что $\mathcal{R}_{rj} \in \mathbf{B}$. $\mathcal{R}_{rj} \models \psi_F^p$, так как rj не делит $[F \cup \{p\}]$. Таким образом, $\mathcal{R}_{rj} \in \mathbf{B}' = \mathbf{R}_I$. Приходим к противоречию, поскольку $j \notin I$. Следовательно $\mathbf{R}_I$ не имеет покрытий в решетке $Lq(\mathbf{R})$, что и было нашей целью.

Теорема 3 *Существует континуум квазимногообразий коммутативных колец с единицей без независимого базиса квазитождеств, которые имеют ω-независимый базис квазитождеств.*

Доказательство. Сначала убедимся, что $\mathbf{R}'_I$ — необходимые квазимногообразия. Проверим, что $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}'_I$ для произвольного множества $I \subseteq P$, такого что оба множества $I \subseteq P$ и $P \setminus I$ бесконечны. Допустим, что $\mathcal{R} \in \mathbf{R}_I$, следовательно $\mathcal{R} \models \Phi_I$. Если для некоторого элемента $a \in R$ выполняется равенство $[F \cup \{p\}] \cdot a = 0$, то $(F \cup \{p\}) \cap I = F \cap I \subseteq F$, так как $p \notin I$. А это значит, что число $m = \big[(F \cup \{p\}) \cap I\big]$ делит число $[F]$. Откуда получаем равенство $0 = [F] \cdot a$, что являтся заключением квазитождества ψ_F^p после подстановки элемента a. Получаем, что $\mathcal{R} \models \Psi_I$, следовательно $\mathcal{R} \in \mathbf{R}'_I$.

Пусть теперь $\mathcal{R} \in \mathbf{R}'_I$, то есть $\mathcal{R} \vDash \Psi_I$. Рассмотрим квазитождество ψ^I_F. Пусть для некоторого элемента $a \in R$ выполняется равенство $[F \cup \{p\}] \cdot a = 0$. Тогда если $F \subseteq I$, то $F \cap I = F$ и, следовательно, выполняется равенство $[F] \cdot a = 0$. Иначе получаем неравенство $F \backslash I \neq \varnothing$. Пусть $F \backslash I = \{p_0, \ldots, p_k\}$. Полагаем

$$R_0 = F, \quad R_{i+1} = R_i \backslash \{p_i\}, \text{ где } 0 \leqslant i \leqslant k,$$

тогда $R_{k+1} = F \cap I$. Выполнение равенства $([F]) \cdot a = 0$ влечет выполнения посылки квазитождества $\psi^{p_0}_{R_0}$ в $\mathcal{R}$ на элементе a. Так как $p_i \notin I$, то $\psi^{p_i}_{R_i} \in \Psi_I$, для $0 \leqslant i \leqslant k$. Отметим, что заключение квазитождества $\psi^{p_i}_{R_i}$ совпадает с посылкой квазитождества $\psi^{p_{i+1}}_{R_{i+1}}$. Получаем таким образом, что $[R_{k+1}] \cdot a = 0$ в $\mathcal{R}$. Следовательно, $\mathcal{R} \vDash \Phi_I$, откуда $\mathcal{R} \in \mathbf{R}_I$.

В силу теоремы 2 существует континуум квазимногообразий вида $\mathbf{R}'_I$ без независимого базиса квазитождеств. Докажем, что для этих квазимногообразий множество квазитождеств $\Psi_I = \bigcup_{p \in P \backslash I} \Psi_p$ является ω-независимым базисом.

Для этого установим, что для любого элемента $p \in P \setminus I$ на кольце $\mathcal{R}_p$ выполняются все квазитождества из $\Psi_I \setminus \Psi_p$. Допустим, что $q \in P \setminus I$, $q \neq p$, $F \in P_{fin}(P)$, где $q \notin F$. Если в кольце $\mathcal{R}_p$ на некотором ненулевом элементе истинна посылка квазитождества ψ^q_F, тогда она истинна на любом ненулевом элементе, поэтому существует гомоморфизм из $\mathcal{R}_{[F \cup \{q\}]}$ на $\mathcal{R}_p$. По лемме 1 из [10], получаем, что число $[F \cup \{q\}]$ делится на p. Так как $p \neq q$, имеем $p \in F$, то есть простое число p делит $[F]$. Следовательно, в $\mathcal{R}_p$ выполняется и заключение квазитождества ψ^q_F. Так как $\mathcal{R}_p$ очевидным образом не удовлетворяет квазитождеству $\psi^p_\varnothing \in \Psi_p$, базис Ψ_I является искомым ω-независимым базисом. Теорема доказана.

