МРНТИ 27.29.17, 27.29.23

Исследование глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем

Айсагалиев С.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Айсагалиева С.С., Научно-исследовательский институт математики и механики КазНУ имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Создана общая теория глобальной асимптотической устойчивости многомерных динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством со счетным положением равновесия. Установлена ограниченность решений многомерных фазовых систем и их производных. Найдены условия при выполнений которых решение и ее производная обладают асимптотическими свойствами. Получены условия глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем с равными нулю в периоде значениями интегралов от компонентов периодических нелинейностей. Получены условия глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем с не равными нулю в периоде значениями интегралов от составляющих нелинейных периодических функций. Исследованы асимптотические свойства решений динамических систем со счетным положением равновесия в общем случае, когда часть компонентов нелинейных периодических функции обладают значениями интегралов в периоде равными нулю, а для других компонентов значения интегралов в периоде не равными нулю. Отличительной особенностью предлагаемого метода исследования многомерных фазовых систем от известных методов состоит в том, что он применим для систем любого порядка с любым числом нелинейных периодических функции, и не привлекаются для исследования периодические функции Ляпунова и частотные теоремы. Примечательно то, что предлагаемые условия глобальной асимптотической устойчивости легко проверяемые по сравнению с частотными условиями и условиями полученные с помощью периодических функции Ляпунова.
Ключевые слова: Асимптотические свойства, ограниченность решений, глобальная асимптотическая устойчивость, несобственные интегралы.

Көпөлшемді фазалық жүйелердің глобальді асимптотикалық орнықтылығын зерттеу

Айсағалиев С.Ә., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қаласы, Қазақстан Республикасы, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Айсағалиева С.С., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика ғызыми-зерттеу институты, Алматы қаласы, Қазақстан Республикасы, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Саналымды тепе-теңдік жағдайымен цилиндрлік фазалық кеңістікте көпөлшемді динамикалық жүйелердің глобальді асимптоталық тұрақтылығының жалпы теориясы құрылған. Көп өлшемді фазалық жүйелер шешімдері мен олардың туындыларының шектеулігі анықталған. Шешімнің және оның туындысының асимптотикалық қасиеттерінің

орындалуы үшін жағдайлар жасалған. Периодты сызықтық емес компоненттерден тәуелді периодта интегралдың мәндері нөлге тең болатын көп өлшемді фазалық жүйелердің глобальдік асимптотикалық тұрақтылық шарттары алынды. Сызықты емес периодты функциялар компоненттерінің интегралдарының нөлден тыс мәндері бар фазалық жүйелердің глобальдік асимптотикалық тұрақтылығы шарттары алынды. Жалпы жағдайда, сызықтық емес периодты функциялардың кейбір компоненттері нөлге тең болған кезеңде интегралдардың мәндеріне ие болған кезде және басқа компоненттер үшін интегралдардың мәндері нөлге тең болмаған кезде саналымды тепе-теңдік жағдайындағы динамикалық жүйелердің шешімдерінің асимптотикалық қасиеттері зерттерлген. Көпөлшемді фазалық жүйелерді зерттеудің ұсынылатын әдісінің белгілі әдістерден айырықша ерекшелігі – ол сызықтық емес периодты функциялардың кез келген санымен кез келген ретті жүйелер үшін қолданылатыны, сонымен қатар Ляпуновтың периодты функциялары мен жиілік теоремаларын зерттеуге еш қатысы болмауында. Айта кету керек, глобальдік асимптоталық тұрақтылықтың ұсынылған жағдайлары, Ляпуновтың периодты функциялары көмегімен алынған жағдайлармен және жиілік жағдайларымен салыстырғанда оңай тексеріледі.
Түйін сөздер: Асимптотикалық қасиеттер, шешімдердің шектеулілігі, глобальді асимптоталық тұрақтылық, меншіксіз интегралдар.

Investigation of the global asymptotic stability of multidimensional phase systems

Aisagaliev S.A., Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan,
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Aisagalieva S.S., Research Institute of Mathematics and Mechanics of al-Farabi Kazakh National University, E-mail: a_sofiya@mail.ru

A general theory of global asymptotic stability of multidimensional dynamical systems with a cylindrical phase space with a countable equilibrium position is created. The boundedness of solutions of multidimensional phase systems and their derivatives is established. Conditions for the fulfillment of which the solution and its derivative have asymptotic properties are found. Conditions for global asymptotic stability of multidimensional phase systems with values of integrals equal to zero in the period from the components of periodic nonlinearities are obtained. Conditions for global asymptotic stability of phase systems with nonzero values of the integrals of the components of nonlinear periodic functions are obtained. The asymptotic properties of solutions of dynamical systems with a countable equilibrium position are investigated in the general case when some of the components of nonlinear periodic functions have values of the integrals in the period equal to zero, and for other components the values of the integrals in the period are not equal to zero. A distinctive feature of the proposed method for investigating multidimensional phase systems from known methods is that it is applicable to systems of any order with any number of nonlinear periodic functions, and are not involved in research periodic Lyapunov functions and frequency theorems. It is noteworthy, that the proposed conditions for global asymptotic stability, which are easily verified in comparison with the frequency conditions and conditions obtained with the help of periodic Lyapunov functions.
Key words: Asymptotic properties, boundedness of solutions, global asymptotic stability, improper integrals.

