МРНТИ 27.31.17

О линейных уравнениях с частными производными первого порядка

Алдибеков Т.М., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77011411069, E-mail: tamash59@mail.ru
Алдажарова М.М., Научно-исследовательский институт Казахского национального университета имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77019870744, email: a_maira77@mail.ru

Исследуется линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Каждое дифференциальное уравнение с частными производными находится в тесной связи с некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений - системой так называемых характеристических уравнений данного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Каждое дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка при некоторых условиях имеет фундаментальную систему интегралов или интегральный базис. Заметим, для общего линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка может не существовать нетривиального интеграла. Для линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка, причем первый коэффициент равен единице, интегральный базис существует. Для линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка приведено определение асимптотической устойчивости линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Приведено достаточное условие асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. В настоящее время теория дифференциальных уравнений с частными производными находит свое применение в различных областях естествознании.

Ключевые слова: уравнение, частные производные первого порядка.

Сызықты бірінші ретті дербес туындылы теңдеулер туралы

Алдибеков Т.М., Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77017477069, Электрондық пошта: tamash59@mail.ru
Алдажарова М.М., Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университетінің Ғылыми зерттеу институты,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77019870744, Электрондық пошта: a_maira77@mail.ru

Коэффиценттері үзіліссіз дербес туындылары бар, шенелмеген облыста берілген бірінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеу зерттеледі. Әрбір дербес туындылы дифференциалдық теңдеу берілген бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің сипаттауыш теңдеулер деп аталатын жүйесімен тығыз байланысты болады. Әрбір бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің белгілі бір шарттарда фундаменталдық интегралдар жүйесі немесе интегралдық базисі бар болады. Жалпы сызықты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің, байқайтынымыз, тривиалды емес интегралы табылмауы да мүмкін. Коэффициенттері шенелмеген жиында берілсе және үзіліссіз бірінші ретті дербес туындылары бар болса, сондай-ақ бірінші коэффициенттері бірге тең болса, оның интегрладық базисі болады. Сызықты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің асимптотикалық орнықтылығының анықтамасы берілген. Сызықты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін асимптотикалық орнықтылықтың жеткілікті шарттары келтірілген. Нағызғы уақытта дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясы жаратылыстанудың әртүрлі салаларында қолданыстарын табуда.

Түйін сөздер:теңдеу, бірінші ретті дербес туындылар.

On linear partial equations of first-order

Aldibekov T.M., Al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazakhstan, +77017477069, E-mail: tamash59@mail.ru
Aldazharova M.M., Scientific Research Institute of the al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazakhstan, +77019870744, E-mail: a_maira77@mail.ru

We study a linear differential equation with first-order partial derivatives, where the coefficients of the equation are given on an unbounded set and have continuous first-order partial derivatives. Each partial differential equation is closely related to a system of ordinary differential equations, a system of so-called characteristic equations of a given first-order partial differential equation. Each first-order partial differential equation under certain conditions has a fundamental system of integrals or an integral basis. We note that for a general linear partial differential equation of the first order there can be no nontrivial integral. For a linear first-order partial differential equation, where the coefficients of the equation are given on an unbounded set and have continuous first-order partial derivatives, with the first coefficient equal to one, an integral basis exists. For a linear first-order partial differential equation, where the coefficients of the equation are given on an unbounded set and have continuous first-order partial derivatives, with the first coefficient equal to one, an integral basis exists. For a linear first-order partial differential equation, we define the asymptotic stability of a linear first-order partial differential equation. A sufficient condition for the asymptotic stability of a linear partial differential equation of the first order is given. At present, the theory of partial differential equations finds its application in various fields of natural science.

Key words:equation, first order partial derivatives

1 Введение

Исследуется линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Каждое дифференциальное уравнение с частными производными находится в тесной связи с некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений - системой так называемых характеристических уравнений данного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Каждое дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка при некоторых условиях имеет фундаментальную систему интегралов или интегральный базис. Заметим, для общего линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка может не существовать нетривиального интеграла. Для линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка, причем первый коэффициент равен единице, интегральный базис существует. Для линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка приведены определения асимптотической устойчивости. Приведены коэффициентные признаки асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

2 Обзор литературы

Общая теория излагается в книге "Уравнения с частными производными"(Берс, 1966: 352). Область существования решений были исследованы в работах (Wazewski, 1938: 522-

