

4-бөлім

Раздел 4

Section 4

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

МРНТИ 50.07.05; 27.35.14

Применение параллельных вычислительных технологий для моделирования процесса отрыва течения за обратным уступом в канале с учетом сил плавучести

Исахов А.А., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77056108050, E-mail: alibek.issakhov@gmail.com
Абылкасымова А. Б., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан
Сақыпбекова М., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан

В работе приводятся численные решения двумерного ламинарного течения за обратным уступом в канале с учетом сил плавучести. Для описания данного процесса используется двумерное несжимаемое уравнение Навье-Стокса. Данная система численно решается методом расщепления по физическим параметрам, который аппроксимируется с помощью метода контрольного объема. Полученное уравнение Пуассона, удовлетворяющее дискретному уравнению неразрывности, решается итерационным методом Якоби на каждом шаге по времени. Полученные численные решения ламинарного течения за обратным уступом сравниваются с численными результатами других авторов. Данный численный алгоритм полностью распараллеливается с помощью различных геометрических декомпозиций (1D, 2D и 3D). В работе были сделаны предварительный теоретический анализ эффективности различных методов декомпозиции расчетной области и реальные вычислительные эксперименты для данной задачи, и был определен лучший метод декомпозиции области. В дальнейшем проверенная математическая модель и численный алгоритм с лучшим методом декомпозиции можно будет применить для различных сложных течений с учетом сил плавучести.

Ключевые слова: метод декомпозиции области, обратный уступ, метод расщепления по физическим параметрам, разделение и воссоединение потоков, отрывное течение, силы плавучести.

Параллельді есептеулер технологиясын қолдану арқылы арнадағы артқы бөліктегі ағындарды бөлу процесін ауырлық күштерін ескере отырып процессті модельдеу

Исахов А.А., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77056108050, Электрондық пошта: alibek.issakhov@gmail.com
Абылкасымова А. Б., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы
Сақыпбекова М., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы

Жұмыста арнадағы артқы жағындағы артиллериялық ламинарлы ағынның ауырлық күштерін ескере отырып сандық шешімдері ұсынылған. Бұл процесті сипаттау үшін екі өлшемді сығылмайтын Навье-Стокс теңдеуі қолданылады. Бұл жүйе физикалық параметрлер бойынша ыдырату әдісі бойынша сандық түрде шешіледі, ол ақырлы көлемдік әдісімен аппроксимацияланады. Үздіксіздік дискретті теңдеуін қанағаттандыратын Пуассон теңдеуі әр кезеңде Якоби итеративті әдісімен шешіледі. Алдыңғы қадамдағы ламинарлы ағынның сандық шешімдері басқа авторлардың сандық нәтижелерімен салыстырылады. Бұл сандық алгоритм әртүрлі геометриялық декомпозициялар (1D, 2D және 3D) көмегімен толығымен параллельленеді. Есептік доменді декомпозицияның әртүрлі әдістерінің тиімділігін алдын ала теориялық талдау және осы мәселе бойынша нақты есептеу эксперименттер жасалды және доменнің декомпозицияның ең жақсы әдісі анықталды. Келешекте үздіксіз декомпозиция әдісімен дәлелденген математикалық модель және сандық алгоритм әртүрлі күрделі ағындар үшін ауырлық күштерін ескере отырып қолдануға болады. **Түйін сөздер:** Доменді декомпозиция әдісі, артқа қадам, физикалық параметрлер бойынша бөліну әдісі, ағындарды бөліп алу және қайта қосу, детальды ағыны, ауырлық күші.

Application of parallel computing technologies for modeling the flow separation process behind the backward facing step in the channel with the buoyancy forces

Issakhov A.A., al-Farabi Kazakh National University,

Almaty, Kazakhstan, +77056108050, E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

Abylkassymova A., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Sakypbekova M., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

The paper presents numerical solutions of the two-dimensional laminar flow behind the backward facing step in the channel with the buoyancy forces. A two-dimensional incompressible Navier-Stokes equation is used to describe this process. This system is solved numerically by the projection method, which is approximated by the control volume method. The resulting Poisson equation satisfying the discrete equation of continuity is solved by the Jacobi iterative method at each time step. The numerical solutions of the laminar flow behind the backward facing step are compared with the numerical results of other authors. This numerical algorithm is completely parallelized using various geometric decompositions (1D, 2D and 3D). Preliminary theoretical analysis of the various decomposition methods effectiveness of the computational domain and real computational experiments for this problem were made and the best method of domain decomposition was determined. In the future, a proven mathematical model and numerical algorithm with the best decomposition method can be applied for various complex flows with the buoyancy forces.

Key words: domain decomposition method, backward facing step, projection method, separation and reunion of flows, separated flow, buoyancy forces.

1 Введение

Во многих течениях, представляющий практический интерес, как разделения течения, из-за внезапного расширения геометрия с последующим повторным присоединением, является обычным явлением. Существование разделения потока и область рециркуляции оказывает значительное влияние на производительность теплопередающих устройств, например, охлаждающее оборудование в электротехнике, охлаждающие каналы лопаток турбин, камеры сгорания и многие другие поверхности теплообменника, которые появляются в оборудовании.

2 Обзор литературы

Много работ посвящены по движению жидкости с разделением и воссоединением потоков без учета сил плавучести. Важность данного процесса говорит о количестве

публикаций, где особое внимание уделялось построению оборудования (Abbott and etc., 1962; Sebanr, 1964; Goldsteinr, 1970) и разработке экспериментальных и теоретических методов для детального изучения течений с областями разделения (Durst and etc., 1971; Gosmana and etc., 1974; Kumara, 1980). Обширный обзор по изотермическим потокам в течениях жидкости даются в работах (Armaly and etc., 1980; Eaton and etc., 1981; Simpson, 1981). Теплообмен в потоках были исследованы многими авторами, как Aung (Aung, 1983; Aung, 1983), Aung и др. (Aung and etc., 1985), Aung и Worku (Aung and etc., 1986), Sparrow и др. (Sparrow and etc., 1984; Sparrow and etc., 1987) и Sparrow и Chuck (Sparrow and Chuck, 1987). Однако опубликованные работы по этой теме не учитывает, силы плавучести на поток течения или характеристики передачи тепла. Эти эффекты становятся значительными в режиме ламинарного течения, где скорость относительно низкие, и когда разность температур относительно высокая. Ngo и Byon (Ngo and etc., 2015) изучали влияние местоположения нагревателя и размера нагревателя в двумерной квадратной полости с использованием метода конечных элементов. Oztop и Abu-Nada (Oztop and etc., 2008) численно исследовали естественную конвекцию в прямоугольных оболочках, частично нагретых от боковой стенки методом конечных объемов. В данной работе рассматривается влияния сил плавучести на поток и теплопередающих характеристик в отдельных потоках. Численные решения для ламинарного смешанного конвективного потока воздуха ($Pr=0,7$) в вертикальном двумерном канале с обратным уступом, обеспечивающие поддержание эффекта плавучести изображено на рисунке 1. Численные результаты представляющий интерес, такие как скорость и распределения температуры, длины повторной привязки и коэффициенты трения представлены с целью иллюстрирующие влияние силы плавучести на эти параметры.

