Задачи уравнения переноса и ядерно-геофизические технологии

А.И. Хисамутдинов

Институт нефтегазовой геологии им. А.А. Трофимука, Новосибирск, Россия
KhisamutdinovAI@ipgg.sbras.ru

Аннотация. В настоящем докладе рассматриваются задачи уравнения переноса, связанные с ядерно-геофизическими технологиями. Основное внимание уделено проблемам восстановления параметров по данным измерений. Дается некоторый обзор современного состояния. Приводятся новые результаты по развитию подхода и методов “последовательные приближения по характерным взаимодействиям”.

Ключевые слова: Уравнение переноса, ядерно-геофизические технологии, восстановление параметров, интерпретация данных измерений, численные методы

1 Введение

Уравнение переноса применяют для описания физико-кинетических процессов распространения частиц в различных средах; в том числе, в физике реакторов, в астрофизике и атмосферной оптике, в ядерно-геофизических технологиях изучения горных пород и нефте-газоносных пластов, а также при исследовании поверхностей планет. В настоящем докладе рассматриваются обратные задачи уравнения переноса, связанные с ядерно-геофизическими технологиями(ЯГТ). Нельзя не отметить, что последние входят в обязательный комплекс «геофизического исследования скважин», что гамма-гамма метод использовался при восстановлении плотности поверхностного слоя Луны и что численные решения задач об ЯГТ ориентированы на суперкомпьютеры.

В работе речь идет о постановке обратных задач уравнения переноса и численных методах их решения, о восстановлении параметров коэффициентов этого уравнения по данным измерений функционалов от потоков частиц и об определении соответствующих параметров горной породы, используя ядерно-геофизические технологии. Основное внимание уделяется развитию подхода и метода «последовательные приближения по характерным взаимодействиям», сформулированного автором ранее в [23], [31],[24]. Проблема конструирования математической, или компьютерной, инверсии является актуальной как для многих проблем переноса частиц, так и других разделов науки, и итерационные методы — один из путей её решения (см., напр.,[15], [9],[6], [10], [16], [12], [7]).

Для уравнения переноса в различных областях его приложения изучают разного типа обратные задачи(см., напр., [10], [16], [11], [32], [4], [2]. Методы "последовательные приближения по характерным взаимодействиям"(ППХВ) развивались в связи с ядерно-геофизическими технологиями: нейтрон-активационным каротажем, рентген-флуоресцентным анализом, импульсным нейтрон-гамма каротажем [19,20,29,21,30]. Для ядерно-геофизических применений типичны высокая размерность, зависимость сечений взаимодействий от энергий, многоэлементный состав сред. Всё это создаёт трудности для анализа и решения не только обратных, но и "прямых"задач.

При геофизическом исследовании скважин, как правило, восстанавливают параметры горной породы и ее флюидов, параметры скважинных флюидов и некоторые другие(см., напр., [17,13,18]). Аналогично, речь идет о восстановлении параметров горной породы и при различных лабораторных ядерно-геофизических методах или исследоании поверхностных слоёв других планет. В условиях, когда сложна строгая математическая интерпретация, существуют и получают развитие приближенные подходы к проблеме интерпретации данных. Исторически одним из первых являлся подход на основе приближенного рассмотрения процессов переноса уравнениями диффузионного типа. Длина замедления, диффузионная длина, время жизни — вот характерные интегральные параметры горных пород, подлежащие восстановлению. Конечно, эти параметры являлись промежуточными на пути к истинным петрофизическим, к содержаниям элементов, минералов, окислов и т.д. Иногда для инверсии используют синтетический подход, в котором объединяют какие-либо приближения к процессу переноса и зависимости показаний от параметров, полученные как экспериментально, так и посредством вычислений методами Монте-Карло(см., напр., [26,33]). Иного типа приближенный подход к инверсии, имеющий непосредственное отношению к импульсному нейтрон-гамма каротажу, развивался во многих работах, включая публикации [28,27]. В этом подходе энергетический спектр γ-квантов приближается линейной комбинацией стандартных моноэлементных спектров, которые получены лабораторными измерениями. Коэффициенты линейной комбинации, yields, подлежат определению. Yields являются величинами, аналогичными коэффициентам регрессии в линейных моделях математической статистики, в задачах множественной линейной регрессии (см., напр., [5]). Они являются "промежуточными" параметрами; поэтому, далее, отношения различных yields связываются с отношениями соответствующих концентраций элементов-стандартов. Функциональная зависимость между отношениями концентраций и коэффициентов (yields) получается эмпирически на основе лабораторных измерений. Достоинством подхода является возможность приближенно оценивать состав горной породы в "реальном времени" движения каротажного прибора. В отличие от вышеизложеного в нашем подходе мы основываемся на (точном) уравнении переноса. Более того, поскольку в известном смысле оно вторично по отношению к определённого типа марковским скачкообразным процессам и цепям Маркова, то используем этот фундаментальный факт. Проблема определения параметров коэффициентов уравнения переноса эквивалентна задаче об определении этих же параметров, входящих в те или иные распределения указанных марковских процесса или цепи . Возможна трактовка рассматриваемого здесь как задач восстановления параметров соответствующих марковских процесса или цепи по некоторым заданным "измерениям", включая измерения тех или иных математических ожиданий; то есть мы можем трактовать изучаемое как некоторые проблемы математической статистики. И мы используем эту эквивалентность, а именно, прежде всего, свойство аддитивности, производя необходимые разбиения в пространстве траекторий частиц, выделяя подмножества "характерных траекторий" и представляя математические ожидания как сумму соответствующих слагаемых.

