МРНТИ 27.29.19

Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде

Кангужин Б.Е., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77081001131, E-mail: kanguzhin53@gmail.com

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания. В данной статье выведена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Значительную трудность представляет построение функции Грина на геометрических графах при значениях независимых переменных близких к вершинам графа. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Предлагается конструктивная схема построения функции Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стержней пока еще мало изучены. Спектральный анализ дифференциальных операторов на геометрических графах является основным математическим аппаратом при решении современных проблем квантовой механики.
Ключевые слова: ориентированный граф, вершины графа, условия Кирхгофа, колебания упругих сетей, функция Грина задачи Дирихле, разложение по собственным функциям.

Граф-жұлдызда берілген дифференциалдық операторға қойылған Дирихле есебінің Грин функциясы

Кангужин Б.Е., әл-Фараби Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77081001131, E-mail: kanguzhin53@gmail.com

Бұл жұмыста стерженділік құрылымды тербелмелі жүйелердің моделі болып табылатын екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі зерттеледі. Графтағы дифференциалдық операторларға қойлған есептерді қазірі уақытта математиктер белсене зерттеуде және квантық механика, органикалық химия, нанотехнология, толқындар теориясы мен ғылымның басқа да салаларында қолданыс табады. Бұл мақалада жұлдызды графта анықталған дифференциалдық оператор үшін Дирихле есебініңГрин функциясы қортылып алынды. Геометриялық графтарда графтыңтөбелеріне жақын орналасқан тәуелсіз айнымалылардың мәндері үшін Грин функциясын тұрғызу айтарлықтай қиындық туғызады. Біз ішкі төбелерінде жапсырушы стандартты шарттарды және шекаралық төбелерінде Дирихле шекаралық шарттарын пайдаландық. Штурм-Лиувилль теңдеуі үшін шекаралық есептің Грин функциясын тұрғызудың конструктивті схемасы ұсынылады. Графта анықталған кез-келген функцияны меншікті функциялары бойынша жіктеуге болатыны дәлелденеді. Біріктірілген стерженьдердің модельдері үшін спектрлік теорияның Грин функциясын тұрғызу және меншікті функциялары бойынша жіктеу сияқты сұрауытары әлі толық зерттелмеген. Геометриялық графтардағы дифференциалдық операторлардың спектрлік талдауы қазіргі заманғы квантық механиканың мәселелерін шешудегі негізгі математикалық аппарат болып табылады.
Түйін сөздер: бағытталған граф, графтың төбелері, Кирхгоф шарты, серпімді желілердің тербелістері, Дирихле есебінің Грин функциясы, меншікті функциялар бойынша жіктеу.

Green's function of the Dirichlet problem for the differential operator on a star-shaped graph

Kanguzhin B.E., al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazkhstan, +77081001131, E-mail: kanguzhin53@gmail.com

Differential operators on graphs often arise in mathematics and different fields of science such as mechanics, physics, organic chemistry, nanotechnology. In this paper we deduced the Green function of the Dirichlet problem for a differential operator on a star-shaped graph.We study the differential operator with standard matching conditions in the internal vertices and the Dirichlet boundary conditions at boundary vertices. In this paper, we investigate a system of second-order differential equations, which is a model of vibrational systems with a rod structure. Problems for differential operators on graphs are now actively studied by mathematicians and have applications in quantum mechanics, organic chemistry, nanotechnology, waveguide theory and other fields of natural science. In this paper we derive the Green function of the Dirichlet problem for a differential operator on a starlike graph. A significant difficulty is the construction of the Green's function on geometric graphs for values of independent variables close to the vertices of the graph. We used standard gluing conditions in internal vertices and Dirichlet boundary conditions at boundary vertices. A constructive scheme for constructing the Green's function of the boundary value problem for the Sturm-Liouville equation is proposed. The existence of a decomposition of an arbitrary function defined on a graph with respect to eigenfunctions is proved. Questions from the spectral theory, like the construction of the Green's function and the expansion in eigenfunctions for models from connected rods, have so far been little studied. Spectral analysis of differential operators on geometric graphs is the basic mathematical apparatus in solving modern problems of quantum mechanics.

Key words: oriented graph, vertices of graph, Kifchhoff condition, vibrations of elastic networks, Green's function of Dirichlet problem, extension by eigenfunctions.

1 Введение

В работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Первые работы по дифференциальным операторам на многообразиях типа графа появились совсем недавно, около 30 лет назад (Герасименко, 1988), (Покорный, 1987), (Покорный, 1988). Задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания (см. (Герасименко, 1988), (Покорный, 1987), (Покорный, 1988), (Покорный, 1996), (Покорный, 2004), (Покорный, 2005). В данной статье выведена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Используются стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Вопросы из спектральной теории, как построение функций Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стержней пока еще мало изучены.

2 Обзор литературы

Отметим новые результаты в области спектральной теорий задачи Штурма-Лиувилля для дифференциальных операторов на сетевых многообразиях (Герасименко, 1988), (Покорный, 2004), (Покорный, 2005). Только недавно начали интенсивно изучаться обратные задачи (Jorge, 2012), (Kurasov, 2002), (Юрко, 2006), (Astudillo, 2015), (Post, 2012), векторные задачи (Покорный, 2005) на геометрических графах. В основном во всех упомянутых работах структурные особенности графа на узлах не учитывались.

3 Материалы и методы

Более подробно остановимся на результатах, касающиеся функции Грина для дифференциальных операторов второго порядка на многообразиях типа сети. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. В данной работе для полного описания и решения задачи Дирихле для дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде использован синтетический подход.

3.1 Определение дифференциального оператора на графе-звезде

Пусть задан граф-звезда $\Im = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$, где $\mathcal{V}$ множество вершин графа, $\mathcal{E}$ - множество его дуг (Harary, 1969). Ориентированный граф считается звездой, если к одной общей вершине, называемой внутренней, примыкают все остальные дуги. Вершины, у которых отсутствуют входящие дуги назовем граничными вершинами. Сначала, от 1 до m пронумеруем граничные вершины. Присвоим внутренней вершине номер 0. Дугу, оканчивающуюся на вершине j, обозначим через e_j. Введем параметризацию таким образом, длину каждой дуги считаем равной π, $0 \leq x_j \leq \pi$, где $x_j \in e_j \in \mathcal{E}$, внутренней вершине соответствует $x_j = 0$, внешним $x_j = \pi$. Функцию $y(x)$ определенную на дуге e_j обозначим через $y_j(x_j), x_j \in e_j$.

В дальнейшем полезно ввести пространство

$$L_2(\Im) \doteqdot \prod_{e\in\mathcal{E}} L_2(e)$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{X}) \doteqdot [y_e(x_e), e \in \mathcal{E}]^T$$

(где $\vec{X} = (x_e, e \in \mathcal{E})$ и $\prod_{e\in\mathcal{E}}$ – декартово произведение подпространств) и с конечной нормой

$$||\vec{Y}||_{L_2(\Im)} = \sqrt{\sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e |y_e(x_e)|^2 dx_e}.$$

Точно также стандартным образом вводится пространство

$$W_2^2(\Im) \doteqdot \prod_{e\in\mathcal{E}} W_2^2(e).$$

Введем множество функций $D(\Lambda) \subset W_2^2(\Im)$, элементы которых в каждой внутренней вершине удовлетворяют условиям Кирхгофа (Афанасьева, 2010)

$$\begin{cases} y_1(\pi) = y_j(\pi), \quad j = 2, \ldots, m, \\ \sum_{j=1}^m y_j'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В электрических сетях они выражают закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей - баланс напряжений и т.д.

В пространстве $L_2(\Im)$ рассмотрим дифференциальный оператор Λ, задаваемый линейными дифференциальными выражениями

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda^2 y_j(x_j) + f_j(x_j),\ e_j \in \mathcal{E},\ 0 < x_j < \pi, \tag{2}$$

$$j = 1, \ldots, m.$$

с областью определения $D(\Lambda)$. При этом $\{q_j(x_j), 0 < x_j < \pi\}$ - набор вещественных непрерывных функций, обычно называют потенциалами, λ -спектральный параметр, $\{f_j(x_j), 0 < x_j < \pi\}$ - плотность распределения внешней силы.