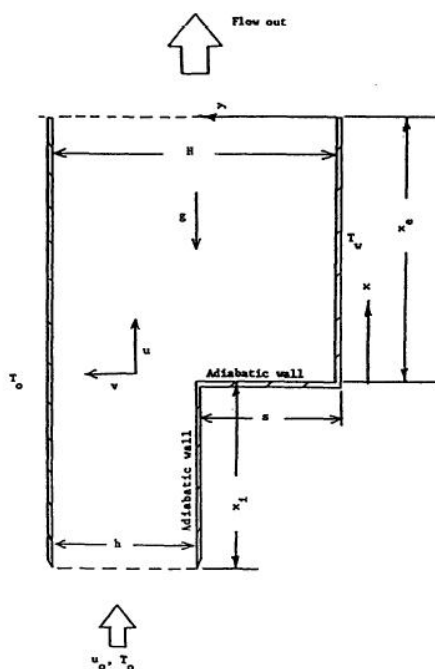


Рисунок 1 – Схематическое представление течения за уступом

3 Математическая постановка задачи течения жидкости за уступом с учетом сил плавучести

Рассмотрим двумерный ламинарный конвективный поток в вертикальном канале с внезапным расширением за обратным шагом высоты s , как показано на рисунке 1. Прямая стенка канала поддерживается при равномерной температуре, равной температуре входного воздуха T_0 . Ступенчатая стенка ниже по этапу нагревается до однородной температуры, которая может быть отрегулирована до любого желаемого значения T_w . Верхняя часть ступенчатой стенки и обратная сторона устанавливается как адиабатическая поверхность. Впускная длина канала x_i и выходная нижняя длина канала x_e имеют соответствующие размеры. Эти длины считаются бесконечными, но область вычисления ограничена длиной $L_e = x_e + x_i$. Меньшая секция канала перед выступом имеет высоту h , а большая секция ниже ступени имеет высоту $H = h + s$. Воздух течет вверх по каналу со средней скоростью u_0 и равномерной температурой T_0 . Гравитационное ускорение g в данной задаче рассматривается, что действует вертикально вниз.

Для описания данной физической задачи используются предположения о постоянных свойствах, и используется приближение Буссинеска. Данная система уравнений в безмерной форме запишется в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

Безразмерные параметры в приведенных выше уравнениях определяются формулой:

$$U = u/u_0, \quad V = v/u_0, \quad X = x/s, \quad Y = y/s,$$

$$\theta = (T - T_0)/(T_w - T_0), \quad P = p/\rho_0 u_0^2,$$

$$Pr = \nu/\alpha, \quad Re = u_0 s/\nu, \quad Gr = g\beta(T_w - T_0) s^3/\nu^2.$$

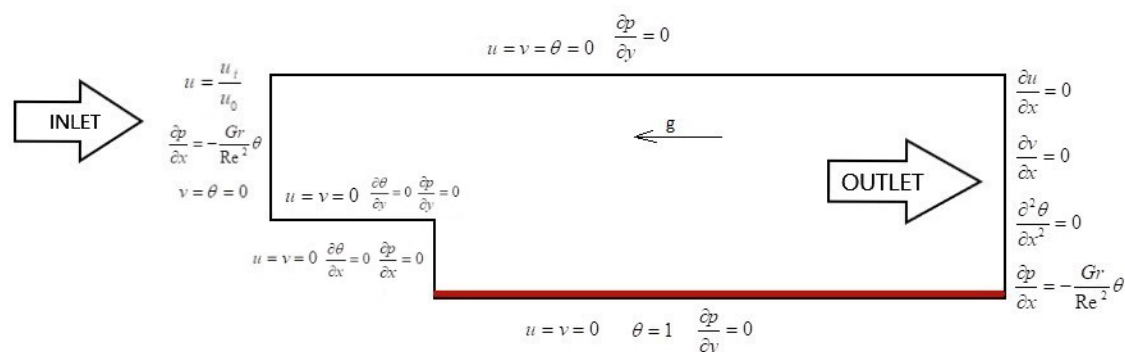


Рисунок 2 – Граничные условия

Температурная диффузия α , кинематическая вязкость ν и коэффициент теплового расширения β оцениваются при температуре пленки $T_f = (T_0 + T_w)/2$.

Граничные условия (Рисунок 2):

(а) Входные условия: В точке $X = -X_i$ и $1 \leq Y \leq H/s$: $U = u_i/u_0$, $V = 0$, $\theta = 0$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{Gr}{Re^2}\theta$.

где u_i - локальное распределение скоростей на входе, которое принимается как имеющее параболический профиль и u_0 средняя скорость впуска; то есть u_i/u_0 дается формулой

$$u_i/u_0 = 6[-y^2 + (H + s)y - Hs]/(H - s)^2$$

(b) Выходные условия: В точке $X = X_e$ и $0 \leq Y \leq H/s$: $\partial U/\partial X = 0$, $\partial^2 \theta/\partial X^2 = 0$, $\partial V/\partial X = 0$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{Gr}{Re^2}\theta$.

(c) на верхней стенке: В точке $Y = H/s$ и $-X_i \leq X \leq X_e$: $U = 0$, $V = 0$, $\theta = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

(d) на стенке верхней ступени: В точке $Y = 1$ и $-X_i \leq X < 0$: $U = 0$, $V = 0$, $\partial \theta/\partial Y = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

(e) на стенке нижней ступени: В точке $X = 0$ и $0 \leq Y \leq 1$: $U = 0$, $V = 0$, $\partial \theta/\partial X = 0$, $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

(f) на стенке ниже ступени: В точке $Y = 0$ и $0 \leq X \leq X_e$: $U = 0$, $V = 0$, $\theta = 1$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Последнее слагаемое в правой части уравнения (2) представляет собой вклад силы плавучести. Длина нисходящего потока, из области вычисления была выбрана равной 70 шагам ($X_e=70$). Верхняя длина расчетной области была выбрана x_i равной 5 шагам (т.е. $X_i=5$), а профиль скорости на входной области была задана как параболический $u_i/u_0 = 6[-y^2 + (H + s)y - Hs]/(H - s)^2$, и его температура была выбрана как равномерная T_0 .