Первый шаг в излагаемом подходе состоит в выборе и назначении неизвестных параметров. В качестве таковых рассматриваем (числовые) плотности атомов или других частиц, которые участвуют в «характерных взаимодействиях». Они являются истинными неизвестными, и при наличии взаимно-однозначных соответствий через них выражаются другие параметры. Мы развиваем подход и методы ППХВ, выделяя, как и ранее, помимо характерных взаимодействий, также множества характерных траекторий и вводя матрицу характерных взаимодействий. Отметим, что в реалистичных численных экспериментах, сорпровождающих развитие подхода, на каждом итерационном шаге с использованием методов Монте-Карло решаются сопутствующие прямые задачи.

2 Обозначения, модель среды и сечения взаимодействий

2.1 Терминология, уравнения переноса

Пусть (см., напр., [8,18]) $(X) = R^3 \otimes (S_1) \otimes [0, \infty)$ – фазовое пространство координат, направлений и энергий, где (S_1) — сфера радиуса 1, и $x \equiv (r, \Omega, E) \in X$. Как $v = v(E)$ обозначаем скорости частиц, $v = |v|\Omega$. Всюду далее, где возможно, сохраняем обозначения из [23], [31], [24]; и также, как в них, группируем изучаемые задачи в форме проблем 1 и 2, или задач 1 и 2.

Обозначим:

(V_G) — пространственная область, в которой рассматривается перенос частиц, $(V_G) \subset R^3$; в случае, в котором (V_G) не совпадает со всем пространством и является лишь его частью, мы предполагаем, что эта область выпуклая и что её граница (∂V_G) является кусочно-гладкой, такой, что нормаль к ней существует почти всюду;

$(G) = (V_G) \otimes (S_1) \otimes [0, \infty)$, $(G) \subset (X)$;

(V) — подобласть в (V_G), вещественный состав которой подлежит определению; $(V) \subset (V_G)$;

$q_{in}(t, x), q_0(t, x)$ — плотности заданных источников частиц соответственно в 1-й и 2-й проблемах; предполагается, что по пространственной переменной r эти плотности отличны от 0 лишь в некоторых ограниченных подобластях в (V_G);

$\phi_{in}(t, x)$ и $\phi(t, x)$ — фазовые плотности частиц соответственно начального и конечного типов в 1-й задаче; во второй задаче $\phi(t, x)$ есть фазовая плотность частиц; $\Phi_{in}(t, x) \equiv |v|\phi_{in}(t, x)$, $\Phi(t, x) \equiv |v|\phi(t, x)$ — плотности (скалярных) потоков частиц;

$\Sigma_{in}(x)$ и $\Sigma(x)$, $\hat{S}^+_{in}$ и $\hat{S}^+$ — полные макроскопические сечения взаимодействий и линейные интегральные операторы рассеяния соответственно для частиц начального и конечного (основного) типов в 1-й проблеме; в проблеме 2 $\Sigma(x)$ и $\hat{S}^+$ есть соответственно полное макроскопическое сечение взаимодействия и линейный интегральный оператор рассеяния;

$\hat{Q}^+$ — линейный интегральный оператор в проблеме 1, описывающий появление (рождение) частиц основного типа в результате взаимодействия частиц начального типа со средой, $q(t, x) \equiv [\hat{Q}^+\Phi_{in}](t, x)$ — плотности источников частиц основного типа (в проблеме 1),

$I_i \equiv \int |v|\phi(t, x)\mathcal{E}_i(t, x)dtdx$, $i = 1, \ldots, N_M$,— заданные линейные функционалы от $\Phi(\cdot) = |v|\phi(\cdot)$, $N_M < \infty$; $\mathcal{E}_i(\cdot, \cdot)$ — весовые функции, характеризующие прибор.