В данной работе конструктивно строится функция Грина задачи (1), (2) с условиями Дирихле в граничных вершинах

$$y_j(0) = \ldots = y_m(0) = 0. \tag{3}$$

3.2 Построение функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о существовании функции Грина для задачи Дирихле

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) + F(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{4}$$

$$u(0) = 0, u(\pi) = 0. \tag{5}$$

Под функцией Грина мы понимаем матричную функцию двух переменных $G(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$, при каждой $\vec{F}(\cdot)$ непрерывной на графе $\Im$ и заданную формулой

$$u(\vec{x}, \lambda) = \int_{\Im} G(\vec{x}, t, \lambda)\vec{F}(t)dt.$$

Лемма 1 *Решение задачи (4), (5) может быть представлено в виде*

$$u(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s_\pi(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt + \int_x^\pi \frac{s_\pi(t,\lambda)s_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt, \tag{6}$$

где $D(t,\lambda) = -s'_\pi(t,\lambda)s_0(t,\lambda) + s_\pi(t,\lambda)s'_0(t,\lambda)$ и функций $s_0(x,\lambda)$ и $s_\pi(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями однородной задачи Коши

$$-s''_0(x) + q(x)s_0(x) = \lambda s_0(x), \quad 0 < x < \pi, \quad s_0(0,\lambda) = 0, s'_0(0,\lambda) = 1,$$

$$-s''_\pi(x) + q(x)s_\pi(x) = \lambda s_\pi(x), \quad 0 < x < \pi, \quad s_\pi(\pi,\lambda) = 0, s'_\pi(\pi,\lambda) = 1.$$

Proof. Покажем, что правая часть выражения (6) является решением задачи (4), (5). Сначала вычислим первую производную

$$u'(x,\lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s'_\pi(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt + \int_x^\pi \frac{s_\pi(t,\lambda)s'_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt +$$
$$+ \frac{s_0(x,\lambda)s_\pi(x,\lambda)}{D(x,\lambda)}\vec{F}(x) - \frac{s_0(x,\lambda)s_\pi(x,\lambda)}{D(x,\lambda)}\vec{F}(x),$$

отсюда следует

$$u'(x,\lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s'_\pi(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt + \int_x^\pi \frac{s_\pi(t,\lambda)s'_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt.$$

Теперь вычислим вторую производную

$$u''(x,\lambda)=\int\limits_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s''_\pi(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt+\int\limits_x^\pi \frac{s_\pi(t,\lambda)s''_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt+$$
$$+\frac{s_0(x,\lambda)s'_\pi(x,\lambda)}{D(x,\lambda)}\vec{F}(x)-\frac{s_0(x,\lambda)s'_\pi(x,\lambda)}{D(x,\lambda)}\vec{F}(x)$$

или

$$u''(x,\lambda)=\int\limits_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s''_\pi(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt+\int\limits_x^\pi \frac{s_\pi(t,\lambda)s''_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt-\vec{F}(x).$$

Так как $s''_0(x,\lambda)=(q(x)-\lambda)s_0(x,\lambda), s''_\pi(x,\lambda)=(q(x)-\lambda)s_\pi(x,\lambda)$, тогда с учетом (6), получим

$$u''(x,\lambda)=(q(x)-\lambda)\left(\int\limits_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s_\pi(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt+\int\limits_x^\pi \frac{s_\pi(t,\lambda)s_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt\right)-$$
$$-\vec{F}(x)=(q(x)-\lambda)u(x,\lambda)-\vec{F}(x),$$

отсюда следует соотношение (4).

Теперь проверим выполнение граничных условий (5). Значение $x=0$ подставляя в (6), получим

$$u(0,\lambda)=\int\limits_0^\pi \frac{s_\pi(t,\lambda)s_0(0,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt=0,$$

так как $s_0(0,\lambda)=0$. Значение $x=\pi$ подставляя в (6), получим

$$u(\pi,\lambda)=\int\limits_0^\pi \frac{s_0(t,\lambda)s_\pi(\pi,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt=0,$$

так как $s_\pi(\pi,\lambda)=0$. Лемма 1 доказана. Из Леммы 1 следует следующая теорема.

Теорема 1 *Функция Грина задачи Дирихле (4), (5) имеет представление*

$$G_D(\vec{x},\vec{t},\lambda)=\begin{cases}\dfrac{s_0(t,\lambda)s_\pi(x,\lambda)}{D(t,\lambda)} & for \quad 0<t<x,\\ \dfrac{s_\pi(t,\lambda)s_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)} & for \quad x<t<\pi,\end{cases}$$

где $D(t,\lambda)=-s'_\pi(t,\lambda)s_0(t,\lambda)+s_\pi(t,\lambda)s'_0(t,\lambda), s_0(x,\lambda)$ *и* $s_\pi(x,\lambda)$ *из Леммы 1.*

Отсюда следует

$$D(t,\lambda)=\begin{vmatrix}s_\pi(t,\lambda) & s_0(t,\lambda)\\ s'_\pi(t,\lambda) & s'_0(t,\lambda)\end{vmatrix}.$$

Следовательно $\dfrac{d}{dt}D(t)=0$. Тогда

$$D(t,\lambda)=D(0,\lambda)=\begin{vmatrix}s_\pi(0,\lambda) & s_0(0,\lambda)\\ s'_\pi(0,\lambda) & s'_0(0,\lambda)\end{vmatrix}=s_\pi(0,\lambda)=-s_0(\pi,\lambda).$$

3.3 Функция Грина задачи (1), (2), (3)

В данном пункте вычислим решение $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_m(x_m), 0 < x_j < \pi, j = 1, \dots, m$ задачи (1), (2), (3) для любой правой части $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_m(x_m)$ уравнения (2).

Сначала рассмотрим частный случай, когда $f_1(x_1) \neq 0$ и $f_2(x_2) = \dots = f_m(x_m) = 0$. По набору функций $f_1(x_1), f_2(x_2) \equiv 0, \dots, f_m(x_m) \equiv 0$ находим решение $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_m(x_m)$. Пусть e_j- j-ая дуга графа $\Im$. На дугах e_j вводим функций $s_{0j}(x_j, \lambda), s_{0\pi}(x_j, \lambda)$, которые являются линейно независимыми решениями однородной задачи Коши

$$
\begin{aligned}
&-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j),\\
&\ \ s_{0j}(0) = 0, s_{0\pi}'(0) = 1,\\
&\ \ s_{\pi j}(\pi) = 0, s_{\pi j}'(\pi) = 1.
\end{aligned}
$$

Вводим решение задачи (1), (2), (3) в виде

$$
\begin{cases}
y_2(x_2, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda),\\
\dots \quad \dots \quad \dots\\
y_m(x_m, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda),\\
y_1(x_1, \lambda) = B_1 s_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) +\\
\qquad + \int\limits_0^{x_1} \dfrac{s_{01}(t, \lambda) s_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int\limits_{x_1}^{\pi} \dfrac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt,
\end{cases}
\tag{7}
$$

где $D_1(t, \lambda) = s_{01}'(t, \lambda) s_{\pi 1}(t, \lambda) - s_{\pi 1}'(t, \lambda) s_{01}(t, \lambda)$. Покажем, что функций заданные системой (7) удовлетворяют уравнениям (2), граничным условиям (3) и условиям

$$
y_1(\pi) = y_j(\pi), \quad j = 2, \dots, m. \tag{8}
$$

Сначала проверим выполнения граничных условий (3). Значения $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_m = 0$ подставляя в (7), получим

$$
\begin{cases}
y_2(0, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) = 0,\\
\dots \quad \dots \quad \dots\\
y_m(0, \lambda) = B_1 S_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(0, \lambda) = 0,\\
y_1(0, \lambda) = B_1 s_{01}(0, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(0, \lambda) + \int\limits_0^{\pi} \dfrac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s_{01}(0, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt = 0,
\end{cases}
$$

так как $s_{02}(0, \lambda) = 0$, $s_{0m}(0, \lambda) = 0$ и $s_{01}(0, \lambda) = 0$.