4 Материал и методы

Для численного решения данной системы уравнений используется схема расщепления по физическим параметрам (Chung, 2002; Issakhov, 2015; Issakhov, 2016). Уравнения аппроксимируются методом конечных объемов (Chung, 2002; Issakhov, 2011). На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии, и методом Рунге-Кутты четвертого порядка

вычисляется промежуточное поле скоростей (Issakhov, 2015; Issakhov, 2016). На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Якоби. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. На четвертом этапе вычисляются уравнения для температуры методом Рунге-Кутты четвертого порядка (Issakhov, 2015; Issakhov, 2016).

$$I. \quad \int_{\Omega} \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\Delta t} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} (\vec{u}^n \vec{u}^* - \frac{1}{Re} \nabla \vec{u}^*) n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{Gr}{Re^2} \theta d\Omega,$$

$$II. \quad \oint_{\partial\Omega} (\nabla p) d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\nabla \vec{u}^*}{\Delta t} d\Omega,$$

$$III. \quad \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p,$$

$$IV. \quad \int_{\Omega} \frac{\theta^* - \theta^n}{\Delta t} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} (\vec{u}^n \theta^* - \frac{1}{Re Pr} \nabla \theta^*) n_i d\Gamma,$$

5 Алгоритм распараллеливания

Для проведения численного моделирования была построена вычислительная сетка с помощью программного комплекса PointWise. Поставленная задача запускалась на программном комплексе ITFS-МКМ с использованием высокопроизводительного кластера. Данный численный алгоритм полностью распараллеливается с помощью различных геометрических декомпозиций (1D, 2D и 3D). Геометрическое разбиение вычислительной сетки выбирается в качестве основного подхода параллелизации. В этом случае есть три различных способа обмена значений сеточной функции на вычислительных узлах одномерной, двумерной и трехмерной сетки. После стадии декомпозиции, когда на отдельных блоках выполняется построение параллельного алгоритма, осуществляется переход к отношениям между блоками, расчеты на которых будут выполняться параллельно на каждом процессоре. Для этой цели численное решение системы уравнения использовались явная схема, так как данная схема очень эффективна распараллеливается. Для того чтобы использовать метод декомпозиций в качестве метода распараллеливания данный алгоритм использует пограничные узлы каждого субдомена, в котором необходимо знать значение функции сетки, граничащей с соседними элементами процессора. Для достижения этой цели

в каждом вычислительном узле в фиктивных точках хранятся значения из соседних вычислительных узлов, и организовывается передача этих граничных значений, необходимых для обеспечения однородности расчетов для явных формул.

Передача данных осуществляется с использованием процедур библиотеки MPI (Karniadakis and etc., 2000). Прodelывая предварительные теоретические анализы эффективности различных методов декомпозиции расчетной области для данной задачи, мы будем оценивать время параллельной программы как время последовательной программы T_{calc} , разделенной на число используемых процессоров, плюс время передачи $T_p = T_{calc}/p + T_{com}$. В то время как передачи для различных способов декомпозиции можно приближенно выразить через объем пропускной способности:

$$T_{com}^{1D} = t_{send}2N^2x2$$

$$T_{com}^{2D} = t_{send}2N^2x4p^{1/2} \tag{5}$$

$$T_{com}^{3D} = t_{send}2N^2x6p^{2/3}$$

где N^3 - число узлов вычислительной сетки, p - количество процессоров (ядер), t_{send} - время отправки одного элемента (числа).

Следует отметить, что для различных способов декомпозиции затрата на передачу данных может быть представлена как $T_{com}^{1D} = t_{send}2N^2xk(p)$ в соответствии с формулой (5), где $k(p)$ - коэффициент пропорциональности, зависящий от метода разложения и количества используемых элементов обработки.

На первом этапе была использована одна общая программа, размер массива от запуска к запуску не изменялся, каждый элемент процессора нумеровался массивом элементов, начиная с нуля. Несмотря на то, что в соответствии с теоретическим анализом 3D декомпозиция является наилучшим вариантом для распараллеливания (Рисунок 3), вычислительные эксперименты показали, что лучшие результаты были достигнуты при использовании 2D декомпозиции, когда число процессов варьируется от 25 до 144 (Рисунок 3).

На основе предварительного теоретического анализа графиков можно отметить следующий характер. Время вычисления без затрат на межпроцессорные связи при различных способах декомпозиции должны быть примерно одинаковыми для одинаковых количеств процессоров и сокращаться на T_{calc}/p . В действительности, расчетные данные показывают, что при использовании 2D-декомпозиции на различных вычислительных сетках дают минимальную затрату для расчета и графики затрат в зависимости от времени вычисления на нескольких взятых процессорах значительно выше, чем T_{calc}/p .

Для объяснения этих результатов необходимо обратить внимание на допущения, которые были сделаны в ходе предварительного теоретического анализа эффективности для данной задачи. Во-первых, предполагалось, что независимо от распределения

