

Применение компьютерной алгебры в решении Ньютоновой проблемы многих тел

Д.М. Диарова¹, Н.И. Земцова²

¹Атырауский институт нефти и газа, Атырау, Казахстан,

²ВЦ РАН им. А. А. Дородницына, Москва, Россия

ddiarova@mail.ru, zemni@yandex.ru

Аннотация. Описан алгоритм компьютерного моделирования динамики в ньютоновой ограниченной задаче многих тел на основе опыта использования системы компьютерной алгебры Mathematica.

Ключевые слова: динамические системы, дифференциальные уравнения, стационарные решения, устойчивость, компьютерная алгебра

1 Введение

Проблема интегрируемости дифференциальных уравнений аналитической и небесной механики сформулирована в известных трудах Ньютона, Лагранжа, Эйлера[1]. И с тех пор предпринимались и предпринимаются многочисленные попытки проинтегрировать эти уравнения в квадратурах. После доказательства Пуанкаре теорем о несуществовании первых интегралов гамильтоновых уравнений задачи трех тел в виде однозначных трансцендентных функций [2], была принята, можно сказать, новая трактовка проблемы интегрируемости систем дифференциальных уравнений гамильтоновой динамики: первоочередной задачей является нахождение любых частных решений (например, решений типа положений равновесия) и исследование их устойчивости в различных трактовках этого понятия.

Дифференциальные уравнения движения в ньютоновой задаче n тел с массами m_1, m_2, \dots, m_n относительно тела P_0 с массой m_0 в декартовой системе координат P_0xyz имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_k}{dt^2} = -\frac{(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n m_s \left(\frac{(x_s - x_k)}{\Delta_{ks}^3} - \frac{x_s}{r_s^3} \right), \\ \frac{d^2 y_k}{dt^2} = -\frac{(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n m_s \left(\frac{(y_s - y_k)}{\Delta_{ks}^3} - \frac{y_s}{r_s^3} \right), \\ \frac{d^2 z_k}{dt^2} = -\frac{(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n m_s \left(\frac{(z_s - z_k)}{\Delta_{ks}^3} - \frac{z_s}{r_s^3} \right), \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

При исследовании нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений практически всегда возникает вопрос о существовании таких частных решений, которые обладают какой-либо симметрией, сохраняемой в процессе изменения независимой переменной.

А.Винтнер в монографии [3] показал, что дифференциальные уравнения (1) ньютоновой проблемы многих тел допускают решения, сохраняющие с течением времени углы в конфигурации и пропорциональное подобие между всеми взаимными расстояниями в ней. Такие решения принято называть *гомографическими решениями*. Примером таких конфигураций являются знаменитые частные решения дифференциальных уравнений ньютоновой

проблемы трех тел, найденные Эйлером и Лагранжем, так называемые в математической литературе коллинеарные решения Эйлера и треугольник Лагранжа [1].

В последние годы Е.А.Гребениковым [4] были предложены новые модели космической динамики, в которых гравитационное поле создается телами, образующими правильные многоугольники, вращающиеся вокруг центрального тела. Данные работы и возможности систем компьютерной алгебры (например, система Mathematica [5]), дали возможность найти множество новых гомографических решений.

Известно [6], что всякое гомографическое решение ньютоновой проблемы n тел порождает новую динамическую модель - ограниченную проблему $(n+1)$ тел, состоящую в исследовании всевозможных движений бесконечно малой массы в поле притяжения n гравитирующих масс.

Качественные исследования ограниченной ньютоновой проблемы $(n+1)$ тел состоят, в частности, в нахождении стационарных решений и проверке их на устойчивость в различных трактовках.

Для решения вышеизложенных задач был разработан алгоритм компьютерного моделирования в системе Mathematica и написан комплекс соответствующих программ. Данный алгоритм состоит из описанных ниже этапов.

2 Нахождение новых гомографических решений

Сюда, в первую очередь, следует отнести визуализацию моделей, геометрически изображаемых определенными фигурами в декартовой системе координат. Например, на рис.1 изображены конфигурации ньютоновой задачи 4-х, 7-ми и 9-ти тел. "Жирными" точками обозначены гравитирующие тела.