Теперь проверим выполнения условия (8). Значения $x_1 = \pi, x_2 = \pi, \dots, x_m = \pi$

подставляя в (7), получим

$$\begin{cases} y_2(\pi,\lambda) = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m(\pi,\lambda) = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda), \\ y_1(\pi,\lambda) = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)+ \\ \qquad\qquad +\int\limits_0^\pi \dfrac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}(\pi,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda), \end{cases} \tag{9}$$

так как $s_{\pi 1}(\pi,\lambda)=0$. Отсюда следует соотношение (8).

Теперь проверим выполнения уравнения (2). Сначала вычислим первую производную выражения (7).

$$\begin{cases} y_2'(x_2,\lambda) = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}'(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m'(x_m,\lambda) = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}'(x_m,\lambda), \\ y_1'(x_1,\lambda) = B_1 s_{01}'(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)+ \\ \qquad\qquad +\int\limits_0^{x_1} \dfrac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}'(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt + \int\limits_{x_1}^{\pi} \dfrac{s_{\pi 1}(t,\lambda)s_{01}'(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt. \end{cases}$$

Теперь вычислим вторую производную выражения (7).

$$\begin{cases} y_2''(x_2,\lambda) = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}''(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m''(x_m,\lambda) = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}''(x_m,\lambda), \\ y_1''(x_1,\lambda) = B_1 s_{01}''(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) + \int\limits_0^{x_1} \dfrac{s_{01}(t,\lambda)S_{\pi 1}''(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt+ \\ \qquad\qquad +\int\limits_{x_1}^{\pi} \dfrac{s_{\pi 1}(t,\lambda)s_{01}''(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt + \dfrac{s_{01}(x_1,\lambda)s_{\pi 1}'(x_1,\lambda)}{D_1(x_1,\lambda)} f_1(x_1)- \\ \qquad\quad -\dfrac{s_{\pi 1}(x_1,\lambda)s_{01}'(x_1,\lambda)}{D_1(x_1,\lambda)} f_1(x_1) = B_1 s_{01}''(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)+ \\ \qquad\qquad +\int\limits_0^{x_1} \dfrac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}''(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt + \int\limits_{x_1}^{\pi} \dfrac{s_{\pi 1}(t,\lambda)s_{01}''(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt - f_1(x_1). \end{cases}$$

Так как $s_{0j}''(x_j,\lambda) = (q_j(x_j)-\lambda)s_{0j}(x_j,\lambda), s_{\pi j}''(x_j,\lambda) = (q_j(x_j)-\lambda)s_{\pi j}(x_j,\lambda), \quad j=1,\dots,m,$

тогда

$$
\begin{cases}
y_2''(x_2,\lambda) = (q_2(x_2)-\lambda)B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) = \\
\qquad\qquad = (q_2(x_2)-\lambda)y_2(x_2,\lambda), \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
y_m''(x_m,\lambda) = (q_m(x_m)-\lambda)B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(x_m,\lambda) = \\
\qquad\qquad = (q_m(x_m)-\lambda)y_m(x_m,\lambda), \\
y_1''(x_1,\lambda) = (q_1(x_1)-\lambda)B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) + \\
\qquad\qquad +(q_1(x_1)-\lambda)\left[\int\limits_0^{x_1}\dfrac{s_{01}(t,\lambda)S_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt + \right. \\
\qquad\qquad \left. +\int\limits_{x_1}^{\pi}\dfrac{s_{\pi 1}(t,\lambda)s_{01}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt\right] - \\
\qquad\qquad -f_1(x_1) = (q_1(x_1)-\lambda)y_1(x_1,\lambda) - f_1(x_1).
\end{cases}
$$

Отсюда следует соотношение (2).

Теорема 2 *Если $f_1(x_1) \neq 0$ и $f_2(x_2) \equiv 0, \dots, f_m(x_m) \equiv 0$, то решение задачи Дирихле (1), (2), (3) может быть записано в виде*

$$
\begin{cases}
y_1(x_1,\lambda) = -\dfrac{s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^{\pi}\dfrac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt + \\
\qquad\qquad + \int\limits_0^{\pi}\dfrac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt + \int\limits_{x_1}^{\pi}\dfrac{s_{\pi 1}(t,\lambda)s_{01}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt, \\
y_2(x_2,\lambda) = -\dfrac{s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^{\pi}\dfrac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt, \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
y_m(x_m,\lambda) = -\dfrac{s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(x_m,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^{\pi}\dfrac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt,
\end{cases}
$$

где $\Delta(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} s_{01}(\pi,\lambda)\dots s_{0j-1}(\pi,\lambda)s_{0j}'(\pi,\lambda)s_{0j+1}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)$.

Proof. Согласно соотношениям (7), второе соотношение условии (1) примет следующий вид

$$
B_1\sum_{j=1}^{m} s_{01}(\pi,\lambda)\dots s_{0j-1}(\pi,\lambda)s_{0j}'(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) = -\int\limits_0^{\pi}\frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt. \tag{10}
$$

Рассмотрим сокращенную систему

$$
\begin{cases}
y_2(x_2,\lambda) = B_1 s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda), \\
-\int\limits_0^{\pi}\dfrac{S_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt = \\
\qquad\qquad = B_1\sum_{j=1}^{m} s_{01}(\pi,\lambda)\dots s_{0j-1}(\pi,\lambda)s_{0j}'(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda).
\end{cases} \tag{11}
$$

Отсюда следует

$$y_2(x_2,\lambda) = -\frac{s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi \frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt.$$

Аналогичным способом из уравнения (10) и (7) получим

$$y_m(x_m,\lambda) = -\frac{s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(x_m,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi \frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt.$$

Рассмотрим сокращенную систему

$$\begin{cases} y_1(x_1,\lambda) = B_1 s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) + \\ \qquad + \int\limits_0^{x_1} \frac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt + \int\limits_{x_1}^{\pi} \frac{s_{\pi 1}(t,\lambda)s_{01}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt, \\ B_1\Delta(\lambda) = -\int\limits_0^\pi \frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt. \end{cases} \tag{12}$$

Запишем систему решений в виде

$$\begin{cases} y_1(x_1,\lambda) = -\frac{s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi \frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt + \\ \qquad + \int\limits_0^{x_1} \frac{s_{01}(t,\lambda)s_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt + \int\limits_{x_1}^{\pi} \frac{s_{\pi 1}(t,\lambda)s_{01}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt, \\ y_2(x_2,\lambda) = -\frac{s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi \frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m(x_m,\lambda) = -\frac{s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(x_m,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi \frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt. \end{cases} \tag{13}$$

Отсюда следует, что для произвольного f_1 и для $f_2 \equiv f_3 \equiv \dots f_k \equiv 0$ решение задачи (1), (2), (3) задается формулой (13).

Теорема 3 *Для произвольных $f_1(x_1),\dots,f_m(x_m)$ функция Грина задачи Дирихле (1), (2) и (3) имеет представление*

$$G_{\Im}(\vec{x},t,\lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) \\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) \\ \vdots \\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(x_m,\lambda) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left[\frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)},\dots,\frac{s_{0m}(t,\lambda)}{D_m(t,\lambda)}\right] +$$

$$+diag\left\{G_{D1}(x_1,t,\lambda), G_{D2}(x_2,t,\lambda),\dots,G_{Dm}(x_m,t,\lambda)\right\},$$

здесь

$$G_{Dj}(x_j,t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{s_{0j}(t,\lambda)s_{\pi j}(x_j,\lambda)}{D_j(t,\lambda)} & when \quad 0<t<x_j,\\ \dfrac{s_{\pi j}(t,\lambda)s_{0j}(x_j,\lambda)}{D_j(t,\lambda)} & when \quad x_j<t<\pi, \quad j=1,\ldots,m.\end{cases}$$

Proof. Соотношение (13) запишем в матричном виде

$$\vec{Y}_1(\vec{X})=\begin{bmatrix} y_1^{(1)}(x_1,\lambda)\\ y_2^{(1)}(x_2,\lambda)\\ \ldots\\ y_m^{(1)}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi\begin{bmatrix} s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\ldots s_{0m}(\pi,\lambda)\\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\ldots s_{0m}(\pi,\lambda)\\ \vdots\\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\ldots s_{0m}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\times$$

$$\times\frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)}f_1(t)dt+\int\limits_0^\pi\begin{bmatrix} G_{D1}(x_1,t,\lambda)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}f_1(t)dt,$$

если $f_2(x_2)\equiv\ldots f_m(x_m)\equiv 0$.