Сразу условимся, что если область интегрирования не указывается, что уже было выше, то она совпадает со всей областью интегрирования. Для операторов $\hat{S}^+_{in}, \hat{S}^+$ и $\hat{Q}^+$ пространственная переменная $r \in R^3$ является параметром; через $\hat{S}_{in}, \hat{S}$ и $\hat{Q}$ обозначим интегральные операторы, сопряженные соответственно к $\hat{S}^+_{in}, \hat{S}^+$ и $\hat{Q}^+$. Каждая пара операторов задается соответствующим ядром, а именно, посредством макроскопических дифференциальных сечений взаимодействий: $S_{in}(\Omega, E \to \Omega', E'|r)$, $S(\Omega, E \to \Omega', E'|r)$ и посредством функции $Q(\Omega, E \to \Omega', E'|r)$. Считаем, что все три ядра являются обобщенными плотностями по второй паре переменных (по Ω', E') и измеримыми функциями по первой паре (по Ω, E). Мы рассматриваем случай "неразмножающих" сред в (G) и считается, что $\int q_{in}(t, x)\, dx\, dt = 1$, $\int q_0(t, x)\, dx\, dt = 1$ и что $\forall x \in (G)$ $0 \le \Sigma_{in}(x) < C_\Sigma$, $0 \le \Sigma(x) < C_\Sigma$, $C_\Sigma < \infty$; также считается, что $[\hat{Q} \cdot 1](x) < C_Q < \infty$. Заметим, что макроскопические интегральные сечения рассеяний $[\hat{S}_{in} \cdot 1](x)$ и $[\hat{S} \cdot 1])(x)$ являются слагаемыми полных сечений $\Sigma_{in}(x)$ и $\Sigma(x)$ соответственно. В проблеме 1 при рождении частицы конечного типа частица-родитель либо поглощается, либо выживает (рассеивается), изменяя энергию и направление. Макроскопические сечения этих взаимодействий являются частями (слагаемыми) сечений $\Sigma_{in}(\cdot)$ и $[\hat{S}_{in} \cdot 1](\cdot)$ соответственно. Например, рождение γ-кванта возможно как при неупругом рассеянии нейтрона, так и при радиационном захвате (поглощении) последнего.

В обеих проблемах перенос частиц рассматривается в области (G) в интервале времен $[0,+\infty)$; $(t,x) \in [0,+\infty) \otimes (G)$. В 1-й задаче система уравнений переноса в интегро-дифференциальной форме есть

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial t} + (v, \nabla \phi_{in}) + \Sigma_{in} \Phi_{in} = \hat{S}^{+}_{in} \Phi_{in} + q_{in}, \ \Phi_{in} \equiv |v| \phi_{in}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (v, \nabla \phi) + \Sigma \Phi = \hat{S}^{+} \Phi + \hat{Q}^{+} \Phi_{in}, \ \Phi \equiv |v| \phi. \end{cases} \tag{1}$$

Интегро-дифференциальное уравнение для 2-й задачи есть

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (v, \nabla \phi) + \Sigma \Phi = \hat{S}^{+} \Phi + q_0, \ \Phi \equiv |v| \phi. \tag{2}$$

В обеих проблемах считаются заданными начальные условия. Причем в задаче 1 считаем начальную фазовую плотность $\phi(t,x)_{|t=0}$ тождественно равной нулю. Если (G) не совпадает с (X), то в обеих задачах, т. е. для (1) и (2), на границе (∂V_G) считаются поставленными стандартные "нулевые" граничные условия (отсутствия потока частиц извне). В случае неограниченной среды рассматриваются решения уравнений переноса, "стремящиеся"к 0 при $|r| \to \infty$. В обеих проблемах мы рассматриваем обобщенные решения соответствующих задач системы (1) и уравнения (2), которые даются интегральной формой соответственно для системы (1) и уравнения (2). В случае, если (V_G) не совпадает с R^3, с целью учета граничных условий для интегральной формы уравнений считается, что пространственная среда вне (V_G) заполнена абсолютно поглощающим веществом, макроскопическое сечение которого также не превышает постоянной C_Σ. Наконец, предполагается, что вероятность события "не менее чем j_0 последовательных рассеяний частицы" является величиной, строго отделенной от 1 п.н.; здесь j_0 есть некоторое заданное натуральное число. Говоря «частица», имеем в виду таковые как в проблеме 2, так и любую из двух типов в проблеме 1. При данных предположениях поставленные задачи для (1) и (2) разрешимы единственным образом, и соответствующие решения могут быть записаны в форме ряда Неймана. Мы рассматриваем все фазовые плотности принадлежащими множеству обобщенных плотностей конечных мер. Интегральные уравнения, о которых говорилось выше, записаны в тех же обозначениях, что и в данной работе, в [23], [31]; поэтому здесь мы их не приводим.