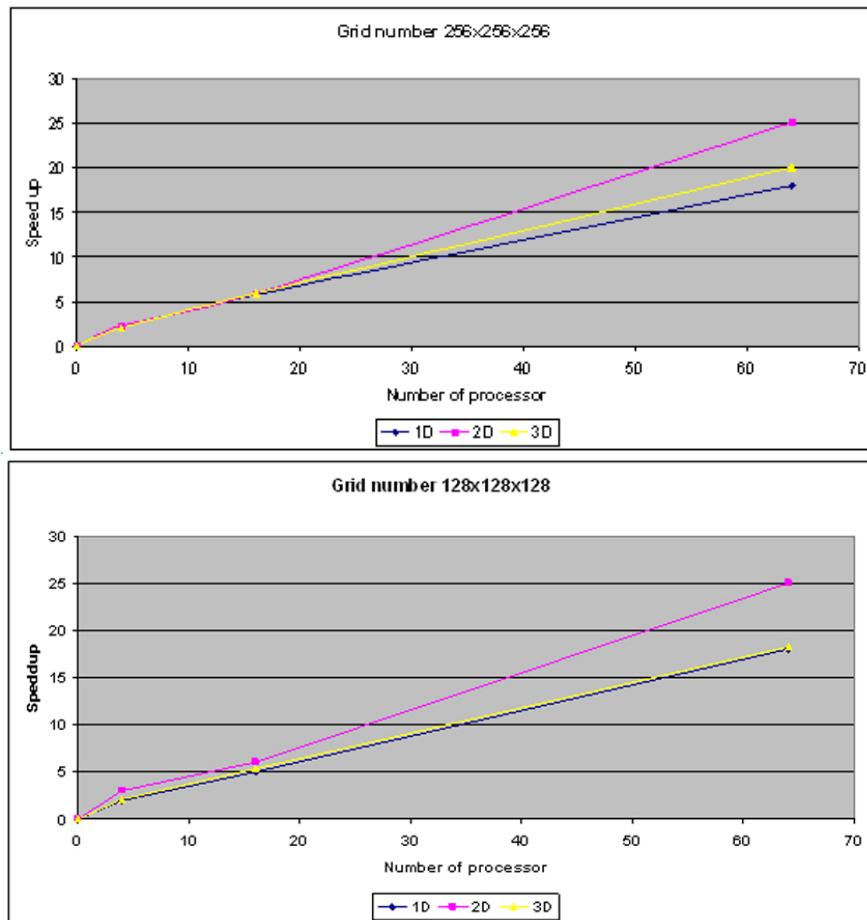


Рисунок 3 – Ускорения для различных способов декомпозиции расчетной области

данных на один процессорный элемент, выполнен тот же объем вычислительной работы, что должно привести к одинаковым затратам времени. Во-вторых, были предположены, что время, затраченное на межпроцессорные отправки любой степени того же объема данных, не зависят от их выбора памяти. Для того, чтобы понять, что происходит в действительности, были проведены следующие наборы тестовых вычислительных расчетов. Для оценки рассматривалась последовательность первого подхода, когда программа выполняется в версии с одним процессором, и, таким образом, имитирует различные способы геометрической декомпозиции данных для того же объема вычислений, выполняемых каждым процессором.

6 Результаты и обсуждение

Геометрические параметры указаны на Рисунке 1: длина канала $L=75$, высота канала $H=2$, высота уступа $S=1$. Получены численные результаты были получены для чисел $Re=50$, $Pr=0.7$ и $Gr=19.1$ (Lin and etc., 1990).

На Рисунке 4 показаны сравнения продольного профиля скорости с численными данными Лина и др. (Lin and etc., 1990) в точке $x/x_f = 0.5$, где $x_f = 2.91$. На Рисунке 5

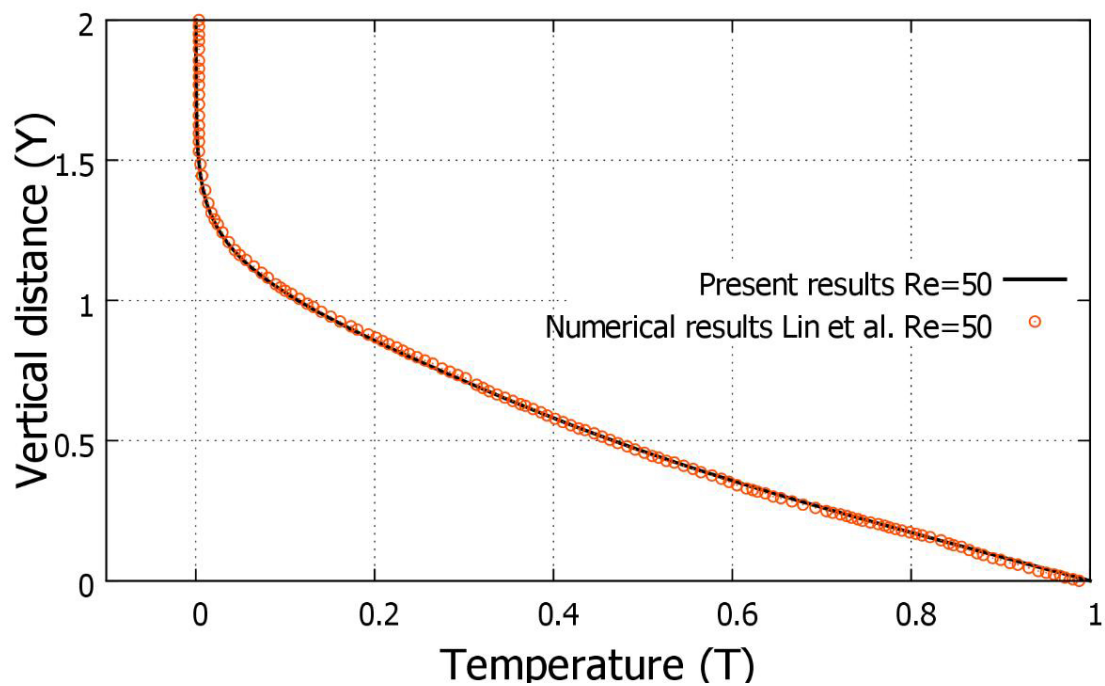


Рисунок 4 – Профиль скоростей с учетом сил плавучести для $Re=50, \Delta T = 1^\circ C, x/x_f = 0.5$, где $x_f = 2.91$