Рассмотрим квазимногообразие $\mathbf{R}' = \bigcap_{I \subset P,\ |I| = \omega} \mathbf{R}_I$. Базис этого квазимногообразия состоит из квазитождеств ψ^I_F, где I пробегает множество всех бесконечных собственных подмножеств множества P простых чисел, а F пробегает множество всех конечных подмножеств множества P. Легко видеть, что $\mathbf{R}'$ состоит из тех коммутативных колец с единицей, в которые не вложимо ни одно из колец $\mathcal{R}_{[F]}$, где $\varnothing \neq F \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)$, в качестве подкольца. Другими словами, имеет место такая лемма.

Лемма 3 $\mathbf{R}' = \bigcap \{\mathbf{R}'_I | I \subseteq P, |I| = |P \setminus I| = \omega\}$. *Более того,* $\mathcal{R} \in \mathbf{R}'$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{R}$ *не содержит конечных циклов* $\mathcal{R}_{[F]}$, *где* $F \neq \varnothing$, *в качествае подсистем.*

Поэтому по теореме 3 и лемме 2 базисом квазитождеств для $\mathbf{R}'$ относительно $\mathbf{R}$ является множество $\bigcup_I \Psi_I$. Но этот базис не является независимым. Тем не менее, как показывает следующая теорема, оказывается возможным найти независимый базис квазитождств для $\mathbf{R}'$ относительно $\mathbf{R}$.

Теорема 4 *Квазимногообразие* $\mathbf{R}'$ *имеет бесконечный рекурсивный независимый базис квазитождеств относительно* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Ввведем следующие обозначения. Полагаем $F_{-1} = \varnothing$. Кроме того, пусть $F_n = \{p_k \in P | k \leq n\}$ для произвольного $n \in \omega$. Для всякого $n \in \omega$ обозначим через ξ_n такое квазитождество:

$$[F_n] \cdot x = 0 \to [F_{n-1}] \cdot x = 0.$$

Покажем, что $\Sigma = \{\xi_n | n \in \omega\}$ является независимым базисом квазитождеств для квазимногообразия $\mathbf{R}'$ относительно $\mathbf{R}$. По лемме 3 для любой системы $\mathcal{R} \notin \mathbf{R}'$ существует непустое конечное множество $F \subseteq P$, такое что $\mathcal{R}_{[F]}$ вложима в $\mathcal{R}$. Рассмотрим максимальное $n \in \omega$ такое, что $p_n \in F$. Тогда $F \subseteq F_n$, $F \nsubseteq F_{n-1}$, и кольцо $\mathcal{R}_{[F]}$ (а, следовательно, и кольцо $\mathcal{R}$), очевидно, не удовлетворяет квазитождеству ξ_n. С другой стороны, если $n \in \omega$ и посылка квазитождества ξ_n выполняется в коммутативном кольце с единицей $\mathcal{R} \in \mathbf{R}'$ при некотором означивании переменных, тогда существует гомоморфизм из $\mathcal{R}_{[F_n]}$ в $\mathcal{R}$. Если образ этого гомоморфизма тривиален, то и заключение квазитождества ξ_n выполняется в $\mathcal{R}$ при том же означивании переменных. В противном случае цикл $\mathcal{R}_G$, где $\varnothing \neq G \subseteq F_n$ вложим в $\mathcal{R}$. По лемме 3 это невозможно, поэтому $\mathcal{R}$ удовлетворяет квазитождеству ξ_n. Следовательно множество Σ является базисом квазитождеств для $\mathbf{R}'$. Так как множество $\{([F_n], [F_{n-1}]) | n \geq 0\}$ вычислимо, то этот базис рекурсивный.

