УДК 517.91

А. Тунгатаров

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: tun-mat@list.ru

Задача типа Дирихле для одного класса нелинейных уравнений Карлемана — Векуа с сингулярной точкой *

В настоящей работе получено достаточное условие существования непрерывных решений в некоторой угловой неограниченный области плоскости задачи типа Дирихле для одного класса эллиптических систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на плоскости с сингулярной точкой, которая возникает в теории бесконечно малых изгибании поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения общей структуры. При сведении указанной задачи к нелинейному интегральному уравнению использована формула нахождения общего решения соответствующей эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на плоскости с сингулярной точкой, полученная А. Тунгатаровым. Для доказательства существования непрерывных решений задачи Дирихле использован принцип неподвижной точки Шаудера.
Ключевые слова: Задача Дирихле, уравнение Карлемана — Векуа, эллиптическая система, нелинейное уравнение, неограниченная область.

A. Tungatarov

The Dirichlet type problem for a class of nonlinear Carleman — Vekua equations with a singular point

In this paper we obtain sufficient condition for existence of continuous solutions in the infinite angular domain Dirichlet type problem for a class of the first order elliptic systems of nonlinear partial differential equations on the plane with a singular point which occurs in the theory of infinitesimal deformations of surfaces of positive curvature with a flat point of general structure. For the reduction of this problem to a nonlinear integral equation we use the formula for finding of general solution of appropriate first order partial differential elliptic system of linear equations on the plane with a singular point which was obtained by A. Tungatarov. Schauder fixed point principle was used to prove the existence of continuous solutions of the Dirichlet problem.
Key words: Dirichlet problem, Carleman — Vekua equation, elliptic system, nonlinear equation, unbounded domain.

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 1642 / ГФ 2

Ә. Түнғатаров

Сингулярлы нүктесі бар бір сызықты емес Карлеман — Векуа теңдеулер классы үшін Дирихле түріндегі есеп

Бұл жұмыста жалпы құрылымды тегіс нүктесі бар оң иілімді беттердің шексіз аз иілу теориясында кездесетін жазықтықта сингулярлы нүктесі бар бірінші дәрежелі дербес туындыны сызықты емес эллиптикалық дифференциалдық теңдеулердің бір жүйелері үшін Дирихле түріндегі есептің үзіліссіз функциялар кеңістігінде шешілуінің жеткілікті шарты алынған. Айтылып отырған есепті интегралдық сызықты емес теңдеуге келтіру кезінде сингулярлы нүктесі бар сәйкес сызықты эллиптикалық дербес туындылы теңдеулердің Ә.Түнғатаров құрған жалпы шешімі пайдаланылған. Дирихле есебінің үзіліссіз шешімдерінің бар болуы Шаудердің қозғалмайтын нүкте принципін пайдалану арқылы дәлелденген.

Түйін сөздер: Дирихле есебі, Карлеман — Векуа теңдеуі, эллиптикалық жүйе, сызық-ты емес теңдеу, шексіз облыс.

1. Постановка краевой задачи

Пусть $0 < \varphi_0 \leq 2\pi$, $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}$; ν, σ – заданные положительные, a, γ – заданное комплексное числа; $S[0, \varphi_0]$ – класс существенно ограниченных и измеримых в $[0, \varphi_0]$ функции $f(\varphi)$ с нормой $\|f\|_1 = \sup vrai_{\varphi\in[0,\varphi_0]}|f(\varphi)|$.

Рассмотрим в G уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + \frac{b(\varphi)}{2\bar{z}}\overline{W} = \frac{a(z^\nu, W)}{2\bar{z}}, \tag{1}$$

где $b(\varphi) \in S[0, \varphi_0]$, а $a(z, W)$ – непрерывная по совокупности переменных в области $\{(z, W) : z \in G \; |r^{-\nu}W - \gamma| < \sigma\}$, однородная функция первого порядка относительно z, W, т.е. для любого действительного числа t имеет место равенство $a(tz, tW) = ta(z, W)$. Мы ищем решение уравнения (1) в виде

$$W = r^\nu e^{i\nu\varphi}V(\varphi) = z^\nu V(\varphi), \tag{2}$$

где

$$V(\varphi) \in C[0, \varphi_0] \cap W^1_\infty[0, \varphi_0].$$

Здесь $W^1_\infty[0, \varphi_0]$ – класс функций $f(\varphi)$, для которых $f'(\varphi) \in S[0, \varphi_0]$.