Все весовые функции $\mathcal{E}_{.}$ в настоящей работе считаются ограниченными кусочно-непрерывными функциями и такими, что все линейные функционалы $I_{.}$ существуют и однозначно определены. Предполагаем, что носители плотностей q_{in} в первой проблеме и q_0 во второй не пересекаются с носителями функций $\mathcal{E}_{.}$. Наряду с функционалами $I_{.}$, которые являются также соответствующими средними по траекториям частиц, считаем заданной некоторую последовательность $\{z_i\}_{i=1}^{N_M}$ непрерывных функций от искомых параметров. Предполагаем, что $\forall i$ модули этих функций являются отделёнными от 0 и ограниченными сверху. Например, в качестве $z_{.}$ могут фигурировать линейные функционалы от Φ и какие-либо математические ожидания по траекториям частиц.

В настоящей работе мы интересуемся определением коэффициентов системы (1) и уравнения (2), а именно, макроскопических сечений взаимодействий для x таких, что $r \in (V)$; более точно, — мы интересуемся восстановлением некоторой совокупности N параметров, о которых уже говорилось как о плотностях частиц в характерных взаимодействиях и которые входят в эти сечения. Вышеуказанные коэффициенты для $r \in (V)$ восстанавливаются по заданной совокупности $\{d_i\}_{i=1}^{N_M}$ N_M измерений, или наблюдений, значений последовательности $\{J_1, \cdots, J_{N_M}\}$ непрерывных функций от искомых параметров, где $J_i = I_i/z_i$, $i = \overline{1, N_M}$. $N \le N_M$. Детально эти N параметров будут определены в следующем разделе. Обозначим: $(G_V) \equiv (V) \otimes (S_1) \otimes [0,+\infty)$, d и $J-$ столбцы данных измерений и теоретических выражений (записей) для этих измерений как функций от параметров; $d \equiv (d_1, \cdots, d_{N_M})^T$, $J \equiv (J_1, \cdots, J_{N_M})^T$. Обозначим также: $I \equiv (I_1, \cdots, I_{N_M})^T, z \equiv (z_1, \cdots, z_{N_M})^T$.

2.2 Модель вещественного состава области (V)

С физической точки зрения мы интересуемся, вообще говоря, вещественным составом области (V). Ограничиваемся здесь случаем, когда (V) есть однородная среда и состоит из набора K компонент с объемными долями $\alpha_k, \quad k = 1, ..., K$. В качестве компонент могут рассматриваться как минералы с заданными химическими составами, так и отдельные химические элементы. Обозначим как α столбец высоты K, элементами которого являются объемные доли $\alpha_k, \quad k = 1, ..., K; \quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_K)^T$. Пусть

$$\Lambda\alpha = \lambda, \tag{3}$$

где Λ — $(K - N) \times K$ матрица, а λ — столбец высоты $K - N$,

есть заданная система $K - N$ линейных уравнений связи на компоненты $\alpha; \quad K - N \geq 1$. Пусть, далее,

$$\Lambda_{neq}\alpha < \lambda_{neq} \tag{4}$$

есть заданная система конечного числа K_{neq} линейных неравенств на компоненты α, где Λ_{neq} и λ_{neq} — некоторые $K_{neq} \times K$ матрица и столбец высоты K_{neq}, соответственно. Считаем, что столбцы α принадлежат области $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \equiv \{\alpha : \alpha \in R^K, \quad \Lambda_{neq}\alpha < \lambda_{neq}, \quad \Lambda\alpha = \lambda\}, \quad \mathcal{A} \subset R^K. \tag{5}$$

Как первое в системе (3) всегда фигурирует уравнение

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1. \tag{6}$$

В системе неравенств (4) в качестве первых всегда рассматриваем K неравенств

$$\alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, K}; \quad K \leq K_{neq}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что вследствие (6) — (7)

$$\forall k \in \overline{1, K} : 0 < \alpha_k < 1.$$

Далее, заключаем, что $\mathcal{A}$ есть выпуклая ограниченная область; $\mathcal{A} \subset (0, 1)^K \subset R^K$.

Пусть $\rho_j, \quad j = \overline{1, N_e}$, — числовые плотности (или объемные концентрации в $1/m^3$) всех химических элементов, содержащихся в (V). Величины $\rho_.$ полностью определяются значениями столбца α, являясь соответствующими линейными комбинациями его компонент $\alpha_k, k = \overline{1, K}$. Список химических элементов $[1, \cdots, N_e]$ мы разбиваем на два подсписка: $[1, \cdots, N]$ и $[(N + 1), \cdots, N_e]$. В первой проблеме подсписок 1 составляют все те элементы, на которых происходят взаимодействия, в процессе которых генерируются частицы конечного (второго) типа. В проблеме 2 подсписок 1 составляют элементы, на которых имеют место рассеяния заданного выделенного типа. В проблеме 2 допускаем, что один и тот же химический элемент, входя в две различные группы компонентов, может быть представлен своими соответствующими плотностями в обоих подсписках. Например, содержания атомов водорода во флюиде и в минеральном скелете формации(горной породы). В обеих проблемах о выделенных здесь взаимодействиях будет говориться как о характерных, или главных (взаимодействиях). Будем обозначать как ρ столбец $(\rho_1, \cdots, \rho_N)^T$, т. е. столбец из числовых плотностей элементов первой группы. Имеем, что