Программа в системе Mathematica, позволяющая построить рисунок исследуемой модели, состоит из следующих инструкций:

```
Figure[sp_] := Module[lines, points, gr1, gr2, t0,
(* sp - список координат тел в конфигурации: {xk, yk}*)
lines = Table[Append[sp[[i]], sp[[i, 1]]], {i, 1, Length[sp]}];
r1 = Flatten[sp, 1];
If[FreeQ[r1, 0, 0], t0 = {},
r1 = Drop[r1, Position[r1, {0,0}][[1]]];
t0 = {Text[P0], {0,0},{-2, -2}}];
gr1 = Graphics[Table[Text[ToString[Pk], StandardForm],
r1[[k]], -2.5 r1[[k]], {k, 1, Length[r1]} Join t0,
BaseStyle -> {FontWeight -> Bold, FontSize -> 12}];
points = Append[{PointSize[0.027]},
Table[Point[Flatten[sp, 1][[i]],{i,1,Length[Flatten[sp, 1]}]]];
gr2 = Graphics[ {points, {Dashing[0.02], Thickness[0.0065],
Line[lines]}}];
Show[gr1, gr2, AspectRatio -> Automatic, Axes -> Automatic,
Ticks -> {{-1, 1}, {-1, 1}} ]
```

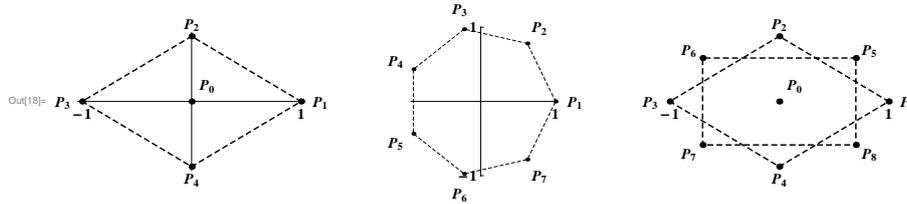


Рис. 1. Некоторые динамические модели ньютоновой задачи многих тел.

Далее исходим из необходимых и достаточных условий существования центральных конфигураций n тел [6]:

$$\begin{aligned} \omega^2 x_k &= \frac{m_0 x_k}{(x_k^2 + y_k^2)^{3/2}} + \sum_{j=1, j \neq k}^n m_j \frac{x_k - x_j}{((x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2)^{3/2}}, \\ \omega^2 y_k &= \frac{m_0 y_k}{(x_k^2 + y_k^2)^{3/2}} + \sum_{j=1, j \neq k}^n m_j \frac{y_k - y_j}{((x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2)^{3/2}}, \\ k &= 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

где $x_i, y_i, i = \overline{1, n}$ - координаты i -го тела, $m_i, i = \overline{0, n}$ - масса i -го тела, ω - угловая скорость вращения конфигурации.

Решая эту систему, для каждой конкретной модели получаем аналитические соотношения между динамическими (массы тел и угловая скорость вращения конфигурации) и геометрическими (размеры конфигурации) параметрами модели. Данные соотношения являются условием существования точного гомографического решения, изображаемого данной геометрической фигурой, для ньютоновой задачи. Далее вычисляем допустимые значения параметров модели, при которых конфигурация имеет физический смысл.

Например, для гомографического решения – ромба, изображенного на рис.1, условия существования решения следующие:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_3, \\ m_2 &= m_4 = \frac{4m_0(1 + \alpha^2)^{3/2}(\alpha^3 - 1) + m_1(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}, \\ \omega &= \left(\frac{m_0(1 + \alpha^2)^{3/2}(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(1 + \alpha^2)^{3/2}(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})} + \frac{m_1(64\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{4\alpha^3(1 + \alpha^2)^{3/2}(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})} \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3}$$

3 Ограниченная ньютонова задача многих тел. Нахождение стационарных решений

Найденные точные решения дифференциальных уравнений общей ньютоновой задачи n тел позволяют нам сформулировать ограниченную ньютонову задачу $(n + 1)$ - тел [6,8,9].