Для уравнения (1) рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача D. *Требуется найти решение уравнения (1) в виде (2), удовлетворяющее условию*

$$V(0) = \gamma, \tag{3}$$

где γ – заданное комплексное число.

Следует отметить, что уравнение (1) является комплексной записью нелинейной эллиптической системы дифференциальных уравнений в частных производных на плоскости с сингулярной точкой, а задача D – задачей типа Дирихле для системы (1), граничное условие которой задана на положительной действительной оси: $\varphi = 0$.

2. Решениие задачи Дирихле

Уравнение (1) в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial W}{\partial \varphi}+\frac{b(\varphi)}{r}\overline{W}=\frac{r^{\nu}a(e^{i\nu\varphi},r^{-\nu}W)}{r}. \tag{4}$$

Здесь мы использовали свойство однородности функции $a(t,W)$ относительно z, W.

Подставляя (2) в (4), получим уравнение относительно V :

$$V^{'}-b_1(\varphi)\overline{V}=a_1(\varphi,V), \tag{5}$$

где $b_1(\varphi)=ib(\varphi)e^{-2i\nu\varphi}$, $a_1(\varphi,V)=-ie^{-i\nu\varphi}a(e^{i\nu\varphi},e^{i\nu\varphi}V)$.

Для решения нелинейного уравнения (5) используем общее решение уравнения

$$V^{'}-b_1(\varphi)\overline{V}=a_1(\varphi), \tag{6}$$

построенное в [3,4].

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$V(\varphi)=\bar{c}P_1(\varphi)+cP_2(\varphi)+P_3(\varphi), \tag{7}$$

где c-произвольное комплексное число,

$$P_1(\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}J_{2j-1}(\varphi),\ \ P_2(\varphi)=1+\sum_{j=1}^{\infty}J_{2j}(\varphi),\ \ P_3(\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(\varphi),$$

$$J_1(\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}b_1(t)dt,\ \ J_j(\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}b_1(t)\overline{J_{j-1}(t)}dt,(j=\overline{2,\infty}),$$

$$A_0(\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}a_1(t)dt,\ \ A_j(\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}b_1(t)\overline{A_{j-1}(t)}dt,(j=\overline{2,\infty}).$$

Относительно функции $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$, $P_3(\varphi)$ справедливы следующие оценки и соотношения:

$$|P_1(\varphi)|\le \mathrm{sh}(|b_1|_1\cdot\varphi),\ \ |P_2(\varphi)|\le \mathrm{ch}(|b_1|_1\cdot\varphi),\ \ |P_3(\varphi)|\le |A_0|_0\exp(|b_1|_1)\varphi, \tag{8}$$

где $|f|_0=\max_{0\le\varphi\le\varphi_1}|f(\varphi)|$,

$$P_1^{'}=b_1(\varphi)\overline{P_2},\ \ P_2^{'}=b_1(\varphi)\overline{P_1},\ \ P_3^{'}=b_1(\varphi)\overline{P_3}+a_1(\varphi) \tag{9}$$

Из последних равенств в силу явных видов функции $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$ и $P_3(\varphi)$ получим

$$\begin{gathered}P_1(\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}b_1(t)\overline{P_2(t)}dt, \qquad P_2(\varphi)=1+\int\limits_0^{\varphi}b_1(t)\overline{P_1(t)}dt,\\ P_3(\varphi)=1+\int\limits_0^{\varphi}b_1(t)\overline{P_3(t)}dt+\int\limits_0^{\varphi}a_1(t).\end{gathered} \tag{10}$$

Из (9) следует, что функция $V(\varphi)$, определенная по формуле (7), является решением уравнения (6) из класса $C^1[0,\varphi_0]$. Используя второе равенство формул (10) можно получить тождество [3]:

$$|P_2(\varphi)|^2 - |P_1(\varphi)|^2 \equiv 1$$

Из этого тождества и равенств (9) следует, что Вронскиан функции $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$ равен $-\,b_1(\varphi) \neq 0$. Поэтому функции $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$ линейно независимы в $[0,\varphi_0]$.