Теперь докажем, что базис Σ независимый в $\mathbf{R}$. Поэтому покажем, что для любого $n \in \omega$ цикл $\mathcal{R}_{[F_n]}$ выполняется во всех квазитождествах ξ_m, где $m \neq n$. Если $m < n$, то посылка квазитождества ξ_m выполняется на некотором элементе $a \in R_{[F_n]}$ тогда и только тогда, когда подсистема в $\mathcal{R}_{[F_n]}$, порожденная этим элементом, тривиальна. В этом случае, заключение ξ_m также выполняется на a. Если же $m > n$ тогда $F_n \subseteq F_{m-1}$. Поэтому заключение квазитождества ξ_m выполняется для любого элемента $a \in R$. Таким образом, если $m \neq n$, тогда $\mathcal{R}_{[F_n]} \models \xi_m$, так как $\mathcal{R}_{[F_n]}$ не содержит циклов длины меньше чем $[F_n]$, то $\mathcal{R}_{[F_n]} \not\models \xi_n$. Это и является требуемым заключением.

5 Заключение

В настоящей работе продолжается изучение вопросов неразрешимости квазиэквациональных теорий и проблема независмой аксиоматизируемости. Основным результатом является доказательство того факта, что квазимногообразие коммутативных колец с единицей содержит континуум подквазимногообразий с неразрешимой квазиэквациональной теорией, для которых проблема вхождения для конечных систем также неразрешима. Кроме того, строится континуум подквазимногообразий коммутативных колец с единицей, без независимого базиса квазитождеств, но имеющих ω-независимый базис квазитождеств; пересечение этих вазимногообразий, однако, имеет рекурсивный независимый базис квазитождеств. Этот результат расширяет и дополняет другие результаты, полученные ранее в этом направлении как автором этой статти, так и другими авторами.

6 Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность своим научным консультантам А. М. Нуракунову и М. В. Швидефски за постановку задач и всестороннюю поддержку, а также А. В. Кравченко за внимание к работе.

Список литературы

[1] Albert D., Baldinger R., Rhodes J. Undecidability of the identity problem for finite semigroups // J. Symbolic Logic. — 1992. — vol. 57, № 1. — P. 179–192.

[2] Baker K. A. Finite equational bases for finite algebras in congruence-distributive equational classes // Advances in Math. —1977. — vol. 24. — P. 207–243.

[3] Basheyeva A., Nurakunov A., Schwidefsky M., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. III //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — vol. 14. — P. 252–263.

[4] Birkgoff G., On the structure of abstract algebras // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1935. — vol. 31. — P. 433–454.

[5] Gorbunov V.A. Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability //Algebra and Logic — 1977. — vol. 16, no. 5. — P. 340–369.

[6] Gorbunov V.A. Algebraic Theory of Quasivarieties.— New York:Plenum, 1998. — p. 331

[7] Cohen D. E. On the laws of a metabelian variety //J. Alg. —1967.— vol. 5. — P. 267–273.

[8] Chin L.H., Tarski A. Distributive and modular lows in the arithmetic of relation algebras //University of California Publications in Mathematics — 1951 — vol. 9— P. 341-384.

[9] Jónsson B. Algebras whose congruence lattices are distributive. // Mathematica Scandinavica — 1967. — vol. 21 — P. 110–121.

[10] Jónsson B. Equational classes of lattices. // Mathematica Scandinavica — 1968. — vol. 22 — P. 187–196.

[11] Kartashov V.K. Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles //Algebra and Logic — 1980. — vol. 19 — P. 106–120.

[12] Kartashova, A.V. Antivarieties of unars //Algebra and Logic —2011. — vol. 50. — P. 357–364

[13] Kravchenko A.V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — vol. 13. — P. 388–394.

[14] Kravchenko A.V., Nurakunov A.M., Schwidefsky M.V. Complexity of quasivariety lattices. I. Covers and independent axiomatizability // manuscript, 2017.

[15] Kravchenko A.V., Aleksandr Y. Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — vol. 20. — P. 80–89

[16] Kravchenko A.V., Nurakunov A.M., Schwidefsky M.V. On quasi-equational bases for differential groupoids and unary algebras //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — vol. 14. — P. 1330–1337

[17] Kruse, R. L. Identities satisfied by a finite ring //Journal of Algebra. — 1973. — vol. 26. — P. 298—318.

[18] Lyndon R. C. Two notes on nilpotent groups //Proc. Amer. LVTcztk. Sot. — 1952. —vol. 3. №14, 579-583.

[19] L'vov, I.V. Varieties of associative rings, I, II //Algebra i Logika — 1973. — vol. 12, 267–298, 667–668, 735.

[20] Maltsev A.I. Universally axiomatizable subclasses of locally finite classes of models //Siberian Math. J. — 1967.— vol.8, no. 5. — P.764–770.

[21] Medvedev N.Y. Quasivarieties of l-groups and groups. //Siberian Math. J. — 1985.— vol.26, no. 5. — P.717–723.