532). Об оценке области существования интегралов уравнения с частными производным первого порядка изложено в книге (Wazewski, 1935: 149-177). Книги по теория уравнении в частных производных: (Гельфанд 1959: 87-158), (Gross, 1914: 2233-2251), (Caratheodory, 1935: 7-9). В работе (Кружков, 1970: 228-255) рассматривается обобщенные решения. Теорема Ковалевской опубликована в работе (Kovalevskaya, 1885: 18-21). Общая теория излагается в книге (Курант, 1964: 23-27). Область существования решений исследован Камке и содержится в справочнике (Камке, 1966: 46-48). Второй метод Ляпунова применен для исследования в работе(Зубов, 1955: 25-31). Так же с общим курсом по теории уравнении в частных производных можно ознакомиться в книгах (Петровский, 1961: 38-43), (Петровский, 1970: 114-116), (Массера, 1970: 50-59), (Мизохата, 1977: 504). Пример не существования решении построил Перрон (Perron, 1911: 1-32). С дополнительные общими сведениями можно ознакомиться в (Смирнов, 1981: 551), (Степанов, 1959: 338-343), (Трикоми, 1957: 67), (Тихонов, 2004: 798), (Хартман, 1970: 627-329), (Hormander, 1958: 213-225); (Hormander, 1959: 177-190), (Эльсгольц, 2013: 57-67), (Яненко, 1978: 223-225). Рассмотрен частный случай в (Алдибеков, 2008: 1582).

3 Материалы и методы исследования

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} p_{1k}(x) y_k \frac{\partial u}{\partial y_1} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x) y_k \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \tag{1}$$

где $u(x, y_1, \ldots, y_n)$- неизвестная функция, $x_0 \leq x < +\infty$, $x_0 > 0$, $-\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty$, $p_{ik}(x)$, $i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$; имеют непрерывные частные производные первого порядка на промежутке $x_0 \leq x < +\infty$. Для уравнения (1) характеристическая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x) y_k, \ i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Характеристическую систему (2) рассматриваем при начальных значениях $y_k \mid_{x=x_0} = y_0, k = 1, \ \ldots, n$. Решение характеристической системы (2) существует

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0), \ k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

при произвольных начальных данных y_k^0, $(k = 1, \ldots, n)$. (3) разрешимы относительно $y_1^0, \ldots, y_n^0$ и имеет место

$$y_k^0 = \varphi_k(x_0, x, y_1, \ldots, y_k), \ i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

(4) образует интегральный базис линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (1). Следующее дифференциальное

уравнение с частными производными первого порядка

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\sum_{k=1}^{n} p_{1k}(x)y_k+g_1(x,y_1,\ldots,y_n)\right)\frac{\partial u}{\partial y_1}+\\ \ldots+\left(\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x)y_k+g_n(x,y_1,\ldots,y_n)\right)\frac{\partial u}{\partial y_n}=0\end{gathered} \tag{5}$$

называется возмущенным уравнением, где $g_i(x,y_1,\ldots,y_n),\, i = 1,\ldots,n;$ малые возмущения, которые удовлетворяют некоторому условию малости. Малые возмущения $g_i(x,y_1,\ldots,y_n)$, $i=1,\ldots,n;$ заданы на $x_0\le x<+\infty,\ x_0>0,\ -\infty<y_1,\ldots,y_n<+\infty$ и имеют непрерывные частные производные и

$$g_i(x,0,\ldots,0)=0,\, i=1,\ldots,n.$$

Для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (5) характеристическая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)y_k+g_i(x,y_1,\ldots,y_n),\ i=1,\ldots,n. \tag{6}$$

Принимаем следующее определение.

Определение 1.Если выполняются следующие условия:

1) линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) имеет интегральный базис, который стремятся к нулю при $x_0\to+\infty$,

2) возмущенное уравнение (5), которое получается из уравнения (1) при малых возмущениях, имеет интегральный базис, который стремятся к нулю при $x_0\to+\infty$, тогда линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) называется асимптотически устойчивым при $x_0\to+\infty$. Легко устанавливается следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть для характеристической системы линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)y_k,\ i=1,\ldots,n. \tag{7}$$

где коэффициенты непрерывные действительные функций, определенные на полуоси $I=[x_0,+\infty)$, выполняются следующие условия:

(1)$p_{k-1,k-1}(x)-p_{kk}(x)\ge\alpha\varphi(x),\ x\in I, k=2,\ldots,n.\ \alpha>0,\varphi(x)\in\mathbb{C}(I)$,