Проводя аналогичные рассуждения вычислим решение $\vec{Y}_2(\vec{X})$ задачи (1), (2), (3) для произвольного $f_2\neq 0$ и для $f_1\equiv f_3\equiv\ldots f_k\equiv 0$

$$\vec{Y}_2(\vec{X})=\begin{bmatrix} y_1^{(2)}(x_1,\lambda)\\ y_2^{(2)}(x_2,\lambda)\\ \ldots\\ y_m^{(2)}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi\begin{bmatrix} s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\ldots s_{0m}(\pi,\lambda)\\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\ldots s_{0m}(\pi,\lambda)\\ \vdots\\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\ldots s_{0m}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\times$$

$$\times\frac{s_{02}(t,\lambda)}{D_2(t,\lambda)}f_2(t)dt+\int\limits_0^\pi\begin{bmatrix} 0\\ G_{D2}(x_2,t,\lambda)\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}f_1(t)dt$$

и т.д. решение $\vec{Y}_m(\vec{X})$ для произвольного $f_m\neq 0$ и для $f_1\equiv f_2\equiv\ldots f_{m-1}\equiv 0$

$$\vec{Y}_m(\vec{X})=\begin{bmatrix} y_1^{(m)}(x_1,\lambda)\\ y_2^{(m)}(x_2,\lambda)\\ \ldots\\ y_m^{(m)}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi\begin{bmatrix} s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\ldots s_{0m}(\pi,\lambda)\\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\ldots s_{0m}(\pi,\lambda)\\ \vdots\\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\ldots s_{0m}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\times$$

$$\times\frac{s_{0m}(t,\lambda)}{D_m(t,\lambda)}f_m(t)dt+\int\limits_0^\pi\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ G_{Dm}(x_m,t,\lambda)\end{bmatrix}f_m(t)dt.$$

Тогда для произвольных $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$ решение задачи (1), (2), (3) может быть представлена в виде

$$\vec{Y}(\vec{X}) = \vec{Y}_1(\vec{X}) + \vec{Y}_2(\vec{X}) + \cdots + \vec{Y}_m(\vec{X}) =$$

$$-\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \begin{bmatrix} s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) \\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)\dots s_{0m}(\pi,\lambda) \\ \vdots \\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\dots s_{0m}(x_m,\lambda) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left[\frac{s_{01}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t) + \cdots + \frac{s_{0m}(t,\lambda)}{D_m(t,\lambda)} f_m(t)\right] dt +$$

$$+ \int_0^\pi diag\left\{G_{D1}(x_1,t,\lambda), G_{D2}(x_2,t,\lambda), \dots, G_{Dm}(x_m,t,\lambda)\right\} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} dt.$$

Теорема доказана.

Следствие 1 *Функция Грина задачи Дирихле (1), (2), (3) имеет представление*

$$G_{\Im}(x_1,x_2,\dots,x_m,t_1,t_2,\dots,t_m,\lambda) = diag\{G_{D1}(x_1,t_1,\lambda),\dots,G_{Dm}(x_m,t_m,\lambda)\} +$$

$$+ \frac{s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\cdots s_{0m}(\pi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} \frac{s_{01}(x_1,\lambda)}{s_{01}(\pi,\lambda)} \\ \vdots \\ \frac{s_{0m}(x_m,\lambda)}{s_{0m}(\pi,\lambda)} \end{bmatrix} \left[\frac{s_{01}(t_1,\lambda)}{s_{01}(\pi,\lambda)}, \dots, \frac{s_{0m}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(\pi,\lambda)}\right].$$

Здесь $s_{aj}(x_j,\lambda)$ линейно независимые решения однородного уравнения

$$-y_j''(x_j) + q_j(x)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad x_j \in (o,\pi), \qquad j = \overline{1,m} \tag{14}$$

с условиями Коши при $x_j = 0$ и $x_j = \pi$

$$s_{0j}(0,\lambda) = 0, \qquad s_{0j}'(0,\lambda) = 1, \tag{15}$$

$$s_{\pi j}(\pi,\lambda) = 0, \qquad s_{\pi j}'(\pi,\lambda) = 1. \tag{16}$$

Заметим, что

$$\Delta(\lambda) = \frac{d}{dt}\left(s_{01}(t,\lambda)\cdots s_{0m}(t,\lambda)\right)|_{t=\pi}.$$

3.4 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о разложении в ряд Фурье функции Грина задачи (1), (2), (3) по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

Теорема 4 *(Наймарк, 1969:90) Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.*

Докажем следующий промежуточный результат.

Лемма 2 *Оператор, соответствующий краевой задаче (1), (2), (3) является самосопряженным, т.е. функция Грина* $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$ *есть симметризируемое ядро в пространстве* $L_2(\Im)$

$$G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)=G^T_{\Im}(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_m,\lambda). \tag{17}$$

Proof. Преобразуем функцию Грина задачи (1), (2), (3) в представлении из следствия 1 следующим образом

$$G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)=diag\{G_{D1}(x_1,t_1,\lambda),\ldots,G_{Dm}(x_m,t_m,\lambda)\}+$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\cdots s_{0m}(\pi,\lambda)\\ \vdots \\ s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\cdots s_{0m}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\left[\frac{s_{01}(t_1,\lambda)}{s_{01}(\pi,\lambda)},\ldots,\frac{s_{0m}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(\pi,\lambda)}\right].$$

Отсюда имеем

$$G^T_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)=diag\{G_{D1}(x_1,t_1,\lambda),\ldots,G_{Dm}(x_m,t_m,\lambda)\}+$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} \frac{s_{01}(t_1,\lambda)}{s_{01}(\pi,\lambda)}\\ \vdots \\ \frac{s_{0m}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(\pi,\lambda)}\end{bmatrix}\left[s_{01}(x_1,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\cdots s_{0m}(\pi,\lambda),\ldots,s_{01}(\pi,\lambda)s_{02}(\pi,\lambda)\cdots s_{0m}(x_m,\lambda)\right].$$

Рассмотрим элементы матрицы $G^T_{\Im}$ с номером (k,j)

$$\frac{s_{0k}(t_k,\lambda)}{s_{0k}(\pi,\lambda)}s_{01}(\pi,\lambda)\cdots s_{0j-1}(\pi,\lambda)s_{0j}(x_j,\lambda)s_{0j+1}(\pi,\lambda)\cdots s_{0m}(\pi,\lambda) \tag{18}$$

и сравним его с элементом матрицы $G_{\Im}$ с номером (k,j)

$$s_{01}(\pi,\lambda)\cdots s_{0k-1}(\pi,\lambda)s_{0k}(x_k,\lambda)s_{0k+1}(\pi,\lambda)\cdots s_{0m}(\pi,\lambda)\frac{s_{0j}(t_j,\lambda)}{s_{0j}(\pi,\lambda)}. \tag{19}$$

Если в выражении (18) переменную t_k заменить на x_k и переменную x_j заменить на t_j, то выражение (18) совпадает со значением (19). Таким образом доказано, что

$$G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)=G^T_{\Im}(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_m,\lambda).$$

Лемма доказана.

Таким образом, если функция Грина $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$ является эрмитовым (т.е. симметризируемым) ядром, то на основании теоремы Гильберта-Шмидта из теории интегральных уравнении (Петровский, 1948) произвольную функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$.