[22] McKenzie R. Tarski's finite basis problem is undecidable //International Journal of Algebra and Computation. V. —1996.— vol. 6.— P. 49-104.

[23] Murski V.L. Examples of varieties of semigroups //Algebra and logica. 1968.— vol. 3.— P. 423–427.

[24] Neuman H. Varieties of Groups, Springer-Verlag, Ergeb. d. Math. B. 37, New York, Berlin, 1967.

[25] Nurakunov A.M. Unreasonable lattices of quasivarieties //International Journal of Algebra and Computation. V. — 2012. — vol. 22.— P. 1-17.

[26] Nurakunov A.M. Quasi-indentities of relatively distributive and relatively cocontinuous quasivarieties of algebras. — Darmstadt: Arbeitstangung Allgemeine Algebra, 1995.

[27] Semenova M.V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses //Siberian Math. J., — 2012 —vol. 53. — P. 889–905.

[28] Sizyi S.V. Quasivarieties of graphs //Siberian Math. J. — 1994. vol. 35. — P. 783–794.

[29] Specht W., Gesetze in Ringen. I. //Math. Z. —1950. — vol. 52. — P. 557–589.

[30] Schwidefsky M., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses, II //Internat. J. Algebra Comput., —2014.—vol. 24, 1099-1126.

[31] Tarski A. Equational logic and equational theories of algebras //Contrib. Math. Logic — 1966. — vol. 8, — P. 275–288.

[32] Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. — 1953. — vol. 18. — P. 188–189.

[33] Tarski A., Givant S. A Formalization of set theory without variables // AMS: Colloquium publications, Providence, Rhode Island. vol. 41 — 1987.

[34] Tropin M.P. Finite pseudo-Boolean and topological algebras not having an independent basis of quasiindentities //Algebra and Logic, — 1988. — vol. 27, No.1, — P. 79–99.

[35] Tumanov V.I. Finite lattice with independent quasi-equational basises //Math. notes, —1984. — vol. 36, No.5, — P. 811–815.

[36] Fedorov A.N. Quasi-identities of a free 2-nilpotent group //Math. notes, —1986. — vol. 40, No.5 , — P. 837–841.

[37] Клейман Ю.Г. О тождествах в группах // Тр. Моск. матем. о-ва. — 1982. — Т. 44. — С. 62–108.

[38] Мальцев А.И. О включении ассоциативных систем в группы //Мат. сборник — 1939. Т. 6, 2. — С. 187–189.

[39] Мальцев А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики //Труды конгресса математиков, Москва (1966), М.Мир, — 1968. — С. 217–231.

References

[1] Albert, D. Polimeni, and Baldinger R., and Rhodes John. "Undecidability of the identity problem for finite semigroups."J. Symbolic Logic. 57 (1992): 179–192.

[2] Baker, Kirby. "Finite equational bases for finite algebras in congruence-distributive equational classes."Advances in Math. 24 (1977): 207–243.

[3] Basheyeva, Ainur, and Nurakunov Anvar, and Schwidefsky Marina, and Zamojska-Dzienio Anna. "Lattices of subclasses. III."Siberian Electronic Mathematical Reports. 14 (2017): 252–263.

[4] Birkgoff, Garret. "On the structure of abstract algebras."Proc. Cambridge Philos. Soc. 31 (1935): 433 – 454.

[5] Gorbunov, Viktor. "Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability."Algebra and Logic. 16 (1977): 340–369.

[6] Gorbunov, Viktor. Algebraic Theory of Quasivarieties. New York: Plenum, 1998.

[7] Cohen, Daniel. "On the laws of a metabelian variety."J. Alg. 5 (1967): 267–273.

[8] Chin, Luogeng Hua, and Tarski Alfred. "Distributive and modular lows in the arithmetic of relation algebras."University of California Publications in Mathematics 9 (1951): 341-384.

[9] Jónsson, Bjarni. "Algebras whose congruence lattices are distributive."Mathematica Scandinavica 21 (1967): 110–121.

[10] Jónsson, Bjarni. "Equational classes of lattices."Mathematica Scandinavica 22 (1968): 187–196.

[11] Kartashov, Vladimir. "Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles."Algebra and Logic. 19 (1980): 106–120.