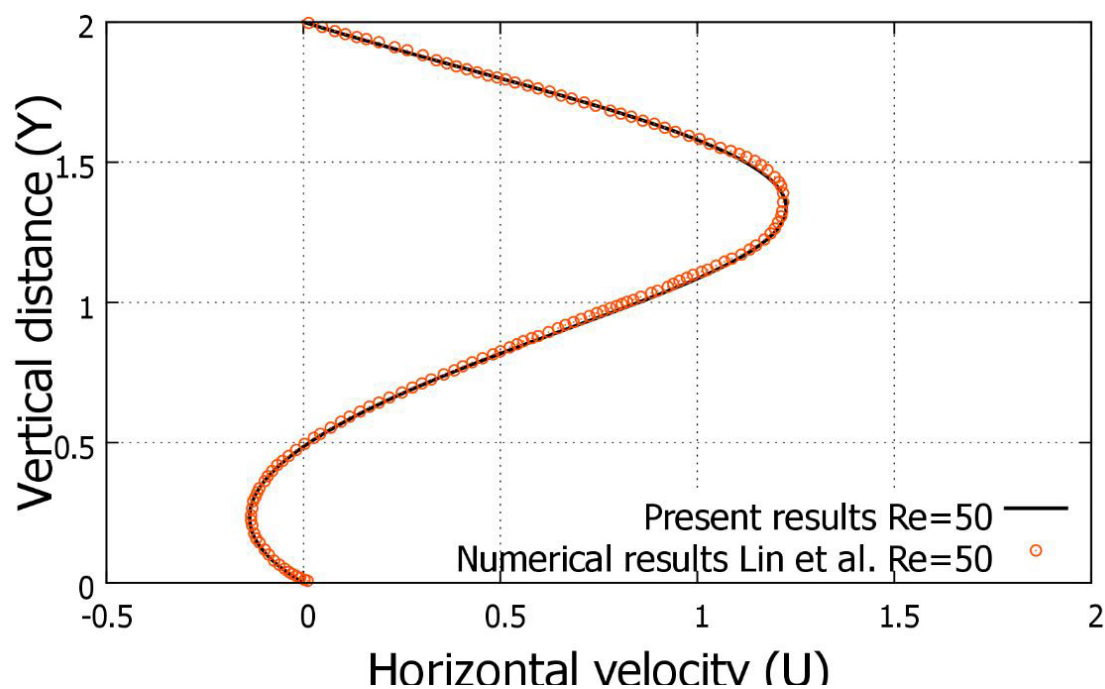


Рисунок 5 – Профиль температуры с учетом сил плавучести для $Re=50, \Delta T = 1^\circ C, x/x_f = 0.5$, где $x_f = 2.91$

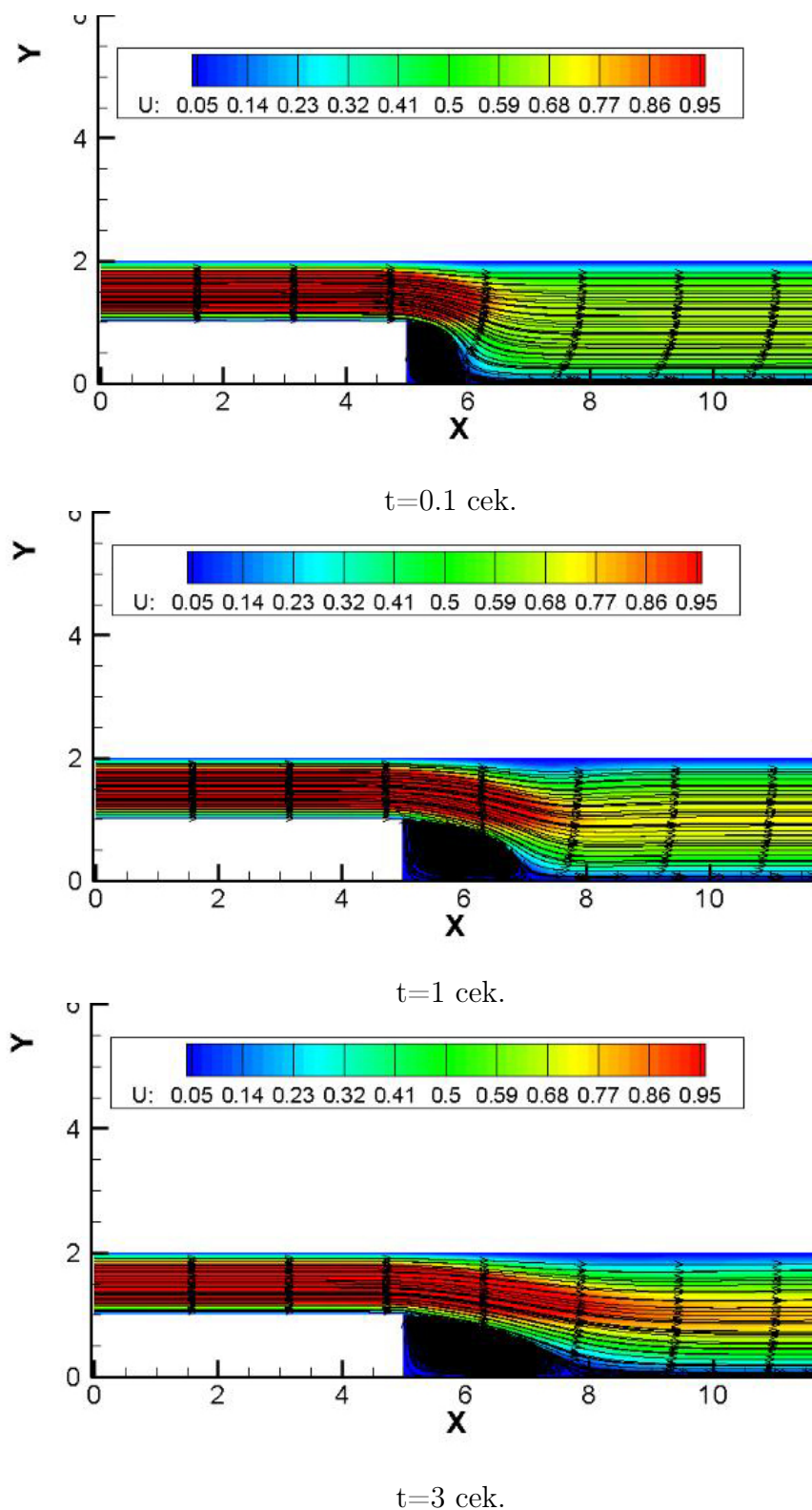


Рисунок 6 – Контур горизонтальной компоненты скорости с линиями тока для различных временных слоев, при $Re=50$, $Pr=0.7$ и $Gr=19.1$