Пусть $q_1(x)\equiv\ldots\equiv q_m(x)\equiv q(x), 0<x<\pi$. Тогда $s_{a1}(x,\lambda)\equiv\ldots\equiv s_{a1}(x,\lambda)\equiv s_a(x,\lambda)$ при $0\le a\le\pi$ имеем

$$G_{D,j}(x_j,t_j,\lambda)=\begin{cases}\frac{s_0(t_j,\lambda)s_\pi(x_j,\lambda)}{-s_0(\pi,\lambda)} & \text{for } t_j\le x_j,\\ \frac{s_\pi(t_j,\lambda)s_0(x_j,\lambda)}{-s_0(\pi,\lambda)} & \text{for } x_j<t_j,\quad j=1,\ldots,m,\end{cases}$$

где

$$\Delta(\lambda) = \frac{d}{dt}\left(s_{01}(t,\lambda)\right)^m = m s_0^{m-1}(\pi,\lambda) s_0'(\pi,\lambda). \tag{20}$$

Покажем, что функция Грина задачи (1), (2), (3) является самосопряженной. Тогда функция Грина рассматриваемой задачи имеет представление

$$G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda) = diag\{G_{D1}(x_1,t_1,\lambda),\ldots,G_{Dm}(x_m,t_m,\lambda)\}+ \tag{21}$$
$$+\frac{1}{m s_0'(\pi,\lambda) s_0(\pi,\lambda)}\begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda)\\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\left[s_0(t_1,\lambda),\ldots,s_0(t_m,\lambda)\right].$$

Пусть λ_0 является нулем функции $s_0(\pi,\lambda)$ кратности k_0, то есть

$$s_0(\pi,\lambda_0) = \ldots = \frac{d^{k_0-1}}{d\lambda_0^{k_0-1}} s_0(\pi,\lambda_0) = 0, \frac{d^{k_0}}{d\lambda_0^{k_0}} s_0(\pi,\lambda_0) \neq 0.$$

Ясно, что $s_0'(\pi,\lambda_0)\neq 0$.

Вычислим вычет матрицы

$$res_{\lambda_0} G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda) = res_{\lambda_0} diag\left\{G_{D1}(x_1,t_1,\lambda),\ldots,G_{Dm}(x_m,t_m,\lambda)\right\}+ \tag{22}$$
$$+\frac{1}{m} res_{\lambda_0}\frac{1}{s_0'(\pi,\lambda) s_0(\pi,\lambda)}\begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda)\\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\left[s_0(t_1,\lambda),\ldots,s_0(t_m,\lambda)\right].$$

Для вычисления вычета матрицы $G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)$ в точке λ_0 применяем формулу

$$res_{\lambda_0} G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda) = \frac{1}{(k_0-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{d^{k_0-1}}{d\lambda_0^{k_0-1}}\left[(\lambda-\lambda_0)^{k_0} G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)\right].$$

Таким образом, надо вычислить (k_0-1)-ый коэффициент Тейлора функций $(\lambda-\lambda_0)^{k_0} G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$ при разложении её в окрестности точки $\lambda=\lambda_0$. С учетом формулы представления (21) матрицы $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$, для нахождения вычета матрицы $res_{\lambda_0} G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$ в точке $\lambda=\lambda_0$ сначала нам необходимо вычислить вычеты $res_{\lambda_0} G_{Dj}(x_j,t_j,\lambda)$ и $res_{\lambda_0}\frac{s_0(t_j,\lambda)s_0(x_j,\lambda)}{s_0'(\pi,\lambda)s_0(\pi,\lambda)}$. Здесь $res_{\lambda_0} G_{Dj}(x_j,t_j,\lambda) = \frac{s_0(t_j,\lambda)s_\pi(x_j,\lambda)}{-s_0(\pi,\lambda)}$ при $t_j\le x_j$.

С учетом формулы (22) для матрицы $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$, находим сначала коэффициент Тейлора произведения функций $(\lambda-\lambda_0)^{k_0}\frac{s_0(t_j,\lambda)s_\pi(x_j,\lambda)}{-s_0(\pi,\lambda)}$ при разложении её в окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ при $t_j\le x_j$. Поэтому разложим каждую функцию произведения $(\lambda-\lambda_0)^{k_0}\frac{s_0(t_j,\lambda)s_\pi(x_j,\lambda)}{-s_0(\pi,\lambda)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ при $t_j\le x_j$

$$s_0(t_j,\lambda) = s_0(t_j,\lambda_0) + \frac{1}{1!}\frac{ds_0(t_j,\lambda_0)}{d\lambda}(\lambda-\lambda_0) + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{d^k s_0(t_j,\lambda_0)}{d\lambda^k}(\lambda-\lambda_0)^k + \ldots \tag{23}$$

и

$$s_\pi(x_j,\lambda)=s_\pi(x_j,\lambda_0)+\frac{1}{1!}\frac{ds_\pi(x_j,\lambda_0)}{d\lambda}(\lambda-\lambda_0)+\ldots+\frac{1}{k!}\frac{d^k s_\pi(x_j,\lambda_0)}{d\lambda^k}(\lambda-\lambda_0)^k+\ldots. \quad (24)$$

Так как λ_0 является нулем функции $s_0(\pi,\lambda)$ кратности k_0, имеем

$$\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{s_0(\pi,\lambda)}=\frac{1}{\frac{1}{k_0!}\frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}}s_0(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}+\frac{1}{(k_0+1)!}\frac{d^{k_0+1}}{d\lambda^{k_0+1}}s_0(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}+\ldots}$$

$$=\left(\frac{1}{k_0!}\frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}}s_0(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}+\frac{1}{(k_0+1)!}\frac{d^{k_0+1}}{d\lambda^{k_0+1}}s_0(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}+\ldots\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{k_0!}\frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}}s_0(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}c_j^{(0)}(\lambda-\lambda_0)^j\right)^{-1},$$

где

$$c_j^{(0)}=\frac{\frac{1}{(k_0+1)!}\frac{d^{k_0+1}}{d\lambda^{k_0+1}}s_0(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}}{\frac{1}{k_0!}\frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}}s_0(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}}.$$

Применяя известную формулу суммы $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots$ для последнего выражения получим

$$\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{s_0(\pi,\lambda)}=\frac{1}{\frac{1}{k_0!}\frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}}s_0(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}}\left(1+\alpha_1^{(0)}(\lambda-\lambda_0)+\alpha_2^{(0)}(\lambda-\lambda_0)^2+\ldots\right),$$

где $\alpha_1^{(0)}=-c_1^{(0)},\alpha_2^{(0)}=-c_2^{(0)}+\left(c_1^{(0)}\right)^2$, и т.д.

Таким образом, получили разложение в ряд Тейлора функции

$$\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{s_0(\pi,\lambda)}=\beta_0+\beta_1(\lambda-\lambda_0)+\beta_2(\lambda-\lambda_0)^2+\ldots, \quad (25)$$

где

$$\beta_j=\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\lambda^j}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{s_0(\pi,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Тогда находим вычет произведения

$$res_{\lambda_0}\left(\frac{s_0(t_j,\lambda)s_\pi(x_j,\lambda)}{-s_0(\pi,\lambda)}\right)=$$

$$=\frac{1}{(k_0-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{d^{(k_0-1)}}{d\lambda^{(k_0-1)}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}s_0(t_j,\lambda)s_\pi(x_j,\lambda)}{-s_0(\pi,\lambda)}\right].$$

Подставляя в последнее выражение формулы разложения (23), (24), (25) и после несложных вычислении, получим

$$res_{\lambda_0}\left(\frac{s_0(t_j,\lambda)s_\pi(x_j,\lambda)}{-s_0(\pi,\lambda)}\right)=\sum_{i_1=0}^{k_0-1}\frac{1}{i_1!}\frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}}s_\pi(x_j,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\times \quad (26)$$

$$\times\sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1}\frac{1}{i_2!}\frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}}s_0(t_j,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2}\frac{1}{i_3!}\frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{s_0(\pi,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)^{i_3}.$$