$$\rho = \varUpsilon\alpha, \quad \text{где} \quad \varUpsilon - \text{заданная} \quad N \times K \quad \text{матрица}, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Пусть $\mathcal{U} \equiv \{\rho : \rho = \varUpsilon\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}\}$. Введем отображение

$$\varUpsilon_M : \mathcal{A} \to \mathcal{U}, \quad \rho = \varUpsilon_M(\alpha) = \varUpsilon\alpha \quad \forall\alpha \in \mathcal{A}; \quad \mathcal{U} = \varUpsilon_M(\mathcal{A}). \tag{8}$$

Предполагаем, что $\varUpsilon_M$ осуществляет взаимно-однозначное отображение $\mathcal{A}$ на $\mathcal{U}$. Считается, что все элементы $\varUpsilon_{ij}$ матрицы $\varUpsilon$ являются неотрицательными и что $\forall i \in \overline{1,N} \quad \sum_{j=1}^{K} \varUpsilon_{ij} > 0$. Тем самым, поскольку $\forall j \quad 0 < \alpha_j < 1$, то $\forall i \in \overline{1,N} \quad \rho_i = \sum_{j=1}^{K} \varUpsilon_{ij}\alpha_j > 0$ и $\rho_i < \sum_{j=1}^{K} \varUpsilon_{ij}$. Обозначим $\varPi_U = \{\rho : \forall i \in \overline{1,N} \quad 0 < \rho_i < \sum_{j=1}^{K} \varUpsilon_{ij}\}$. Имеем, что $\mathcal{U} \subset \varPi_U \subset R^N$. Множества $\mathcal{U}$ и $\varPi_U$, как и $\mathcal{A}$, являются выпуклыми ограниченными областями.

Будем обозначать как $\varUpsilon_M^{-1}$ отображение, обратное к $\varUpsilon_M$,

$$\varUpsilon_M^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{A}, \quad \alpha = \varUpsilon_M^{-1}(\rho).$$

Это обратное может быть записано в явной форме как

$$\varUpsilon_M^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = \{\alpha : \varUpsilon\alpha = \rho, \ \varLambda\alpha = \lambda, \rho \in \mathcal{U}\}.$$

Составим $K \times K$ матрицу B , в первых N строках которой располагаем матрицу $\varUpsilon$, а в последних $K - N$ строках — матрицу $\varLambda$. Составим также столбец $(\rho; \lambda)$ высоты K такой, что

$$(\rho; \lambda)^T \equiv (\rho_1, \cdots, \rho_N; \lambda_1, \cdots, \lambda_{K-N}).$$

Отображение $\varUpsilon_M^{-1}$ как раз связано с решением системы линейных алгебраических уравнений

$$B\alpha = (\rho; \lambda), \quad \rho \in \mathcal{U}; \tag{9}$$

в силу взаимно-однозначного соответствия между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{U}$:

$$|B| \equiv \det ||B|| \neq 0 \ . \tag{10}$$

2.3 Структура коэффициентов уравнения переноса в области (V)

Конкретный вид коэффициентов уравнений переноса в (1) и (2), связанных с областью (V) общего вида, дан в [23,31,24]. Ограничимся здесь лишь записью величин, относящихся к характерным взаимодействиям в рассматриваемом случае однородной области. В проблеме 1 для $x \in (G_V)$ считается, что

$$\hat{Q}^+ = \hat{Q}_0^+ + \hat{Q}_b^+,$$

где $\hat{Q}_0^+$ есть некоторый заданный, известный и независящий от ρ или α оператор; оператор $\hat{Q}_b^+$ считается тождественно равным нулю вне (V), т. е. для $x \notin (G_V)$, и

$$\hat{Q}_b^+ = \sum_{j=1}^{N} \rho_j \hat{q}_j^+ \quad \forall x \in (G_V),$$

где $q_j^+, \ j = 1, \cdots, N,$ — "парциальные" операторы, описывающие рождение частиц основного типа на 1 атом элемента j. Полагаем, что все $\hat{q}_j^+, \ j = \overline{1,N},$ являются тождественно нулевыми операторами вне (V).

В проблеме 2 считается, что в (V)

$$\hat{S}^{+} = \hat{S}^{+}_{0} + \hat{S}^{+}_{b},$$

где $\hat{S}^{+}_{b}$ есть тождественно нулевой оператор $\forall x \notin (G_V)$, т. е. вне (V), и

$$\hat{S}^{+}_{b} = \sum_{j=1}^{N} \rho_j \hat{b}^{+}_{j} \quad \forall x \in (G_V),$$

где парциальные операторы $\hat{b}^{+}_{j}, j = 1, \cdots, N$, описывают рассеяния выделенного характерного типа на 1 атом элемента j. В (V) оператор $\hat{S}^{+}_{0}$ отвечает всем остальным типам рассеяния. Для $\gamma - \gamma$ методов в случае комптоновского рассеяния следует скорректировать термины; следует говорить о плотности электронов и парциальном сечении на 1 электрон.