$\varphi(x)>0,\ q(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(s)ds\uparrow+\infty;$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)}=0,\ i\ne k,\ i=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,n;$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{q(x)}\int\limits_{x_0}^{x}p_{kk}(s)ds=\beta_k,\ k=1,2,\ldots,n,\ \beta_1<0;$ где $q(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(s)ds\uparrow+\infty.$ Причем $\beta_1<0$, тогда линейная система (7) обобщенная правильная относительно $q(x)$

и асимптотически устойчива по Ляпунову при $x \to +\infty$.
Лемма 2. Пусть для характеристической системы возмущенного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x) y_k + g_i(x, y_1, \ldots, y_n), \ i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

где функций $p_{ik}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$, непрерывные действительные функций, определенные на полуоси $I = [x_0, +\infty)$, выполняются следующие условия:
1)$p_{k-1,k-1}(x) - p_{kk}(x) \geq \alpha\varphi(x), \ x \in I, \ k = 2, \ldots, n. \ \alpha > 0,$
$\varphi(x) \in \mathbb{C}(I), \ \varphi(x) > 0, \ \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(s) ds = +\infty;$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)} = 0, \ i \neq k, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots, n;$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{q(x)} \int\limits_{x_0}^{x} p_{kk}(s) ds = \beta_k, \ k = 1, 2, \ldots, n. \ \beta_1 < 0;$
4)$g_i(x, y_1, \ldots, y_n), \ i = 1, 2, \ldots, n$.непрерывна по первому аргументу и непрерывно дифференцируема начиная со второго аргумента, кроме того выполняются условия: $g_i(x, 0, \ldots, 0) = 0, \ i = 1, \ldots, n. \ \|g(x, y)\| \leq \delta(x)\|y\|, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\delta(x)}{\varphi(x)} = 0$ Тогда нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (9) асимптотически устойчиво относительно $q(x)$ при $x \to +\infty$.
Доказательство. Нелинейную систему дифференциальных уравнений (8) удобно рассматривать векторно-матричном виде

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + g(x, y) \tag{9}$$

Возьмем γ такое, что $0 < \gamma < |\frac{\beta_1|}{3}$и в системе (9) выполним преобразование

$$y = z e^{-\gamma[q(x) - q(x_0)]}$$

который сохраняет обобщенную правильность и отрицательность старшего обобщенного показателя. Тогда будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = B(x)z + f(x, z) \tag{10}$$

где

$$B(x) = P(x) + \gamma \frac{dq(x)}{dx} E,$$

где $E - n \times n$ единичная матрица.

$$f(x, z) = e^{\gamma[q(x) - q(x_0)]} g\left(x, z e^{-\gamma[q(x) - q(x_0)]}\right)$$

причем $z(x_0) = y(x_0)$. Линейная система

$$\dot{z} = B(x)z \tag{11}$$

обобщенно правильная и имеет отрицательный старший обобщенный показатель. Векторная функция $f(x, z)$ непрерывно по $x \geq x_0$ и непрерывно дифференцируема по z.
Переходим от дифференциального уравнения (10) к интегральному уравнению

$$z(x) = H(x)z(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\tau) f(\tau, z(\tau)) d\tau \tag{12}$$

где $H(x)$ нормированная фундаментальная матрица линейной системы (11). В силу отрицательности старшего обобщенного показателя для фундаментальной матрицы линейной системы (11) имеет место оценка

$$\|H(x)\| \leq C_1,\ (C_1 \geq 0),\ x \geq x_0 \tag{13}$$

Заметим, что $\beta_1 + \gamma$ является обобщенным верхним центральным показателем линейной системы $\frac{dy}{dx} = P(x)y$, а $\beta_1 + \gamma$ является обобщенным верхним центральным показателем линейной системы (11), поэтому для любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{|\beta_1|}{2}\right)$ для матрицы Коши $K(x, \tau)$ линейной системы (11) по определению имеет место оценка

$$\|K(x,\tau)\| \leq e^{(\beta_1+\gamma+\varepsilon)[q(x)-q(\tau)]},\ x_0 \leq \tau \leq x < +\infty,\ \ > 0 \tag{14}$$

Далее оценивая векторную функцию $f(x, z)$ имеем

$$\|f(x,z)\| \leq \delta(x)\|z\|$$

Теперь, из интегрального уравнения (12) оценивая по норме, в силу (13), (14)

$$\|z(x)\| \leq C_1\|z(x_0)\| + \int\limits_{x_0}^{x} e^{(\beta_1+\gamma+\varepsilon)[q(\tau)-q(x_0)]}\delta(\tau)\|z(\tau)\| d\tau \tag{15}$$