Суть ограниченной ньютоновой задачи $(n + 1)$ тел состоит в изучении движения тела P с бесконечно малой массой в поле гравитации, создаваемом в пространстве P_0xyz взаимным притяжением тел $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, движущихся в пространстве с постоянной угловой скоростью ω и образующих некую определенную конфигурацию.

Ее математическая модель описывается системой дифференциальных уравнений [6,8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m_0x}{r^3} + \sum_{s=1}^{12} m_s \left(\frac{x-x_s}{\Delta_s^3} - \frac{x_s}{r_s^3} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{m_0y}{r^3} + \sum_{s=1}^{12} m_s \left(\frac{y-y_s}{\Delta_s^3} - \frac{y_s}{r_s^3} \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{m_0z}{r^3} + \sum_{s=1}^{12} m_s \left(\frac{z-z_s}{\Delta_s^3} - \frac{z_s}{r_s^3} \right), \\ r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ r_s = (x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)^{1/2}, \\ \Delta_s = ((x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2)^{1/2}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Задача нахождения стационарных решений дифференциальных уравнений, описывающих динамическую модель ограниченной ньютоновой проблемы $(n+1)$ тел сводится к решению системы нелинейных иррациональных алгебраических уравнений [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = \omega^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \\ \quad - \sum_{i=1}^n m_i \frac{x - x_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}} = 0, \\ g(x, y) = \omega^2 y - \frac{m_0 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \\ \quad - \sum_{i=1}^n m_i \frac{y - y_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Сложность данной системы уравнений делает невозможным нахождение ее решения в компактном аналитическом виде, поэтому разумно искать решения для конкретных значений параметров. Сочетание графических и численных методов дают общую наглядную картину наличия таких решений и точные (с допустимой "машинной точностью") численные значения координат стационарных точек. На рис.2 решение $f(x,y)=0$ изображено сплошной линией, а $g(x,y)=0$ - пунктирной линия. Точки пересечения этих линий – стационарные решения.

Инструкции системы Mathematica для построения данного графика при заданных параметрах динамической модели (массы тел и размеры конфигурации) имеют следующий вид:

$$wx[x_-, y_-] := \omega^2 * x - \frac{x m_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_i) m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

$$wy[x_-, y_-] := \omega^2 * y - \frac{y m_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(y - y_i) m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

```
spx=ContourPlot[wx,{x,1.5,-1.5},{y, 1.5,-1.5}, Contours ->{0},
ContourShading ->False, PlotPoints->pts,
DisplayFunction->Identity,
ContourStyle->{Thickness[0.006]}];
spy=ContourPlot[wy,{x,1.5,-1.5},{y,1.5,- 1.5},
Contours->{0},ContourShading->False, PlotPoints->50,
DisplayFunction->Identity,
```

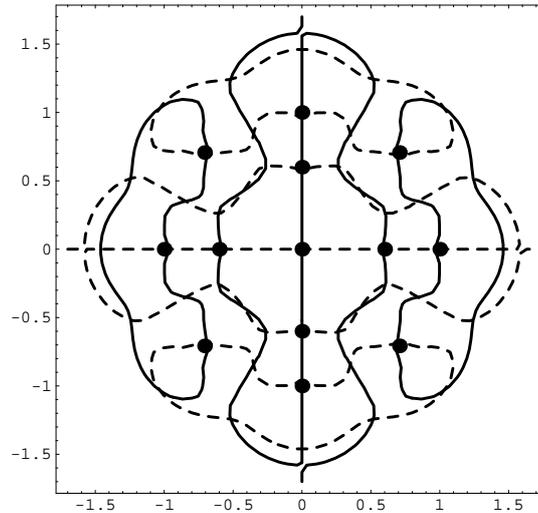


Рис. 2. Графическое решение системы (3) для двухкольцевой задачи 13-ти тел.

```
ContourStyle→{Dashing[{0.02,0.02}],Thickness[0.006]};
points = Graphics[ Join[PointSize[0.03], Point[{0, 0}],
Table[Point[{xi, yi}], {i, 1, n}]]];
Show[cpx,cpy,points,Axes→False,
DisplayFunction→$DisplayFunction]
```