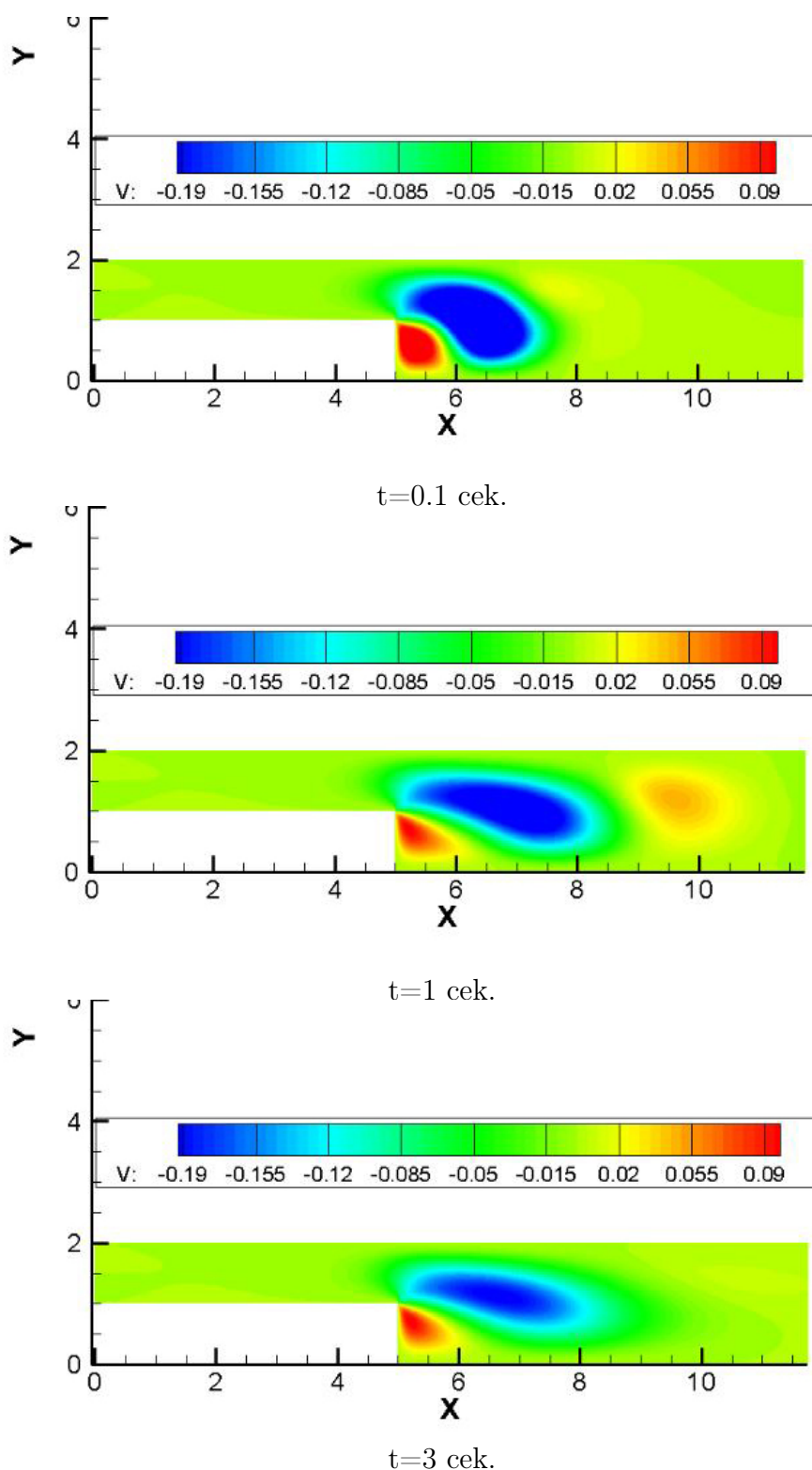


Рисунок 7 – Контур горизонтальной компоненты скорости с линиями тока для различных временных слоев, при $Re=50$, $Pr=0.7$ и $Gr=19.1$

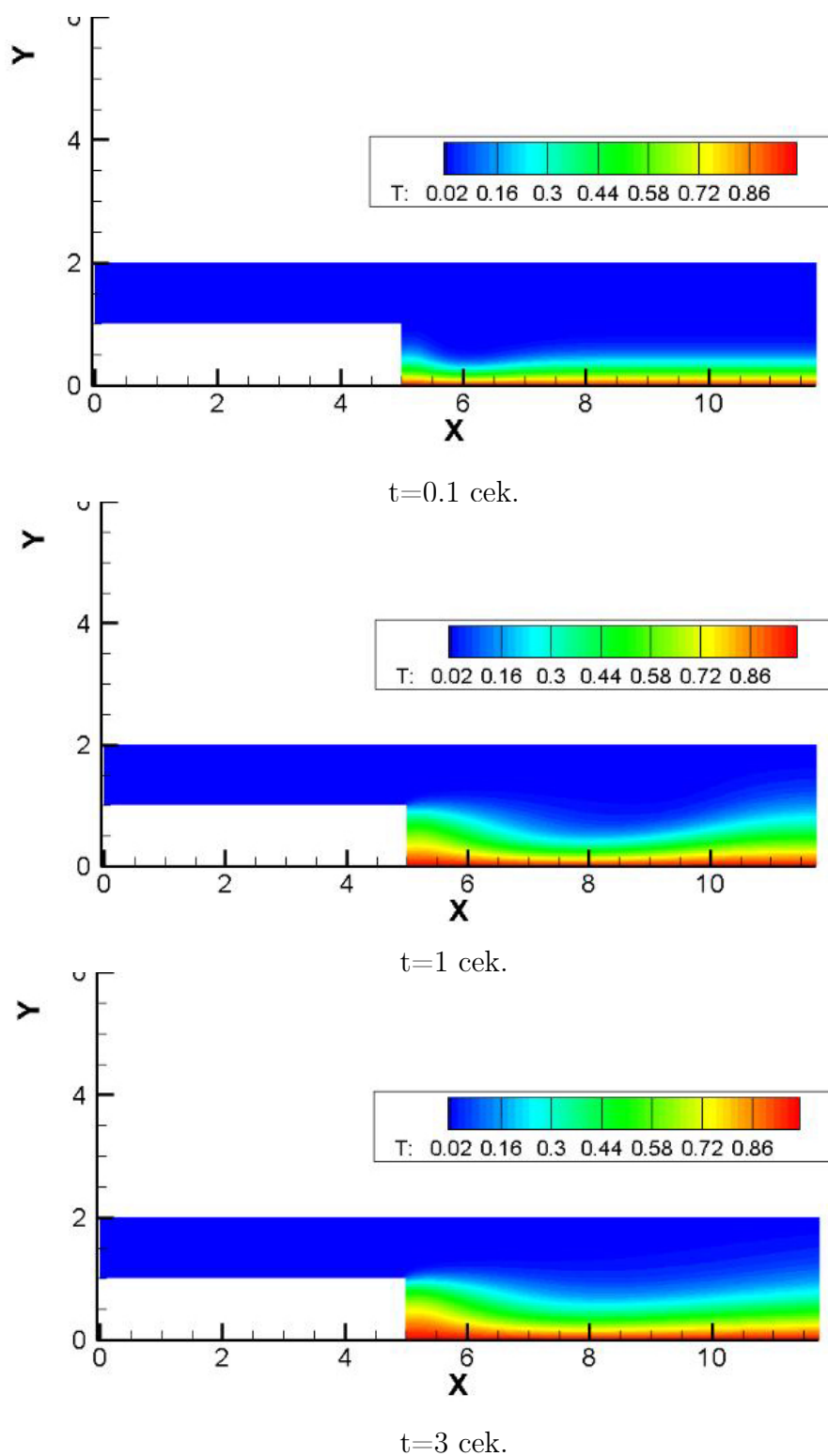


Рисунок 8 – Контур температуры для различных временных слоев, при $Re=50$, $Pr=0.7$ и $Gr=19.1$