Все парциальные сечения, фигурирующие выше, рассматриваются как ограниченные в соответствии со свойством ограниченности полных сечений. Отметим, что взаимодействия, описываемые операторами $\hat{Q}^{+}_{b}$ и $\hat{S}^{+}_{b}$, играют в рассматриваемых проблемах особую роль. Мы говорим об этих взаимодействиях как о "характерных". Можно трактовать, что остальные взаимодействия являются лишь сопутствующими и "мешающими" для определения рассматриваемых параметров. Введем теперь для обеих рассматриваемых проблем, 1 и 2, j - е подмножество «характерных траекторий » , определяя, что на каждой траектории этого j - го подмножества содержится хотя бы одно j - е характерное взаимодействие; $j = \overline{1, N}$. В последующем разделе, развивая терминологию, введём также матрицу "характерных взаимодействий" .

3 Постановка обратных задач восстановления параметров

3.1 Предварительные замечания

В соответствии со свойствами сечений взаимодействий, источников и граничных условий решения прямых задач обеих рассматриваемых проблем существуют и единственны $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ и представляются в форме сходящегося ряда Неймана [18].

Столбцы z, I и J являются столбцами-функциями от $\alpha \in \mathcal{A}$; для последнего из них запишем:

$$J : \mathcal{A} \to \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} \subset R^{N_M}, \tag{11}$$

где через $\mathcal{J}$ обозначено множество значений столбца функций J. В некотором смысле исходную "систему уравнений измерений"для обеих изучаемых проблем восстановления параметров запишем в виде

$$J(\alpha) - d = 0 \quad \text{относительно неизвестных} \quad \alpha \, (\text{и} \quad \rho). \tag{12}$$

Считаем, что отображение (11) является непрерывным и ограниченным. Композиция $J \circ \Upsilon_M^{-1}$, или сложная функция $J(\Upsilon_M^{-1}(\cdot))$ от $\rho \in \mathcal{U}$, отображает $\mathcal{U}$ на $\mathcal{J}$,

$$J \circ \Upsilon_M^{-1} : \, \mathcal{U} \to \mathcal{J}. \tag{13}$$

Это последнее также является, как нетрудно видеть, непрерывным и ограниченным. Мы сформулируем несколько далее обратные задачи для обеих наших проблем как задачи решения систем, следующих из (12), считая при этом, что

(i) неизвестные α принадлежат некоторой подобласти $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$; $\rho \in \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1 = \Upsilon_M(\mathcal{A}_1)$;

(ii) сужения отображений (11) на $\mathcal{A}_1$ и (13) на $\mathcal{U}_1$ являются гомеоморфизмами, и

(iii) $d \in J(\mathcal{A}_1) = J \circ \Upsilon_M^{-1}(\mathcal{U}_1)$.

В силу трёх вышеданных предположений решения обеих обратных проблем существуют и единственны. Нашей целью, и это—основная цель данной работы, является построение численного метода для решения обратных задач в рамках поставленных двух проблем.

Введём квадратную диагональную матрицу-функцию Z порядка N_M с диагональными элементами $Z_{|ii} = z_i$, $i = \overline{1, N_M}$. Матрица Z является невырожденной на $\mathcal{A}$, пусть Z^{-1} — обратная к ней матрица-функция, определенная на $\mathcal{A}$. Как нетрудно видеть: $J = Z^{-1}I$. Поэтому система на $\mathcal{A}$ записывается также в формах

$$Z^{-1}I - d = 0, \quad I - Zd = 0\,.$$

Методы ППХВ основываются на свойствах(см.[23,31])

$$I_i = I_i^{(r)} + \sum_{j=1}^{N} I_{ij}, \quad i = \overline{1, N_M}, \tag{14}$$

$$I_{ij}/\rho_j = O(1) \quad \text{при} \quad \rho_j \to 0, \quad i = \overline{1, N_M}, j = \overline{1, N}, \tag{15}$$

где слагаемые I_{ij} описывают вклады в функционалы I_i от j-го характерного взаимодействия, а слагаемое $I_i^{(r)}$ — от остальных(нехарактерных) взаимодействий. Обозначим: $I^{(ch)}$ — столбец с компонентами $I_i^{(ch)} = \sum_{j=1}^{N} I_{ij}$, $i = \overline{1, N}$. Разложение (14) является следствием разбиения пространства траекторий на подмножества характерных траекторий и "остаточное"подмножество. Свойство (15) вытекает из свойств случайного процесса переноса частиц и факта, что на каждой траектории j - го подмножества характерных траекторий содержится хотя бы одно j - е характерное взаимодействие; $j = \overline{1, N}$.