Теперь запишем выражение для вычета

$$res_{\lambda_0}\left(\frac{s_0(t_r,\lambda)s_0(x_p,\lambda)}{ms_0'(\pi,\lambda)s_0(\pi,\lambda)}\right)= \tag{27}$$

$$=\frac{1}{m}\frac{1}{(k_0-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{d^{(k_0-1)}}{d\lambda^{(k_0-1)}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}s_0(t_r,\lambda)s_0(x_p,\lambda)}{s_0'(\pi,\lambda)s_0(\pi,\lambda)}\right]=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{i_1=0}^{k_0-1}\frac{1}{i_1!}\frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}}s_0(x_p,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1}\frac{1}{i_2!}\frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}}s_0(t_r,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\times$$

$$\times\sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2}\frac{1}{i_3!}\frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}}\left[\frac{1}{s_0'(\pi,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_4=0}^{k_0-1-i_1-i_2}\frac{1}{i_4!}\frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_4}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{s_0(\pi,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)^{i_4}.$$

Тогда получим формулу вычисления вычета матрицы $G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)$ в точке $\lambda=\lambda_0$

$$res_{\lambda_0}G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)= \tag{28}$$

$$=\sum_{i_1=0}^{k_0-1}\frac{1}{i_1!}\frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}}s_\pi(x_j,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1}\frac{1}{i_2!}\frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}}s_0(t_j,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\times$$

$$\times\sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2}\frac{1}{i_3!}\frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k}}{s_0(\pi,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)^{i_3}+$$

$$+\frac{1}{m}\frac{1}{(k_0-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{d^{(k_0-1)}}{d\lambda^{(k_0-1)}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}s_0(t_r,\lambda)s_0(x_p,\lambda)}{s_0'(\pi,\lambda)s_0(\pi,\lambda)}\right]+$$

$$+\frac{1}{m}\sum_{i_1=0}^{k_0-1}\frac{1}{i_1!}\frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}}s_0(x_p,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1}\frac{1}{i_2!}\frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}}s_0(t_r,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\times$$

$$\times\sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2}\frac{1}{i_3!}\frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}}\left[\frac{1}{s_0'(\pi,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_4=0}^{k_0-1-i_1-i_2}\frac{1}{i_4!}\frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_4}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{s_0(\pi,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)^{i_4}.$$

В случае $k_0=1$ приведенная формула становятся простой. К примеру, при $t_j\le x_j$ имеем

$$res_{\lambda_0}G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)=diag\{\frac{s_0(t_1,\lambda_0)s_\pi(x_1,\lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)},\ldots,\frac{s_0(t_m,\lambda_0)s_\pi(x_m,\lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)}\}+$$

$$+\frac{1}{m}\frac{1}{s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)}\begin{bmatrix}s_0(x_1,\lambda_0)\\ \vdots\\ s_0(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}[s_0(t_1,\lambda_0),\ldots,s_0(t_m,\lambda_0)].$$

Здесь функций $\begin{bmatrix}s_0(x_1,\lambda_0)\\ \vdots\\ s_0(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}$ назовем основными функциями, соответствующие собственным значениям λ_0. Основные функций не являются собственными функциями, так как для них нарушается второе соотношение условии (1). Действительно, $s_0'(\pi, \lambda_0) + \ldots + s_0'(\pi, \lambda_0) \neq 0$.

До этого мы рассматривали нули функции $s_0(\pi, \lambda)$. Теперь рассмотрим полюсы функции $G_{\Im}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$. Пусть λ_1 является нулем функции $s_0'(\pi, \lambda)$ кратности k_1, то есть

$$s_0'(\pi, \lambda_1) = \ldots = \frac{d^{k_1-1}}{d\lambda_1^{k_1-1}} s_0'(\pi, \lambda_1) = 0, \frac{d^{k_1}}{d\lambda_1^{k_1}} s_0'(\pi, \lambda_1) \neq 0.$$

Ясно, что $s_0(\pi, \lambda_0) \neq 0$. Полюса функции $G_{\Im}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ являются нулями функции $s_0'(\pi, \lambda)$.

Применяя аналогичные рассуждения при вычислении вычета функций $G_{\Im}(x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_m, \lambda)$ в точке λ_0, вычислим вычет функций $G_{\Im}(x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_m, \lambda)$ в точке λ_1. Для этого применяем формулы (28). Очевидно, что

$$res_{\lambda_1} diag\{G_{D1}(x_1, t_1, \lambda), \ldots, G_{Dm}(x_m, t_m, \lambda)\} = 0.$$

Остается вычислить вычеты в нулях функции $s_0'(\pi, \lambda)$

$$res_{\lambda_1} G_{\Im}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda) = \frac{1}{m s_0(\pi, \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1} s_0'(\pi, \lambda_1)} \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{bmatrix} [s_0(t_1, \lambda_1), \ldots, s_0(t_m, \lambda_1)].$$

Здесь функций $\begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{bmatrix}$ являются собственными функциями, соответствующие собственным значениям λ_1. Действительно, для них выполняется второе соотношение условии (1).

Следовательно, по теоремам 1 и 2 (Наймарк, 1969:92) следует разложение функции Грина

$$G_{\Im}(\vec{x}, \vec{t}) = \sum_{\lambda_0 : s_0(\pi, \lambda_0) = 0} \frac{res_{\lambda_0} G_{\Im}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)}{\lambda_0} + \sum_{\lambda_1 : s_0'(\pi, \lambda_1) = 0} \frac{res_{\lambda_1} G_{\Im}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)}{\lambda_1}.$$

Здесь первое суммирование производится по всем λ_0, которые подчинены условию $s_0(\pi, \lambda_0) = 0$. Аналогичный смысл имеет вторая сумма.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3 *Если все собственные значения оператора Λ, порожденного условиями Кирхгофа (1) и краевыми условиями (3), суть простые нули функции $s_0(\pi, \lambda) s_0'(\pi, \lambda)$,* *то для функции Грина имеет место разложение*

$$G_{\Im}(\vec{x},\vec{t}) =$$
$$= \sum_{\lambda_0:s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{\lambda_0} diag\{\frac{s_0(t_1,\lambda_0)s_\pi(x_1,\lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)},\ldots,\frac{s_0(t_m,\lambda_0)s_\pi(x_m,\lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)}\}+$$
$$+\sum_{\lambda_0:s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{\lambda_0 m s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)} \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} [s_0(t_1,\lambda_0),\ldots,s_0(t_m,\lambda_0)]+$$
$$+\sum_{\lambda_1:s_0'(\pi,\lambda_1)=0} \frac{1}{\lambda_1 m s_0(\pi,\lambda_1)\frac{d}{d\lambda_1}s_0'(\pi,\lambda_1)} \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_1) \end{bmatrix} [s_0(t_1,\lambda_1),\ldots,s_0(t_m,\lambda_1)].$$

Теорема 5 *Пусть Λ оператор, порожденный условиями Кирхгофа (1) и краевыми условиями (3), все собственные значения которого суть простые нули функции $s_0(\pi,\lambda)s_0'(\pi,\lambda)$. Тогда всякая вектор-функция $\vec{F}(\vec{X})$ из области определения $L_2(\Im)$ оператора Λ разлагается в ряд*

$$\vec{F}(\vec{X}) = \tag{29}$$
$$= -\sum_{\lambda_0:s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)} \begin{bmatrix} \int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 s_0(x_1,\lambda_0) \\ \vdots \\ \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix}+$$
$$+\sum_{\lambda_0:s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{m s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)} \left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1+\right.$$
$$\left.\ldots+\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right] \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix}+$$
$$+\sum_{\lambda_1:s_0'(\pi,\lambda_1)=0} \frac{1}{m s_0(\pi,\lambda_1)\frac{d}{d\lambda_1}s_0'(\pi,\lambda_1)} \left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_1)dt_1+\right.$$
$$\left.\ldots+\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_1)dt_m\right] \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_1) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix}$- *основные функции, соответствующие собственным значениям* λ_0, $\frac{1}{m s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)}\left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1+\ldots+\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right]$ – *коэффициенты Фурье разложения по основным функциям, соответствующие собственным значениям* λ_0, $\begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_1) \end{bmatrix}$ –

собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_1, $\frac{1}{\lambda_1 m s_0'(\pi,\lambda_1)\frac{d}{d\lambda_1}s_0(\pi,\lambda_1)}\left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_1)dt_1+\ldots+\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_1)dt_m\right]-$ *коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям* λ_1.