Имеет место неравенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} e^{(\beta_1+\gamma+\varepsilon)[q(\tau)-q(x_0)]}\delta(\tau) d\tau < \frac{6B}{|\beta_1|},\ B > 0$$

Тогда из (15) используя лемму Гронуолла-Беллмана и возвращаясь к $y(x)$ имеем

$$\|y(x)\| \leq D\|y(x_0)\|e^{-\gamma(q(x)-q(x_0))}, 0 < \gamma < \frac{|\beta_1|}{3}$$

при

$$\|y(x_0)\| < \gamma,$$

где δ достаточно мала. Поэтому, тривиальное решение нелинейной системы (8) асимптотически устойчиво при $x \to +\infty$. Лемма 2 доказана. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.Если линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) и возмущенное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (5) удовлетворяют следующие условия: $p_{ik}(x), i = 1, \ldots, n. k = 1, \ldots, n$; непрерывные действительные функций, определенные на полуоси $I = [x_0, +\infty)$, кроме того выполняются 1)-4):
1)$p_{k-1,k-1}(x) - p_{kk}(x) \geq \alpha\varphi(x)$, $x \in I$, $k = 2, \ldots, n. \alpha > 0$, $\varphi(x) \in (I)$,
$\varphi(x) > 0$, $\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(s)ds = +\infty$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)} = 0$, $i \neq k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$;
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{q(x)} \int\limits_{x_0}^{x} p_{kk}(s)ds = \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 < 0$;
4)$g(x, y) = colon\,(g_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_n(x, y_1, \ldots, y_n))$ имеет непрерывные частные производные на множестве $x_0 \leq x < +\infty$, $x_0 > 0$, $-\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty$, $g_i(x, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. $\|g(x, y)\| \leq \varphi(x)\|y\|$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) асимптотически устойчиво при $x_0 \to +\infty$.
Доказательство теоремы. Как известно, если функции

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)y_k + g_i(x, y_1, \ldots, y_n),\ i = 1, \ldots, n$$

ограничены и имеют непрерывные частные производные по y_i

$$p_{ik}(x) + \frac{\partial g_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, n,$$

тогда, в каждой подобласти принадлежащей открытой полосе $x_0 < x < +\infty$, $-\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty$, существует для уравнения (5) интегральный базис $\psi_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, n$, для которого во всей области функциональный определитель

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} > 0.$$

Интегральный базис (4) уравнения (1) в силу леммы 1 стремятся к нулю при $x_0 \to +\infty$. Рассмотрим уравнение (5) в области $\|y(x_0)\| < \delta$, $y(x_0) = colon\,[y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)]$, $y_i(x_0) = y_i^0, i = 1, \ldots, n$, $\|y(x)\| \leq D\|y(x_0)\|e^{-\gamma(q(x)-q(x_0))}, y(x) = colon[y_1(x), \ldots, y_n(x)], x > x_0$. Тогда общее решение характеристической системы (6)

$$y_i = \psi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0),\ i = 1, \ldots, n;\ x \in (x_0, +\infty)$$

разрешимы относительно $y_1^0, \ldots, y_n^0$, поэтому

$$\psi_i(x, y) = \psi_i(x_0, x, y_1, \ldots, y_n),\ i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

образует интегральный базис возмущенного уравнения (5). В силу леммы 2 вытекает, что

$$\lim_{x_0\to+\infty} \psi_i(x_0, x, y_1, \ldots, y_n) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, по приведенному определению линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) асимптотически устойчиво при $x_1^0 \to +\infty$. Теорема 1 доказана. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n} p_{1k}(x)y_k\frac{\partial u}{\partial y_1}+\ldots+\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x)y_k\frac{\partial u}{\partial y_n}=f(x) \tag{17}$$

где правая часть $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $x_0 \le x < +\infty$ Если $\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n)$ и $\psi_2(x, y_(1,) \ldots, y_n)$ любые два решения уравнения (17), то их разность $\psi_1(x, y_(1), \ldots, y_n) - \psi_2(x, y_(1), \ldots, y_n)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (1). Если $\psi_0(x, y_(1), \ldots, y_n)$ решение уравнения (17) и $\varphi_k(x_0, x, y_1, \ldots, y_n),\ k=1,\ldots,n$ интегральный базис уравнения (1), то

$$\begin{aligned}\psi_0(x, y_(1), \ldots, y_n), u_k(x, y_(1), \ldots, y_n) = \psi_0(x_0, x, y_(1), \ldots, y_n)+\\ \varphi_k(x, y_1, \ldots, y_n),\ k=1,\ldots,n.\end{aligned} \tag{18}$$

образует интегральный базис уравнения (17).