Введём теперь “опорную” точку $\rho^{(0)}$ в $\mathcal{U}_1$ и $N_M \times N$ матрицу A, полагая для элементов последней:

$$a_{ij} \times (\rho_j - \rho_j^{(0)}) = I_{ij} - I_{ij}(\rho^{(0)}), \quad i = \overline{1, N_M}, j = \overline{1, N}. \tag{16}$$

Имеем:

$$I = I^{(r)} + A(\rho - \rho^{(0)}) + I^{(ch)}(\rho^{(0)}); \tag{17}$$

обозначив, наконец, $c_z \equiv Zd - I^{(r)} - I^{(ch)}(\rho^{(0)})$, перепишем 12 в виде

$$A(\rho - \rho^{(0)}) - c_z = 0 \quad \text{относительно неизвестных} \quad \alpha \,\text{и} \quad \rho, \tag{18}$$

формально почти идентичном ранее рассмотренному в ([24]). Этот рассмотренный случай получается, если полагать $\rho^{(0)} = 0$.

Можно видеть, привлекая классическую формулу конечных приращений Лагранжа, что матрица A может интерпретироваться как составленная из производных, взятых в промежуточных точках между $\rho^{(0)}$ и ρ.

3.2 Формулировка обратных задач

Теперь, исходя из (18), сформулируем, как и в ([23,31,24]), обратные задачи для обеих проблем как задачи решения какой-либо из трех систем:

$$A(\alpha)(\rho-\rho^{(0)})-c_z(\alpha)=0\,, \qquad (19)$$
$$\rho-\Upsilon\alpha=0, \qquad (\alpha,\rho)\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{U}_1,$$

$$A(\alpha)(\Upsilon\alpha-\rho^{(0)})-c_z(\alpha)=0, \quad \alpha\in\mathcal{A}_1, \text{ и} \qquad (20)$$

$$A\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho)(\rho-\rho^{(0)})-c_z\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho)=0, \quad \rho\in\mathcal{U}_1\,, \qquad (21)$$

при наличии, во-первых, ограничений в соответствии со списком $(i)-(iii)$ раздела 3.1 настоящего параграфа и, во-вторых, нижеследующего условия на ранг матрицы A, а именно,

$$RgA(\alpha)=N \quad \forall\alpha\in\mathcal{A}_1\,. \qquad (22)$$

Будем говорить об этих системах как о системах уравнений для восстановления параметров, обозначая кратко SEPE(System of Equations for Parameters Evaluation). В применении к системе (21), как нетрудно видеть, условие (22) трансформируется в условие

$$RgA\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho)=N \quad \forall\rho\in\mathcal{U}_1\,. \qquad (23)$$

Напомним, что
$$A\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho)\equiv A(\Upsilon_M^{-1}(\rho)), \quad c_z\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho)\equiv c_z(\Upsilon_M^{-1}(\rho)).$$

Как и в ([23,31,24]), мы ограничиваемся изучением методов решения систем (19) и (21). Сформулируем также эти задачи в хорошо известной "вариационной"форме, имея в виду построение итерационных процессов. Пусть W есть квадратная диагональная матрица порядка N_M с положительными диагональными элементами, $W_{ii}>0, \quad i=\overline{1,N_M}$; пусть, далее, как обычно, $\big(\cdot,\cdot\big)$ — символ скалярного произведения. Постановки в названной форме записываем как:

$$\inf\Big((A(\rho-\rho^{(0)})-c_z)^T, W(A(\rho-\rho^{(0)})-c_z)\Big), \quad (\alpha,\rho)\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{U}_1, \quad \text{при условии} \quad \rho=\Upsilon\alpha\,, \qquad (24)$$

$$\inf\Big((A\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho)(\rho-\rho^{(0)})-c_z\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho))^T, W(A\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho)(\rho-\rho^{(0)})-c_z\circ\Upsilon_M^{-1}(\rho))\Big), \quad \rho\in\mathcal{U}_1\,; \qquad (25)$$

предполагая, конечно, что выполняются все вышесказанные ограничения и условия. Итерационные процессы для решения задач (24), (25) определяются и записываются аналогично тому, что и в ([23,31,24]); как решения соответствующих задач квадратичного программирования.

Результат настоящей работы можно рассматривать как обобщение постановок, подхода и методов ППХВ из ([23,31,24]) на более широкий класс задач; а также как улучшение ранее построенных. В частности, посредством новых предложений была рассмотрена задача о восстановлении (массовой) плотности горной породы по данным измерений $\gamma-\gamma$ каротажа([25]).