1 Введение

Рассмотрим динамическую систему с цилиндрическим фазовым пространством описываемую уравнением следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(x), \quad x(0) = x_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, C, R – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_j(A)$ $j = \overline{1, n}$ – собственные значения матрицы A, $|x_0| < \infty$, $|\sigma_0| < \infty$, $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m))$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

Функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C^1(R^m, R^m)/\mu_{1i} \le \frac{d\varphi_i(\sigma_i)}{d\sigma_i} \le \mu_{2i} \\ \varphi_i(\sigma_i) = \varphi_i(\sigma_i + \Delta_i), \ \ \forall \sigma_i, \ \ \sigma_i \in R^1, \ \ i = \overline{1,m}\}, \tag{2}$$

где Δ_i – период функции $\varphi_i(\sigma_i)$, μ_{1i}, μ_{2i}, $i = \overline{1,m}$ – заданные числа, $|\mu_1| < \infty$, $|\mu_2| < \infty$, $\mu_1 = (\mu_{11}, \dots, \mu_{1m})$, $\mu_2 = (\mu_{21}, \dots, \mu_{2m})$.

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений. $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0, \ \ Cx_* + R\varphi(\sigma_*) = 0$.

Поскольку $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $(R - CA^{-1}B)\varphi(\sigma_*) = 0$, то при $R - CA^{-1}B$ – неособая матрица порядка $m \times m$ система (1), (2) имеет стационарное множество.

$$\Lambda = \{(x_*, \sigma_*) \in R^{n+m}/x_* = 0, \ \ \varphi(\sigma_*) = 0\}.$$

Так как $\varphi(\sigma_*) = \varphi(\sigma_* + k\Delta) = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то положение равновесия системы (1), (2) является счетным множеством, $\sigma_* = (\sigma_{1*}, \dots, \sigma_{m*})$, $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$.

Определение 1 *Стационарное множество* Λ *системы* (1), (2) *глобально асимптотически устойчиво, если для любой функции* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *и любого начального состояния* $(x_0, \sigma_0) \in R^{n+m}$, $|x_0| < \infty$, $|\sigma_0| < \infty$ *решение системы* $x(t) = x(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi)$, $\sigma(t) = \sigma(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi)$, $t \in I$ *обладает свойством* $x(t) \to x_* = 0$, $\sigma(t) \to \sigma_*$ *при* $t \to \infty$, *где* $\varphi(\sigma_*) = 0$.

Определение 2 *Условием глобальной асимптотической устойчивости системы* (1), (2) *называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы* $(A, B, C, R, \mu_1, \mu_2)$, *при выполнении которых множество* Λ *глобально асимптотически устойчиво.*

Необходимо исследовать в отдельности два случая:

1.

$$\int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i = 0, \quad \forall \sigma_i, \ \sigma_i \in R^1, \ \ i = \overline{1,m};$$

2.

$$\int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i \ne 0, \quad \forall \sigma_i, \ \sigma_i \in R^1, \ \ i = \overline{1,m}.$$

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *Найти оценки несобственных интегралов, вдоль решения системы* (1), (2), *для случаев 1, 2.*

Задача 2 *Найти новое эффективное условие глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества* Λ *системы* (1), (2) *для случая, когда*

$$\int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = 0, \quad \forall\sigma_i,\ \sigma_i \in R^1,\ \ i = \overline{1,m};$$

на основе оценки несобственных интегралов для случая 1.

Задача 3 *Найти новое эффективное условие глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества* Λ *системы* (1), (2) *для случая, когда*

$$\int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i \neq 0, \quad \forall\sigma_i,\ \sigma_i \in R^1,\ \ i = \overline{1,m};$$

на основе оценки несобственных интегралов для случая 2.

Решение задачи 1 приведено в работе [16]. Данная статья является продолжением исследования из [16], в ней приведены решения задач 2, 3.

2 Обзор литературы

Первой работой, посвященной качественно-численным методам исследования фазовых систем, была статья Ф. Трикоми [1]. Применение метода точечных отображений к фазовым системам рассмотрено в работах А.А. Андронова и его последователей [2,3]. Следующим этапом развития качественно-численных методов было применение периодических функций Ляпунова к исследованию фазовых систем. Основы теории периодических функций Ляпунова приведены в работах [4,5]. Методы построения различных периодических функций Ляпунова, обеспечивающих устойчивость в большинстве фазовых систем, можно найти в [2]. Приближенные нелокальные методы исследования фазовых систем изложены в [6].