Определение 2. Если линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (17) имеет интегральный базис, который стремятся к некоторому решению уравнения (17) при $x_0 \to +\infty$, тогда линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (17) называется асимптотически устойчивой. Из (18) вытекает, для асимптотической устойчивости линейного неоднородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (17) достаточно асимптотическая устойчивость соответствующего линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка. Следовательно, имеем теорему 2.

Теорема 2. Если линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (17) удовлетворяют условиям: 1) выполняются условия теоремы 1; 2) $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $x_0 \le x < +\infty$ тогда линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (17) является асимптотически устойчивой.

4 Результаты и обсуждение

Приведено определение асимптотической устойчивости линейного однородного и неоднородного дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Установлены коэффициентные признаки асимптотической устойчивости линейного однородного и неоднородного дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

5 Заключение

В работе рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Получены признаки асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка.

6 Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования Министерством образования и науки Республики Казахстан на 2018-2020 гг., по теме «Исследования асимптотической устойчивости решений и разработка асимптотических характеристик системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка».

Список литературы

[1] *Caratheodory C.* Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1935 [VI.6, 7-9].

[2] *Gross W.* Bemerkung zum Existenzbeweise bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S.-B.K. Akad. Wiss. Wien, KI. Math. Nat., 123 (Abt. IIa),(1914), 2233-2251 [VI.7-9].

[3] *Hormander L.*On the uniqueness of the Cauchy problem I// Math. Scand.-1958-No. 6,- P.213-225.

[4] *Hormander L.* On the uniqueness of the Cauchy problem II // Math. Scand.-1959.-No. 7, P.177-190.

[5] *Kovalevskaya S.* Zusatze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung uber die Gestalt der Saturnsringe //Astronomische Nachrichten.- 1885.-t. CXI., P.18-21

[6] *Perron O.* Ueber diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten, Math. Ann., 70 (1911), 1-32 [VI.13]

[7] *Wazewski T.* Sur l'appreciation du domain d'existence des integrals de l'equation aux derives partielles du premier ordre, Ann. Soc. Polon. Math., 14 (1935), 149-177 [VI.9].

[8] *Wazewski T.* Ueber die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Zeit., 43 (1938), 522-532 [VI.7-9].

[9] *Алдибеков Т.М.* Об обобщенных показателях Ляпунова // Дифференциальные уравнения. - 2008. - Т.44, №11. - С. 1582.

[10] *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными //М.: Мир.- 1966.- 352 с.

[11] *Гельфанд И.М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений//УМН.- 1959.-14(2),-С. 87-158.

[12] *Зубов В.И.* Вопросы теории второго метода Ляпунова построения общего в области асимптотической устойчивости// ПММ.-1955.- т. XIX, вып.2, -С.25-31

[13] *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Матем. Сборник.-1970.-81(2),-С. 228-255.

[14] *Курант Р.* Уравнения с частными производными// Мир.-1964.- С.23-27

[15] *Камке Э.* Справочник по дифферециальным уравнениям в частных производных первого порядка // М.: Наука.- 1966.-С.46-48

[16] *Массера Х.Л.* Линейные дифференциальные и функциональные пространства// М., "Мир".- 1970.-С.50-59

[17] *Мизохата С. С.*Теория уравнений с частными производными// М.: Мир.- 1977. - 504 с.

[18] *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными,3 изд// М.-1961.- С. 38-43

[19] *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд.// М.-1970.- С. 114-116

[20] *Смирнов В.М* Курс высшей математики// М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы.-1981.-Т. 4, Часть вторая. - 551 с.

[21] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е// Наука. Физматгиз.-1959.-С. 338-343

[22] *Ф. Трикоми* Лекции по уравнениям в частных производных//ИЛ.- 1957.- С.67

[23] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики.7-е изд.// М.: Изд-во МГУ; Наука.- 2004. - 798 с.

[24] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения// М., "Мир".- 1970. С.627-629

[25] *Эльсгольц Л.* Дифференциальные уравнения//М.-2013.- С.57-67

[26] *Яненко Н.Н., Рождественский Б.Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике// М.- 1968.