В силу формулы (7) для решения уравнения (4) используем интегральное уравнение

$$V(\varphi) = \bar{c}P_1(\varphi) + cP_2(\varphi) + P_3(\varphi, V), \tag{11}$$

где

$$P_3(\varphi, V) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(\varphi, V), \qquad A_0(\varphi, V) = \int_0^{\varphi} a_1(t, V(t))dt,$$

$$A_j(\varphi, V) = \int_0^{\varphi} b_1(t)\overline{A_{j-1}(t, V(t))}dt, (j = \overline{1,\infty}).$$

Из (8) и (10) следует

$$\begin{aligned} &|P_1(\varphi)| \leq |b_1|_1 \cdot \mathrm{ch}(|b_1|_1 \cdot \varphi_0) \cdot \varphi, \\ &|P_2(\varphi) - 1| \leq |b_1|_1 \cdot \mathrm{sh}(|b_1|_1 \cdot \varphi_0) \cdot \varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &|P_1(\varphi_2) - P_1(\varphi_1)| \leq |b_1|_1 \cdot \mathrm{sh}(|b_1|_1 \cdot \varphi_0)| \cdot |\varphi_2 - \varphi_1|, \\ &|P_2(\varphi_2) - P_2(\varphi_1)| \leq |b_1|_1 \cdot \mathrm{ch}(|b_1|_1 \cdot |\varphi_0)| \cdot \varphi_2 - \varphi_1|, \end{aligned} \tag{13}$$

где $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \varphi_0$.

Пусть a_2 – максимум функции $|P_3(\varphi, V)|$ в области $\{(\varphi, V) : 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, |V - \gamma| < \sigma\}$. Из вида функции $P_3(\varphi, V)$ следуют неравенства

$$|P_3(\varphi, V)| \leq a_2 \cdot (\exp(|b_1|_1 \cdot \varphi_0) - 1), \tag{14}$$

$$|P_3(\varphi_2, V) - P_3(\varphi_1, V)| \leq a_2(1 + |b_1|_1) \cdot (\exp(|b_1|_1 \cdot \varphi_0) - 1)|\varphi_2 - \varphi_1|. \tag{15}$$

Из вида функций $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$, $P_3(\varphi, V)$ следует, что правая часть равенства (11) принадлежит классу $C^1[0,\varphi_0]$. Если берем производную от обеих частей равенства (11), то получим уравнение (5). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Любое решение уравнения (11) из класса $C[0,\varphi_0]$,будет решением уравнения (5) из класса $C^1[0,\varphi_0]$.*

Теперь решение $V = V(\varphi)$ уравнения (5) подчиним условию (3). Для этого из (11) с учетом равенств $P_1(0) = P_3(0, V) = 0, P_2(0) = 1$ получим равенство $c = \gamma$.

Следовательно, любое решение из класса $C[0,\varphi_0]$ уравнения

$$V(\varphi) = (TV)(\varphi), \tag{16}$$

где $(TV)(\varphi) = \bar{\gamma}P_1(\varphi) + \gamma P_2(\varphi) + P_3(\varphi, V)$, будет и решением уравнения (5), удовлетворяющим условию (3).

Пусть

$$|\gamma| \cdot |b_1|_1 \cdot \varphi_0 \cdot \exp(|b_1|_1\varphi_0) + a_2(\exp(|b_1|_1\varphi_0) - 1) < \sigma. \tag{17}$$

Неравенство (17) можно добиться за счет малости числа φ_0. Пусть имеет место неравенство (17). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2 *В области* $\{(\varphi, W) : 0 \leq \varphi \leq \varphi_0,\ |r^{-\nu}W - \gamma| < \sigma\}$*, где число* φ_0 *удовлетворяет условию (17), существует хотя бы одно решение уравнения (1) в виде (2), удовлетворяющее условию (3).*

Доказательство. Если существует решение уравнения (16) из класса $C[0, \varphi_0]$, то в силу теоремы 1 это решение будет решением уравнения (5), удовлетворяющее условию (3). Поэтому существует решения задачи D в виде (2), где $V(\varphi)$ – решение уравнения (6), удовлетворяющее условию (3).