Приведенное в теореме 1 разложение мы назовем вычетным разложением. Однако обычно используется спектральное разложение, то есть разложение по собственным функциям. Покажем как из вычетного разложения получить спектральное разложение.

3.5 Спектральное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле

λ_1- собственное число оператора Λ, а λ_0 не является таковым. Как λ_0 превратить в собственное число оператора Λ?

Сначала покажем, что

$$s_\pi(0,\lambda_0)=0. \tag{30}$$

Нам известно из (15) и (16), что $s_0(0,\lambda_0)=0$ и $s_0(\pi,\lambda_0)=0$. Это означает, что $\lambda=\lambda_0$ является собственным значением задачи Дирихле. Задачу Дирихле можно получить и так $s_\pi(\pi,\lambda)=0$ и $s_\pi(0,\lambda)=0$ для любого λ. Отсюда следует (30).

Разложение (29) представим в виде суммы

$$\vec{F}(\vec{X})=\vec{F_1}(\vec{X})+\vec{F_2}(\vec{X}), \tag{31}$$

где

$$\vec{F_1}(\vec{X})= \tag{32}$$

$$=-\sum_{\lambda_0:s_0(\pi,\lambda_0)=0}\frac{1}{s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)}\begin{bmatrix}\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 s_0(x_1,\lambda_0)\\ \vdots\\ \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m s_0(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda_0:s_0(\pi,\lambda_0)=0}\frac{1}{m s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)}\left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1+\right.$$

$$\left.\ldots+\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right]\begin{bmatrix}s_0(x_1,\lambda_0)\\ \vdots\\ s_0(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}-$$

разложение по основным функциям и

$$\vec{F_2}(\vec{X})= \tag{33}$$

$$+\sum_{\lambda_1:s_0'(\pi,\lambda_1)=0}\frac{1}{m s_0(\pi,\lambda_1)\frac{d}{d\lambda_1}s_0'(\pi,\lambda_1)}\left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_1)dt_1+\right.$$

$$\left.\ldots+\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_1)dt_m\right]\begin{bmatrix}s_0(x_1,\lambda_1)\\ \vdots\\ s_0(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}-$$

разложение по собственным функциям.

Теперь преобразуем (32) следующим образом

$$\vec{F}_1(\vec{X}) =$$

$$= \sum_{\lambda_0 : s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{ms_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)} \begin{bmatrix} -ms_0(x_1,\lambda_0)\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 \\ -ms_0(x_2,\lambda_0)\int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 \\ \vdots \\ -ms_0(x_m,\lambda_0)\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{\lambda_0 : s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{ms_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0)\left(\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots + \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right) \\ s_0(x_2,\lambda_0)\left(\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots + \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0)\left(\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots + \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right) \end{bmatrix}.$$

Складывая две суммы, получаем

$$\vec{F}_1(\vec{X}) =$$

$$= \sum_{\lambda_0 : s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{ms_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0)\left[(1-m)\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots\right. \\ s_0(x_2,\lambda_0)\left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 + (1-m)\int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots\right. \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0)\left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots\right. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left.\ldots + \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right] \\ \left.\ldots + \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right] \\ \vdots \\ \left.\ldots + (1-m)\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right] \end{bmatrix}.$$

Последнее выражение запишем в виде

$$\vec{F}_1(\vec{X}) = \tag{34}$$

$$= \sum_{\lambda_0 : s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{m s_0'(\pi,\lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi,\lambda_0)} \times$$

$$\times \left\{ \begin{bmatrix} (1-m)s_0(x_1,\lambda_0) \\ s_0(x_2,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1,\lambda_0) dt_1 + \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0) \\ (1-m)s_0(x_2,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2,\lambda_0) dt_2 + \ldots +$$

$$\left. + \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0) \\ s_0(x_2,\lambda_0) \\ \vdots \\ (1-m)s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m,\lambda_0) dt_m \right\}.$$

Для краткости вводим следующие обозначения

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} (1-m)s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ s_0^m \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} s_0^1 \\ (1-m)s_0^2 \\ \vdots \\ s_0^m \end{bmatrix}, \ \ldots, \vec{e}_m = \begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ (1-m)s_0^m \end{bmatrix}, \tag{35}$$

где $s_0^1 = s_0(x_1,\lambda_0)$, $s_0^2 = s_0(x_2,\lambda_0)$, $\ldots$, $s_0^m = s_0(x_m,\lambda_0)$.

Так как

$$\begin{vmatrix} (1-m)s_0^1 & s_0^1 & \ldots & s_0^1 \\ s_0^2 & (1-m)s_0^2 & \ldots & s_0^2 \\ \vdots & & & \\ s_0^m & s_0^m & \ldots & (1-m)s_0^m \end{vmatrix} = 0,$$

то система векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_m$ является линейно зависимой. Но векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_{m-1}$ образуют линейно независимую систему. Легко проверить, что вектор-функций $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_{m-1}$ удовлетворяют условиям (1) и (3). Отсюда следует, что они являются собственными функциями оператора Λ. А вектор-функция$\vec{e}_m$ выражается через них

$$-\vec{e}_m = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_{m-1},$$

или

$$-\begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ (1-m)s_0^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-m)s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ s_0^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_0^1 \\ (1-m)s_0^2 \\ \vdots \\ s_0^m \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ (1-m)s_0^{m-1} \\ s_0^m \end{bmatrix}. \tag{36}$$

С учетом (36), разложение (37) можно записать через собственные функций

$$\vec{F}_1(\vec{X}) = \tag{37}$$

$$= \sum_{\lambda_0: s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{m s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)} \times$$

$$\times \left\{ \begin{bmatrix} (1-m)s_0(x_1,\lambda_0) \\ s_0(x_2,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \left(\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 - \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m \right) + \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0) \\ (1-m)s_0(x_2,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \left(\int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 - \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m \right) + \ldots +$$

$$\left. + \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0) \\ \vdots \\ (1-m)s_0(x_{m-1},\lambda_0) \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \left(\int_0^\pi f_{m-1}(t_{m-1})s_0(t_{m-1},\lambda_0)dt_{m-1} - \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m \right) \right\}.$$

Таким образом, доказана теорема в которой представлено спектральное разложение произвольной вектор-функций из области определения дифференциального оператора заданного на графе-звезде с условиями Кирхгофа во внутренней вершине и с условиями Дирихле на вершинах графа.