Для нахождения численного значения стационарного решения для конкретных значений параметров модели используются следующие инструкции системы Mathematica (здесь x_0, y_0 – начальное приближение стационарной точки):

$$sx = \omega^2 * x - \frac{x m_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_i) m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

$$sy = \omega^2 * y - \frac{y m_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(y - y_i) m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

```
sol=FindRoot[{sx==0,sy==0},{x,x0},{y,y0}, MaxIterations → 10000];
```

4 Исследование линейной устойчивости стационарных решений

Для исследования линейной устойчивости найденных стационарных решений, согласно методу Ляпунова [6,7], нужно выполнить процедуру линеаризации правых частей нормальной системы для системы дифференциальных уравнений (4), описывающей ограниченную задачу, в окрестности любой стационарной точки и вычислить собственные значения матрицы этой линеаризованной системы.

В результате линеаризации получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

где матрица A имеет вид [6]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 2\omega \\ b & c & -2\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления элементов матрицы A и ее собственных значений для конкретной стационарной точки с координатами (x^*, y^*) используются следующие инструкции системы Mathematica:

$$f = \omega^2 * x - \frac{xm_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_i)m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

$$g = \omega^2 * y - \frac{ym_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(y - y_i)m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

`a=D[f,x]/.{x->x*,y->y*}; b=D[f,y]/.{x->x*,y->y*}`

`c=D[g,y]/.{x->x*,y->y*};`

`A={{0,0,1,0},{0,0,0,1},{a,b,0,2w},{b,c,-2w,0}};`

`ev=Eigenvalues[A];`

5 Исследование устойчивости стационарных решений по Ляпунову.

Известно, что исследование проблемы устойчивости в смысле Ляпунова положений равновесия гамильтоновых систем 4-го порядка возможно только на основании КАМ-теории [6] (теории существования условно-периодических решений многомерных гамильтоновых систем, созданной А.Н. Колмогоровым, В.И. Арнольдом и Ю.Мозером).

В ее рамках выполняются преобразования Пуанкаре-Биркгофа нормализации гамильтониана ограниченной задачи в окрестности стационарной точки и применяется теорема Арнольда-Мозера об устойчивости решений гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Эти достаточно громоздкие преобразования, выполненные в системе Mathematica, подробно описаны в работах [8,9,10].

При исследовании устойчивости по Ляпунову стационарных решений в случае наличия "частотных" резонансов мы использовали теоремы А.П. Маркеева, относящиеся именно к "резонансным" ситуациям и несколько «корректирующие» преобразования Пуанкаре-Биркгофа.

6 Численные исследования положений равновесия

Используя численные методы, реализованные в ССВ Mathematica, можно локально проинтегрировать дифференциальные уравнения ограниченной задачи $(n + 1)$ - тел, найденные решения записать в виде интерполяционных функций на определенных промежутках времени, а затем построить фазовые портреты исследуемых положений равновесия и оценить величину возмущений начальных координат.

На рис. 3 слева изображен график траектории точки с бесконечно малой массой с начальными малыми возмущениями от стационарного решения по координатам

(0.0001,0.0001) и по проекциям скоростей (0.0001,0.0001) для двухкольцевой ограниченной задачи $(3n+1)$ -тел ($n=4$)[10] при $0 < t < 1000$, а справа изображены отклонения этой траектории от положения равновесия.

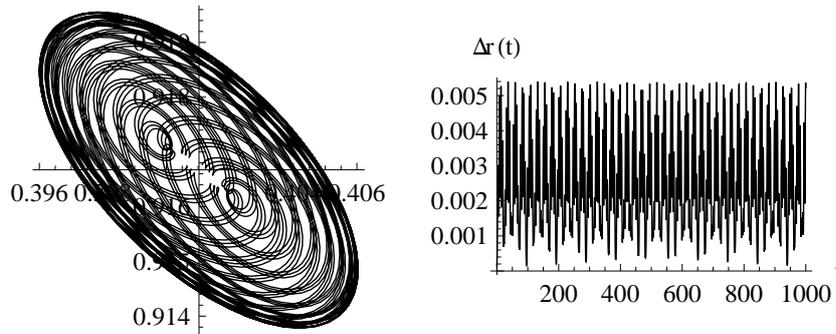


Рис. 3. Графики траектории точки и отклонения траектории точки.