Список литературы

1. Алексеев Ф.А., Головацкая И.В., Гулин Ю.А., Дворкин И.Л., Дядькин И.Г., Сребродольский Д.М. Ядерная геофизика при исследовании нефтяных месторождений. — М.: Недра, 1978.— 360 с.
2. Антюфеев В.С., Назаралиев М.А. Обратные задачи атмосферной оптики. Новосибирск, 1988. — 156 с.
3. Банзаров Б.В., Хисамутдинов А.И. Novosibirsk Monte Carlo methods for Nuclear Geophysics problems. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615224, 13.08.2010.
4. Гермогенова Т.А. Об обратных задачах атмосферной оптики // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 5. — С. 1091–1096.
5. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. — 491 с.
6. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб.научн.изд-во, 2009, —457 с.
8. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972. —384 с.
9. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980. —286 с.
10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
11. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Елепов Б.С. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976. — 283 с.
12. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987.— 608 с.
13. Резванов Р.А. Радиоактивные и другие неэлектрические методы исследования скважин. — М.: Недра, 1982. — 368 с.
14. Спанье Дж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1972.— 272 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 287 с.
16. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич М.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // УФН. — 1970. — Т. 102, № 3. — С. 345–386
17. Филиппов Е.М. Ядерная геофизика. — Новосибирск: Наука, 1973. — Т1, Т2. — Т.1, — 514 с.; Т.2, — 400 с.
18. Хисамутдинов А.И., Стариков В.Н., Морозов А.А. Алгоритмы Монте-Карло в ядерной геофизике. — Новосибирск: Наука, 1985. — 158 с.
19. Хисамутдинов А.И., Бланков Е.Б. Активационный каротаж на кислород, кремний и алюминий и восстановление флюида в кварц-полевошпатовых коллекторах // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 3. — С. 587–590.
20. Хисамутдинов А.И., Минбаев М.Т. Математическая модель и численный метод идентификации параметров нефтеводонасыщенных пластов по данным нейтронно-активационного каротажа // Геология и геофизика. — 1995. — Т.36, № 7. — С. 73–85.
21. Хисамутдинов А.И., Федорин М.А. О численном методе для восстановления состава некоторых горных пород по данным измерений рентгено-флуоресцентного анализа // Докл. РАН. — 2003. — Т. 392, № 1. — С. 100-105.
22. Хисамутдинов А.И., Банзаров Б.В., Федорин М.А. Математическое моделирование нестационарного переноса частиц в задачах импульсного нейтронного-гамма каротажа. — Новосибирск, 2008. — 54 с. (Препринт/ РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука).
23. Хисамутдинов, А.И. Характерные взаимодействия и последовательные приближения в двух задачах о восстановлении коэффициентов уравнений переноса(и состава среды). -Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2009.— 48 с.
24. Хисамутдинов, А.И. Характерные взаимодействия и восстановление параметров уравнения переноса и среды, включая коэффициент пористости, по данным измерений некоторых ядерно-гео-физических методов.//Геология и Геофизика, 2013, т.54, № 9, с. 1427-1445.
25. Хисамутдинов А.И.Пахотина Ю.А. О компьютерном восстановлении плотности формации по данным измерений гамма-гамма метода. — Новосибирск, 2013.— 21 с.//Препринты ИНГГ СО РАН. 2013. №1.ISSN 2224-5723 .
26. Gilchrist, Jr, W.A., Prati E., Pemper R., Mickael, M.W., Trcka, D. Introduction of a new through-tubing multifunction pulsed neutron instrument // 1999 SPE Annual Technical Conference and Excibition. — Houston, — 1999. — Paper SPE 56803.
27. Grau J.A. and Schweitzer J.S. Elemental concentrations from thermal neutron capture gamma-ray spectra in geological formations // Nuclear Geophysics. — 1989. — Vol. 3, No. 1. — P. 1-9.
28. Hertzog R.C. Laboratory and Field Evaluation of an Inelastic Neutron Scattering and Capture Gamma Ray Spectroscopy Tool // Soc. Petr. Eng. Jour. — 1980. — Vol. 20, — P. 327–340.

29. Khisamutdinov A.I. Numerical method of identifying parameters of oil-water saturation by nuclear logging // Applied Radiation and Isotopes. — 50(1999). — P. 615-625.
30. Khisamutdinov A.I. and Phedorin M.A. Numerical method of evaluating elemental content of oil-water saturated formations based on pulsed neutron-gamma inelastic log data // SPE Jour. — 2009, March. — P. 51–53.
31. Khisamutdinov A.I. Characteristic interactions and successive approximations in problems on evaluating coefficients of transport equation and elemental content of a medium. J. of Inverse problems, 2011, No.2, p.189-222 .
32. McCormick N.J. Inverse radiative transfer problems: as review // Nuclear Science and Engineering. — 1992, — No. 112. — P. 185–198.
33. Michael M. W., Trcka D., and Pemper R. Dynamic Multi-parameter Interpretation of Dual-Detector Carbon/Oxygen Measurements // 1999 SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Houston, — 1999. — Paper SPE 56649.