Теорема 6 *Пусть Λ оператор, порожденный условиями Кирхгофа (1) и краевыми условиями (3), все собственные значения которого суть простые нули функции $s_0(\pi,\lambda)s_0'(\pi,\lambda)$. Тогда всякая вектор-функция $\vec{F}(\vec{X})$ из области определения $L_2(\Im)$ оператора Λ разлагается в ряд по собственным функциям оператора Λ*

$$\vec{F}(\vec{X}) = \tag{38}$$

$$= \sum_{\lambda_0: s_0(\pi,\lambda_0)=0} \frac{1}{m s_0'(\pi,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_0(\pi,\lambda_0)} \times$$

$$\times \left\{ \begin{bmatrix} (1-m)s_0(x_1,\lambda_0) \\ s_0(x_2,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \left(\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1 - \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m \right) + \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0) \\ (1-m)s_0(x_2,\lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \left(\int_0^\pi f_2(t_2)s_0(t_2,\lambda_0)dt_2 - \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m \right) + \ldots +$$

$$+\begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0)\\ \vdots \\ (1-m)s_0(x_{m-1},\lambda_0)\\ s_0(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}\left(\int_0^\pi f_{m-1}(t_{m-1})s_0(t_{m-1},\lambda_0)dt_{m-1}-\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right)\Bigg\}+$$

$$+\sum_{\lambda_1: s_0'(\pi,\lambda_1)=0}\frac{1}{ms_0(\pi,\lambda_1)\frac{d}{d\lambda_1}s_0'(\pi,\lambda_1)}\left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_1)dt_1+\right.$$

$$\left.\ldots+\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_1)dt_m\right]\begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_1)\\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{bmatrix} (1-m)s_0(x_1,\lambda_0)\\ s_0(x_2,\lambda_0)\\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_0)\\ \vdots \\ (1-m)s_0(x_{m-1},\lambda_0)\\ s_0(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}$$

\- *собственные функций, соответствующие собственным значениям* λ_0, $\left(\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1-\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right)$, $\ldots,\left(\int_0^\pi f_{m-1}(t_{m-1})s_0(t_{m-1},\lambda_0)dt_{m-1}-\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right)$ *коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям* λ_0, $\begin{bmatrix} s_0(x_1,\lambda_1)\\ \vdots \\ s_0(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}$ *– собственные функций, соответствующие собственным значениям* λ_1, $\frac{1}{ms_0(\pi,\lambda_1)\frac{d}{d\lambda_1}s_0'(\pi,\lambda_1)}\left[\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_1)dt_1+\ldots+\int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_1)dt_m\right]$ – *коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям* λ_1.

4 Результаты и обсуждение

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. В данной статье выведена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Значительную трудность представляет построение функции Грина на геометрических графах при значениях независимых переменных близких к вершинам графа. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Предлагается конструктивная схема построения функции Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. Доказывается самосопряженность дифференциального оператора, порожденного краевой задачей для уравнения Штурма-Лиувилля на графе-звезде. А также проводится спектральный анализ дифференциального оператора на графе. Установлено существование разложения всякой функций из области определения рассматриваемого дифференциального оператора на графе в ряд Фурье по собственным функциям данной краевой задачи.

5 Заключение

На плоском графе, состоящем из нескольких дуг с одним общим концом строится функция Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. Задача является моделью колебании простой системы из нескольких стержней с примыкающим концом. В работе выведена формула функции Грина задачи Дирихле для уравнения второго порядка на ориентированном графе. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стержней пока еще мало изучены. Спектральный анализ дифференциальных операторов на геометрических графах является основным математическим аппаратом при решении современных проблем квантовой механики.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (проект на тему «Конечномерные возмущения фредгольмовых операторов и их спектральный анализ», 2018-2020 гг.).

Список литературы

[1] *Афанасьева Н.А. и Булот Л.П.* Электротехника и электроника. Учебное пособие. - СПб.: СПбГУН и П.Т. -2010.-181 с.

[2] *Astudillo M. Kurasov P. and Usman M.* RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness// Adv. Math. Phys. -2015.

[3] *Герасименко Н. И. и Павлов Б. С.* Задача рассеяния на некомпактных графах // Теор. мат.физ. -1988. Т.74, №3. -С.345-359.

[4] *Carlson R.* Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc. -1999. -Vol.351. -P.101-121.

[5] *F. Harary* Graph theory // Addison-Wesley Publishing Company. -1969.-274 p.

[6] *Jorge M. Ramirez.* Green's Functions for Sturm-Liouville Problems on Directed Tree Graphs// Revista Colombiana de Matematicas. -2012. -Vol.46. -P.15-25.

[7] *Kurasov P. and Stenberg F.* On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A. Math. Gen. -2002. -Vol.20. -P.647-672.

[8] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы // М: Наука. -1969. -526 с.

[9] *Петровский И.Г.* Лекций по теории интегральных уравнений// М:ОГИЗ.-1948.-121 с.

[10] *Покорный Ю.В.* О спектре некоторых задач на графах // Успехи мат. науки. -1987. -Т.42, № 4. -С.128-129

[11] *Покорный Ю.В. и Пенкин О.М.* О краевой задаче на графе // Дифференциальные уравнения. -1988. -Т.24. -С.701-703

[12] *Покорный Ю.В., Приядиев В.Л. и Аль-Обейд А.* Об осциляционных свойствах спектра краевой задачи на графе // Матем. заметки. -1996. -Т.60, №3. -С.468-469.

[13] *Покорный Ю.В. и Приядиев В.Л.* Некоторые проблемы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственных сетях // Успехи мат. науки. -2004. -Т.59, №6. -С.115-150.

[14] *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Приядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. -М:ФИЗМАТЛИТ. 2005. -272 с.

[15] *Post O.* Spectral Analysis on Graph-Like Spaces // Springer Science and Business Media. -2012. -Vol. 2039.

[16] *Юрко В.А.* О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля на графах // Мат. заметки. -2006. -Т.79, №4. -С.619-630.

References

[1] Afanasieva, N.A., and Bulot, L.P. *Elektrotekhnika i elektronika* [Electrothechnics and electronics]. Sankt-Peterburg: SPbGUN and P.T., 2010. (in Russian)

[2] Astudillo, M., Kurasov, P. and Usman, M. "RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness."*Adv. Math. Phys. 2015.*

[3] Gerasimenko, N.I., and Pavlov, B.S. "Zadacha rasseiania na nekompaktnykh graphakh."[Scattering problem on a noncompact graphs] Teor. mat.phys. *47(1988):345-14. (in Russian)*

*[4] Carlson, R. "Inverse eigenvalue problems on directed graphs."*Trans. Amer. Math. Soc. 351(1999):101-20.

[5] Harary, F. *Graph theory.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[6] Jorge, M., Ramirez. "Green's Functions for Sturm-Liouville Problems on Directed Tree Graphs."*Revista Colombiana de Matematicas 46(2012):15-10.*

*[7] Kurasov, P., and Stenberg, F. "On the inverse scattering problem on branching graphs."*J. Phys. A. Math. Gen. 20(2002):647-25.

[8] Naimark, M.A. *Lineinye differentsialnye operatory.* [Linear differential operators] Moskow: Nauka, 1969. (in Russian)

[9] Petrovskii, I.G. *Лекций по теории интегральных уравнений* [Lectures on the theory of integral equations] Moskow:OGIZ, 1948. (in Russian)

[10] Pokornyi, Yu.V. "O spektre nekotorykh zadach na graphakh."[On the spectrum of certain problems on graphs] *Uspekhi mat.nawki* (42)1987:128-1. (in Russian)

[11] Pokornyi, Yu.V., and Penkin, O.M. "O kraevoi zadache na graphe."[On the boundary value problem on graphs] *Differentialnie uravnenia* 24(1988): 701-3. (in Russian)

[12] Pokornyi, Yu.V., Priadiev, V.L., and Al-Obeid, A. "Ob ostsiliatsionnykh svoistvakh spektra kraevoi zadachi na graphe."[On the ossulation properties of the spectrum of a boundary value problem on graphs] *Matematicheskie zametki* 60(1996):468-2. (in Russian)

[13] Pokornyi, Yu.V., and Priadiev, V.L. "Nekotorye problemy kachestvennoi teorrii Shturma-liuvillia na prostranstvennykh setiakh."[Some problems of the qualitative Sturm-Liouville theory on spatial networks] *Uspekhi mat.nauki* 59(2004):115-35. (in Russian)

[14] Pokornyi, Yu.V., Penkin, O.M., and Priadiev, V.L. *Differentsialnie uravnenia na geometricheskikh graphakh.* [On the ossulation properties of the spectrum of a boundary value problem on graphs. Differential equations on graphs] Moskow:Phizmatlit, 2005. (in Russian)

[15] Post, O. *Spectral Analysis on Graph-Like Spaces.* Springer Science and Business Media, 2039(2012).

[16] Yurko, V.A. "O vosstanovlenii operatorov Shturma-Liuvillia na graphakh."[On the reconstruction of Sturm-Liouville operators on graphs] *Mat. zametki* 79(2006):619-21. (in Russian)