Данные графики построены при помощи следующих инструкций системы Mathematica:

```


$$sx = \omega^2 * x[t] - \frac{x[t]m_0}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{(x[t] - x_i)m_i}{((x[t] - x_i)^2 + (y[t] - y_i)^2)^{3/2}};$$


$$sy = \omega^2 * y[t] - \frac{y[t]m_0}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{(y[t] - y_i)}{((x[t] - x_i)^2 + (y[t] - y_i)^2)^{3/2}};$$

sol=NDSolve; [{ x''[t]-2\omega y'[t] == sx, x[0] == x* + 0.0001,
x'[0] == 0.0001, y''[t] + 2\omega x[t] == s[y], y[0] == y* + 0.0001,
y'[0] == 0.0001 }, {x, y}, {t, 0, 1000}];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.sol],{t,0,1000}, AxesOrigin->{x*,y*},
AspectRatio -> 1]
Plot[Evaluate[((x[t] - x*)^2 + (y[t] - y*)^2)^{1/2} /. r1], {t, 0, 1000},
AxesLabel->{"t " "\Delta r(t)"}]

```

7 Анимация графической информации

Существенную помощь в понимании механизма движения могут оказать "визуалистические" и анимационные возможности системы Mathematica, позволяющие наблюдать движение бесконечно малой массы в динамике, как функцию времени. Процедуры для анимации графической информации, написанные в среде Mathematica, подробно представлены в работе [11].

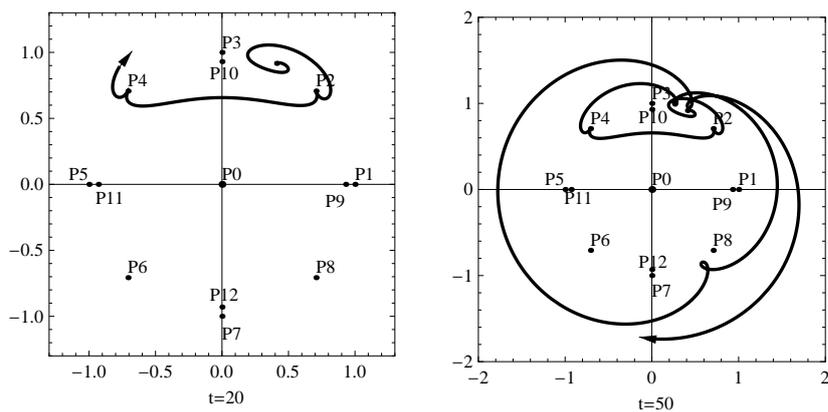


Рис. 4. График движения неустойчивой стационарной точки двухкольцевой ограниченной задачи $(3n+1)$ -тел ($n=4$) для двух моментов времени.

Список литературы

1. Абалакин В.К., Аксенов В.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. –М.: Наука, 1976. –864 с.
2. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. –М.: Наука, 1971.
3. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. –М.: Наука, 1967. –512с.
4. Гребеников Е.А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел. //Мат.моделирование. –Москва, 1998. № 8(10). –С. 75-80.
5. Дьяконов В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. –М.: СОЛОН-Пресс, 2004. –696с.
6. Гребеников Е.А., Козак-Сковородкин Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. –М.: РУДН, 2002.–209с.
7. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. –Харьков: Изд-во Харьковского математического общества, 1892.
8. Диарова Д. М. Гомографические решения ньютоновой проблемы многих тел. –М.: РУДН, 2013. –234с.
9. Земцова Н.И. Качественные исследования ньютоновой проблемы многих тел методами компьютерной алгебры. Препринт. –М.: Изд-во ВЦ РАН, 2010. –61с.
10. Диарова Д.М., Земцова Н.И. Нормализация квадратичной формы гамильтониана ограниченной задачи шести тел. //Труды 3-й Межд.научной конференции "Математическое моделирование и дифференциальные уравнения". –Минск: Изд.центр БГУ, 2012. С.117-122.
11. Гребеников Е.А., Гадамский Л., Н.И.Земцова Н.И., Якубяк М. Анимация графической информации в ограниченных ньютоновых задачах многих тел. Препринт. –М.: Изд-во ВЦ РАН, 2006. –45с.