показаны сравнения профиля температуры с численными данными Лина и др. (Lin and etc., 1990) в точке $x/x_f = 0.5$, где $x_f = 2.91$. Из рисунков видно, что используемый в

данной работе математическая модель и численный алгоритм совпадают с численными результатами, полученными Лином и др. (Lin and etc., 1990). На рисунке 6 изображено линии тока и горизонтальный контур скорости для различных временных слоев при безразмерных числах $Re=50$, $Pr=0.7$ и $Gr=19.1$. На рисунке 7 изображено вертикальный контур скорости для различных временных слоев при безразмерных числах $Re=50$, $Pr=0.7$ и $Gr=19.1$. На рисунке 8 изображено контур температуры для различных временных слоев при безразмерных числах $Re=50$, $Pr=0.7$ и $Gr=19.1$. Для более глубокого понимания данного течения из рисунков 6-8 наблюдается развитие течения за уступом по времени: зарождение и процесс развития области воссоединения потоков для различных временных слоев с учетом сил плавучести.

7 Заключение

Были выполнены численные исследования ламинарного течения зоной присоединения потоков за уступом с учетом сил плавучести. Это дало более глубокое представление о внутреннем течении за уступом и о процессах воссоединения потоков при влиянии температурных эффектов, что в свою очередь дало представление о дальнейшем появлении вторичных зон. Расстояние от уступа до границы канала взято в 4 раза больше высоты канала, для более детального изучения течений за уступом с учетом сил плавучести (Lin and etc., 1990). Численные данные распределения скорости показали образование первичной зоны воссоединения потоков за уступом. Для решения систему уравнений Навье-Стокса использовалась схема расщепление по физическим параметрам. Из графиков видно, что реализованный численный метод дает маленькую погрешность по сравнению с численными результатами других авторов для безразмерных чисел $Re=50$, $Pr=0.7$ и $Gr=19.1$.

Также в данной работе для получения быстрых численных результатов применен параллельный алгоритм. Данный параллельный алгоритм основывается на одномерной, двухмерной и трехмерной декомпозиции. Результаты параллельной программы тестирования показали, что 3D декомпозиция не является выигрышной во времени по сравнению с 2D декомпозицией, для числа процессоров, не превышающих 250, а 3D декомпозиция имеет более трудоемкую программную реализацию и использование 2D-декомпозиции является достаточным для масштабов поставленной задачи. Нужно также отметить, что постановка граничных условий немаловажный процесс. В дальнейшем данную математическую модель и параллельный численный алгоритм можно применить для различных сложных течений с учетом сил плавучести.

Список литературы

- [1] Abbott D.E. and Kline S.J. Experimental investigations of subsonic turbulent flow over single and double backward-facing steps // J. Basic Engng. — 1962. — V.84. — P. 317.
- [2] Armaly B. F. and Durst F. Reattachment length and recirculation regions downstream of two dimensional single backward facing step. In Momentum and Heat Transfer Process in Recirculating Flows // ASME HTDVOL. — 1980. — 13, — P. 1-7. ASME, New York.
- [3] Aung W. An experimental study of laminar heat transfer downstream of backsteps // J. Heat Transfer. — 1983. — 105, — P. 823-829.

- [4] Aung W., Separated forced convection, Proc. ASME/JSM Thermal Enana Joint Conf. — 1983. — Vol. 2. — P. 499-515. ASME. New York.
- [5] Aung W., Baron A. and Tsou F. K. Wall independency and effect of initial shear-layer thickness in separated flow and heat transfer // *Int. J. Hear Muss Transfer.* — 1985. — 28, — P. 1757-1771.
- [6] Aung W. and Worku G., Theory of fully developed. combined convection including flow reversal // *J. Hear Transfer.* — 1986. — 108. — P. 485-488.
- [7] Chiang T.P., Tony W.H. and Sheu Fang C.C. Numerical investigation of vortical evolution in backward-facing step expansion flow // *Appl. Math.* — 1999. — V.23. — P. 915-932.
- [8] Chorin A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Math. Comp.* — 1968. — 22. — P. 745-762.
- [9] Chung T.J. Computational fluid dynamics. 2002. — 1034 p.
- [10] Durst F. and Whitelawj H. Aerodynamic properties of separated gas flows: existing measurements techniques and new optical geometry for the laser-Doppler anemometer // *Prog. Heat Mass Transfer.* — 1971. — V.4. — P. 311.
- [11] Eaton J. K. and Johnson J. P. A review of research on subsonic turbulent flow reattachment // *AIAA J.* — 1981. — 19. — P. 1093-1100.
- [12] Fletcher C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics 2 // Springer-Verlag New York. — 1988. — V.1. — P. 387.
- [13] Goldstein J., Eriksen L., Olson M. and Eckert R.G. Laminar separation, reattachment and transition of flow over a downstream-facing step // *J. Basic Engng.* — 1970. — V.92. — P. 732.
- [14] Gosmana D. and Punw M. Lecture notes for course entitled: 'Calculation of recirculating flow' // *Heat Transfer Rep.* — 1974. — V.74. — P. 2.
- [15] Kumara, Yajnik S. Internal separated flows at large Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1980. — V.97. — P. 27.
- [16] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2015. — 16(5). — P. 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [17] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // *Applied Mathematical Modelling.* — 2016. — 40(2). — P. 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [18] Issakhov A. Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2011, — 318(4), — P. 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [19] Karniadakis G. E. and Kirby II R. M. *Parallel Scientific Computing in C++ and MPI: A Seamless Approach to Parallel Algorithms and their Implementation.* Cambridge University Press, 2000. — 630 p.
- [20] Lin J.T., Armaly B.F. and Chen T.S. Mixed convection in buoyancy-assisting, vertical backward-facing step flows // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* — 1990. — 33(10). — P. 2121-2132.
- [21] Ngo I. and Byon C. Effects of heater location and heater size on the natural convection heat transfer in a square cavity using finite element method // *J. Mech. Sci. Technol.* — 2015. — 29 (7). — 2995.
- [22] Oztop H. F. and Abu-Nada E. Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids // *Int. J. Heat. Fluid Fl.* — 2008. — 29(5), — P. 1326-1336.
- [23] Sebanr A. Heat transfer to the turbulent separated flows of air downstream of a step in the surface of a plate // *J. Heat Transfer.* — 1964. — V.86. — P. 259.
- [24] Simpson R. L. A review of some phenomena in turbulent flow separation // *J. Fluid Engng.* — 1981. — 103. — P.520-533.
- [25] Sparrow E. M., Chrysler G. M. and Azevedo L. F. Observed flow reversals and measured-predicted Nusselt numbers for natural convection in a one-sided heated vertical channel // *J. Heat Transfer.* — 1984. — 106. — P. 325-332.
- [26] Sparrow E. M., Kang S. S. and Chuck W. Relation between the points of flow reattachment and maximum heat transfer for regions of flow separation // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1987. — 30, — P. 1237-1246.
- [27] Sparrow E. M. and Chuck W. PC solutions for heat transfer and fluid flow downstream of an abrupt, asymmetric enlargement in a channel // *Numer. Hear Transfer.* — 1987. — 12. — 1940.