[12] Kartashova, Anna. "Antivarieties of unars."Algebra and Logic. 50 (2011): 357–364

[13] Kravchenko, Aleksandr. "Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II."Siberian Electronic Mathematical Reports. 13 (2016): 388–394.

[14] Kravchenko, Aleksandr, and Anvar Nurakunov, and Marina Schwidefsky. "Complexity of quasivariety lattices. I. Covers and independent axiomatizability."manuscript, 2017.

[15] Kravchenko, Aleksandr, and Anvar Nurakunov, and Marina Schwidefsky. "On quasi-equational bases for differential groupoids and unary algebras."Siberian Electronic Mathematical Reports. 14 (2017): 1330–1337

[16] Kravchenko, Aleksandr, and Andrei Yakovlev. "Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability."Siberian Electronic Mathematical Reports. 20 (2017): 80–89

[17] Kruse, Robert. "Identities satisfied by a finite ring."Journal of Algebra. 26 (1973): 298—318.

[18] Lyndon, Rodger. "Two notes on nilpotent groups."Proc. Amer. LVTcztk. Sot. 3 (1952): 579-583.

[19] L'vov, I.V. "Varieties of associative rings, I, II"Algebra and logika 12 (1973): 267–298, 667–668, 735.

[20] Maltsev, Anatolij. "Universally axiomatizable subclasses of locally finite classes of models."Siberian Math. J. 8 (1967): 764–770.

[21] Medvedev N.Y. "Quasivarieties of l-groups and groups". Siberian Math. J. 26 (1985): 717–723.

[22] McKenzie, Ralf. "Tarski's finite basis problem is undecidable."International Journal of Algebra and Computation. V. 6 (1996): 49-104.

[23] Murskii, Vadim. "Examples of varieties of semigroups". Algebra and logica. 3 (1968): 423–427.

[24] Neumann, Bernhard. Varieties of Groups. Berlin, Springer-Verlag, Ergeb. d. Math. B. 37, 1967.

[25] Nurakunov, Anvar. "Unreasonable lattices of quasivarieties."International Journal of Algebra and Computation. V. 22 (2012): 1-17.

[26] Nurakunov, Anvar. Quasi-indentities of relatively distributive and relatively cocontinuous quasivarieties of algebras. Darmstadt: Arbeitstangung Allgemeine Algebra, 1995.

[27] Semenova, Marina, Anna Zamojska-Dzienio. "Lattices of subclasses"Siberian Math. J., 53 (2012): 889–905.

[28] Sizyi, Sergei. "Quasivarieties of graphs."Siberian Math. J. 35 (1994): 783–794.

[29] Specht, Wilhelm. "Gesetze in Ringen. I."Math. Z. 52 (1950): 557–589.

[30] Schwidefsky, Marina, Anna Zamojska-Dzienio. "Lattices of subclasses, II"Internat. J. Algebra Comput., 24 (2014): 1099-1126.

[31] Tarski, Alfred. "Equational logic and equational theories of algebras."Contrib. Math. Logic. 8 (1966): 275–288.

[32] Tarski, Alfred. "Some methodological results concerning the calculus of relations."J. Symbolic Logic. 18 (1953): 188–189.

[33] Tarski, Alfred., Givant S. A Formalization of set theory without variables AMS: Colloquium publications, Providence, Rhode Island. 41 (1987).

[34] Tropin, Mihail. "Finite pseudo-Boolean and topological algebras not having an independent basis of quasiidentities."Algebra and Logic. 27 (1988): 79–99.

[35] Tumanov, Vladimir. "Finite lattice with independent quasi-equational basises"Math. notes, 36 (1984): 811–815.

[36] Fedorov, Aleksandr . "Quasi-identities of a free 2-nilpotent group"Math. notes, 40 (1986): 837–841.

[37] Kleiman, Y. (1982) O tojdestvax v gruppax [On indentities in groups]. Tr. Mosk. Mat. obs. - Proseeding of Moskow mathematical sosiety vol.44, pp. 62–108.

[38] Maltsev, A. (1939) O vkluchenyi assosiativnykh sistem v gruppy [On including of associative systems in groups]. Mat. sbornik - Math. collection, vol. 6, no. 2, pp.187–189.

[39] Maltsev, A. (1966) O nekotorykh pogranichnikh voprosakh algebry i matematicheskoi logiki [Some boundary questions of algebra and Mathematical logic]. Trudy kongressa matematikov - Proseeding of mathematic congress (Moskva, 1966), M.: Mir, pp.217–231.