References

[1] Aldibekov T.M. "Obobshennye pokazateli lyapunova"[Generalized Lyapunov exponents"] *Differential equations* V.44, №11(2008): 1582.

[2] Bers L., John D. and Shechter M. *"Uravneniya s chastnymi proizvodnymi"[Partial equations]*(M.: Mir, 1966): 352

[3] Caratheodory C. *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung* VI 6 (Leipzig und Berlin:B. G. Teubner, 1935): 7-9.

[4] Courant R. *"Uravneniya s chastnymi proizvodnymi"[Partial equations]* (Mir, 1964): 23-27

[5] Elsgoltc L. *"Differentsialnye uravneniya"[Differential equations]* (M., 2013): 57-67

[6] Gelfand I. *"Nekotorye zadachi teorii kvazilineinyh uravnenii"[Some problems of quazilinear equations theory]* 14(2) (UMN, 1959): 87-158.

[7] Gross W. *Bemerkung zum Existenzbeweise bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* VI.7-9 (S.-B.K. Akad. Wiss. Wien, KI. Math. Nat., 123 (Abt. IIa), 1914): 2233-2251 .

[8] Hartman F. *"Obyknovennye differentsialnye uravneniya"[ODE]* (M.:Mir, 1970): 627-629

[9] Hormander L. *On the uniqueness of the Cauchy problem I* No. 6 (Math. Scand., 1958): 213-225.

[10] Hormander L. *On the uniqueness of the Cauchy problem II* No. 7 (Math. Scand., 1959): 177-190.

[11] Kamke E. *"Spravochnik po differentsialnym uravneniyam v chastnyh proizvodnyh pervogo poryadka"[Referense book in first-order partial differential equations]* (M.: Nauka, 1966): 46-48

[12] Kovalevskaya S. *Zusatze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung uber die Gestalt der Saturnsringe* CXI (Astronomische Nachrichten, 1885): 18-21

[13] Kruzhkov S.N. *"Kvazilineinye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi"[First order quazliniear equations with many independent variables]* 81(2)(Mat. sbornik, 1970): 228-255.

[14] Massera H.L. *"Lineinye differentsialnye i funktsionalnye prostranstva"[Linear differential and functional spaces]* (M.:Mir, 1970): 50-59

[15] Mizohata S.S. *"Teoriya uravnenii s chastnymi proizvodnymi"[Partial equations theory]*(M.: Mir, 1977): 504

[16] Perron O. *Ueber diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten* VI.13, No 70, (Math. Ann., 1911): 1-32

[17] Petrovsky I.G. *"Lektsii ob uravneniyah s chastnymi proizvodnymi"[Lectures in partial equations]* 3rd ed. (M., 1961): 38-43

[18] Petrovsky I.G. *"Lektsii po teorii ODU"[Lectures in ODE]* 6th ed.(M., 1970): 114-116

[19] Smirnov V. *"Kurs vysshei matematiki"[Higher math course]* V.4, 2nd part (M.: Nauka, 1981): 551

[20] Stepanov V.V. *"Kurs differentsialnyh uravnenii"[Diffenential equations course]* 6-th ed. (Nauka.Fizmatgiz, 1959): 338-343

[21] Tichonov A.N and Samarsky A.A. *"Uravneniya matematicheskoi fiziki"[Mathematically physics equations]* 7-th ed. (M.: Izd. MGU; Nauka, 2004): 798

[22] Trikomi F. *"Lektsii po uravneniyam v chastnyh proizvodnyh"[Lectures in partial equations]* (IL., 1957): 67

[23] Wazewski T. *Sur l'appreciation du domain d'existence des integrals de l'equation aux derives partielles du premier ordre* VI.9, No.14, (Ann. Soc. Polon. Math., 1935): 149-177

[24] Wazewski T. *Ueber die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung* VI.7-9 No.43 (Math. Zeit., 1938): 522-532

[25] Yanenko N.N. and Rojdestvensky B.L. *"Sistemy kvazilineinyh uravneenii i ih prilozhenie k gazovoi dinamike"[Systems of quaziliniear differential equations and their application to gas dynamics]* VI.7-9 (M., 1978): 223-225

[26] Zubov V.I. *"Voprosy teorii vtorogo metoda Lyapunova postroeniya obsh'ego v oblasti asimptoticheskoi ustoichivocti"[General asimptotically stable domain building problems of the second method in lyapunov theory]* Vol. XIX, 2nd edition(PMM., 1955): 25-31