Пусть $\|V\| = \max_{0\leq\varphi\leq\varphi_0} |V(\varphi)|$. Рассмотрим оператор T, определенный равенством

$$(TV)(\varphi) = \bar{\gamma}P_1(\varphi) + \gamma P_2(\varphi) + P_3(\varphi, V),$$

на шаре $\|V - \gamma\| \leq \sigma$ пространства $C[0, \varphi_0]$. В силу неравенств (12) – (15) и (17) оператор $(TV)(\varphi)$ преобразует замкнутое выпуклое множество функции $V(\varphi)$ в свою компактную часть. Поэтому согласно принципу Шаудера уравнение (16) имеет решение из класса $C[0, \varphi_0]$.

Теорема доказана.

Литература

[1] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

[2] *Усманов З.Д.* Бесконечно малые изгибании поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Differential Geometry. Banach Center Publications. Warsaw. 1984. – V.12. – P. 241–272.

[3] *Усманов З.Д.* Изометрически сопряженная параметризация поверхности в окрестности точки уплощения // Докл. расширенных заседании семинара института прикладной математики им. И.Н. Векуа. – Т.1. – №1. – Тбилиси, 1985. – С. 205–208.

[4] *Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.* Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. – Алматы: "Ғылым" , 2005. – 169 с.

[5] *Тунгатаров А.* О непрерывных решениях уравнения Карлемана — Векуа с сингулярной точкой // ДАН СССР. 1991. – Т.319. – №3. – С. 570–573.

[6] *Akhmed–Zaki D.K., Danaev N.T., Tungatarov A.* Elliptic systems in the plane with singular coeficients along lines // TWMC Jour. Pure Apple. Math. – V.3. – №1. – 2012. – P. 3–9.

[7] *Тунгатаров А.* Об одном классе нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Материалы международной научно–практической конференции "Теория функций, функциональный анализ и их приложения" , посвященной 90 летию со дни рождения член — корр. АН КазССР, доктора физмат. наук, профессора Т.И. Аманова, 1–том,- Семей,–2013. – С. 132–136.

[8] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

References

[1] *Vekua I.N.* Obobshchennye analiticheskie funktsii. – M.: Fizmatgiz, 1959. – 628 s.

[2] *Usmanov Z.D.* Beskonechno malye izgibaniya poverkhnostei polozhitel'noi krivizny s tochkoi uploshcheniya // Differential Geometry. Banach Center Publications. Warsaw. 1984. – V.12. – P. 241–272.

[3] *Usmanov Z.D.* Izometricheski sopryazhennaya parametrizatsiya poverkhnosti v okrestnosti tochki uploshcheniya // Dokl. rasshirennykh zasedaniy seminara instituta prikladnoi matematiki im. I.N. Vekua. – T.1. – №1. – Tbilisi, 1985. – S. 205–208.

[4] *Abdymanapov S.A., Tungatarov A.* Nekotorye klassy ellipticheskikh sistem na ploskosti s singulyarnymi koeffitsientami. – Almty: "Gylym" , 2005. – 169 s.

[5] *Tungatarov A.* O nepreryvnykh resheniyakh uravneniya Karlemana–Vekua s singulyarnoi tochkoi // DAN SSSR. 1991. – T.319. – №3. – S. 570–573.

[6] *Akhmed–Zaki D.K., Danaev N.T., Tungatarov A.* Elliptic systems in the plane with singular coeficients along lines // TWMC Jour. Pure Apple. Math. – V.3. – №1. – 2012. – P. 3–9.

[7] *Tungatarov A.* Ob odnom klasse nelineinykh sistem obyknovennykh differentsial'nykx uravneniy pervogo poryadka // Materialy mezhdunarodnoi nauchno–prakticheskoi konferentsii "Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya" , posvyashchennyy 90 letiyu so dnya rozhdeniya chlen–korr. AN KazSSR, doktora fizmat. nauk, professora T.I. Amanova, 1–tom. Semei,–2013. – S. 132–136.

[8] *Lyusternik L.A., Sobolev V.I.* Elementy funktsional'nogo analiza. – M.: Nauka, 1965. – 519 s.