References

- [1] Abbott, D.E. and Kline, S.J. "Experimental investigations of subsonic turbulent flow over single and double backward-facing steps." *J. Basic Engng.* 84 (1962): p. 317.
- [2] Armaly, B. F. and Durst, F. "Reattachment length and recirculation regions downstream of two dimensional single backward facing step In *Momentum and Heat Transfer Process in Recirculating Flows*." ASME HTDVol. 13 (1980): 1-7. ASME, New York.
- [3] Aung, W. "An experimental study of laminar heat transfer downstream of backsteps." *J. Heat Transfer.* 105 (1983): 23-829.
- [4] Aung, W. "Separated forced convection." Proc. ASMEIJSME Thermal Enana Joint Conf. 2(1983): 499-515. ASME. New York.
- [5] Aung, W., Baron, A. and Tsou, F. K. "Wall independency and effect of initial shear-layer thickness in separated flow and heat transfer." *Int. J. Hear Muss Transfer.* 28(1985): 1757-1771.
- [6] Aung, W. and Worku, G. "Theory of fully developed. combined convection including flow reversal." *J. Hear Transfer.* 108 (1986): 485-488.
- [7] Chiang, T.P., Tony, W.H. and Sheu Fang, C.C. "Numerical investigation of vortical evolution in backward-facing step expansion flow." *Appl. Math.* 23(1999): 915-932.
- [8] Chorin, A.J. "Numerical solution of the Navier-Stokes equations." *Math. Comp.* 22 (1968):745-762.
- [9] Chung, T.J. "Computational fluid dynamics." 2002. 1034 p.
- [10] Durst, F. and Whitelaw, H. "Aerodynamic properties of separated gas flows: existing measurements techniques and new optical geometry for the laser-Doppler anemometer." *Prog. Heat Mass Transfer.* 4(1971): 311.
- [11] Eaton, J. K. and Johnson, J. P. "A review of research on subsonic turbulent flow reattachment." *AIAA J.* 19 (1981): 1093-1100.
- [12] Fletcher, C.A.J. "Computational techniques for fluid dynamics 2." Springer-Verlag New York. 1 (1988): 387.
- [13] Goldstein, J., Eriksen, L., Olson, M. and Eckert, R.G. "Laminar separation, reattachment and transition of flow over a downstream-facing step." *J. Basic Engng.* 92 (1970):732.
- [14] Gosmana, D. and Punw, M. "Lecture notes for course entitled: 'Calculation of recirculating flow'." *Heat Transfer Rep.* 74 (1974):2.
- [15] Kumara, Yajnikk S. "Internal separated flows at large Reynolds number." *J. Fluid Mech.* 97 (1980):27.
- [16] Issakhov, A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant." *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 16(5) (2015): 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [17] Issakhov, A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities." *Applied Mathematical Modelling.* 40(2) (2016): 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [18] Issakhov, A. "Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method." *J. Phys.: Conf. Ser.* 318(4) (2011): 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [19] Karniadakis, G. E. and Kirby II, R. M. "Parallel Scientific Computing in C++ and MPI: A Seamless Approach to Parallel Algorithms and their Implementation." Cambridge University Press, 2000. 630 p.
- [20] Lin, J.T., Armaly, B.F. and Chen, T.S. "Mixed convection in buoyancy-assisting, vertical backward-facing step flows." *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 33(10) (1990): 2121-2132.
- [21] Ngo, I. and Byon, C. "Effects of heater location and heater size on the natural convection heat transfer in a square cavity using finite element method." *J. Mech. Sci. Technol.* 29 (7) (2015): 2995.
- [22] Oztop, H. F. and Abu-Nada, E. "Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids" *Int. J. Heat. Fluid Fl.* 29(5) (2008):1326-1336.

- [23] Sebanr, A. "Heat transfer to the turbulent separated flows of air downstream of a step in the surface of a plate," *J. Heat Transfer*. 86 (1964):259.
- [24] Simpson, R. L. "A review of some phenomena in turbulent flow separation," *J. Fluid Engng.* 103 (1981): 520-533.
- [25] Sparrow, E. M., Chrysler, G. M. and Azevedo, L. F. "Observed flow reversals and measured-predicted Nusselt numbers for natural convection in a one-sided heated vertical channel." *J. Heat Transfer*. 106 (1984): 325-332.
- [26] Sparrow, E. M., Kang, S. S. and Chuck, W. "Relation between the points of flow reattachment and maximum heat transfer for regions of flow separation." *Int. J. Heat Mass Transfer*. 30 (1987): 1237-1246.
- [27] Sparrow, E. M. and Chuck, W. "PC solutions for heat transfer and fluid flow downstream of an abrupt, asymmetric enlargement in a channel," *Numer. Heat Transfer*. 12(1987):1940.