Оригинальным подходом к исследованию фазовых систем являются частотные условия асимптотической устойчивости, основанные на процедуре Бакаева-Гужа. Такой подход впервые предложен в работе Г.А. Леонова [7]. В последующих работах Леонова и его учеников [8-10] исследованы ограниченности решения фазовых систем, асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений с периодическими нелинейностями, а также устойчивость и колебания фазовых систем. Библиографический обзор научной литературы по фазовым системам можно найти в монографиях [11], а также работах автора, изложенных в [12-16].

3 Материал и методы

Маятниковые системы в механике, навигационные системы в радиотехнике, синхронные машины в энергетике, вибрационные системы в технике являются динамическими системами с цилиндрическим фазовым пространством (или просто фазовыми системами). Математической моделью фазовых систем является класс обыкновенных дифференциальных уравнений имеющий счетное множество положений равновесия с периодическими нелинейностями из заданного множества. Следовательно, уравнения движения фазовых систем относятся к классу уравнений с дифференциальными включениями. Поскольку положение равновесия является счетным множеством, то для устойчивости системы, необходимо, чтобы каждое решение асимптотически стремилось к какому-либо положению равновесия из счетного множества.

В статье предлагается совершенно новый подход к решению глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем основанный на априорной оценке несобственных интегралов вдоль решения системы.

3.1 Вспомогательные леммы

Как следует из Лемм 1–3, приведенной в работе [16] уравнение (1) с неособым преобразованием приводится к виду

$$\dot{y} = \overline{A}y + \overline{B}\varphi(\sigma); \quad \dot{\sigma} = \overline{C}y + R\varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0. \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma(t)) = H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t), \quad t \in I, \quad H_1\dot{y}(t) = \overline{A}_{12}y(t), \quad t \in I, \\ \dot{\sigma}(t) = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})y(t) + RH_0\dot{y}(t), \quad t \in I, \end{gathered} \tag{4}$$

где матрица $\overline{A}$ – гурвицева,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} \\ \overline{A}_{12} \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} H_0 = (I_m, O_{m,n-m}), \\ H_1 = (O_{n-m,m}, I_{n-m}), \end{matrix} \quad H_0\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \cdots \\ \dot{y}_m \end{pmatrix}, \quad H_1\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_{m+1} \\ \cdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}.$$

Лемма 1 *Пусть выполнены условия лемм 1–3 из [16], матрица* $\overline{A}$ *– гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда функция* $z(t) = (y(t), \dot{y}(t))$, $t \in I$ *ограничена, т.е.* $|z(t)| \le a$, $t \in I$, *непрерывно дифференцируема, причем* $|\dot{z}(t)| = |(\dot{y}(t), \ddot{y}(t))| \le c$, $t \in I$, $0 < a < \infty$, $0 < c < \infty$.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Покажем, что производная $\dot{\varphi}(\sigma(t)) = (\dot{\varphi}_1(\sigma_1), \ldots, \dot{\varphi}_m(\sigma_m))$, $t \in I$ ограничена. В самом деле,

$$\frac{d\varphi_i(\sigma_i(t))}{dt} = \dot{\varphi}_i(\sigma_i(t)) = \frac{d\varphi_i(\sigma_i(t))}{d\sigma_i} \cdot \frac{d\sigma_i(t)}{dt}, \quad t \in I, \quad i = \overline{1,m}.$$

Так как

$$|\frac{d\varphi_i}{dt}| \le \mu_i, \ \ \mu_i = \max(|\mu_{1i}|, |\mu_{2i}|), \quad |\dot{\sigma}_i(t)| \le c_{4i}, \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in I,$$

в силу $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $|\dot{\sigma}(t)| \le c_4$, $t \in I$ (см. теорему 1 из [16]), то $|\dot{\varphi}(\sigma(t))| \le m_1$, $t \in I$, $0 < m_1 < \infty$. Из первого уравнения тождества (3), имеем $\ddot{y}(t) = \overline{A}\dot{y}(t) + \overline{B}\dot{\varphi}(\sigma(t))$, $t \in I$. Отсюда следует, что $|\ddot{y}(t)| \le \|\overline{A}\||\dot{y}| + \|\overline{B}\||\dot{\varphi}(\sigma(t))| \le \|\overline{A}\| \cdot c_3 + \|\overline{B}\|m_1 = m_2$, $0 < m_2 < \infty$, $\forall t$, $t \in I$. Из оценки $|y(t)| \le c_2$, $|\dot{y}(t)| \le c_3$, $|\ddot{y}(t)| = m_1$, $t \in I$ следует $|z(t)| = |(y(t), \dot{y}(t))| \le a$, $|\dot{z}(t)| = |(\dot{y}(t), \ddot{y}(t))| \le c$, $\forall t$, $t \in I$. Лемма доказана.

Лемма 2 *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того:*

1) скалярная непрерывная функция $W(z) > 0$, $\forall z$, $z \in R^{2n}$, $W(0) = 0$;

2) $|z(t)| \le a$, $|\dot{z}(t)| \le c$, $t \in I$;

3) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty W(z(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, *где* $z(t) = (y(t), \dot{y}(t))$, $t \in I$.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1) – 3) леммы. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, $(\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0, \ \lim\limits_{t\to\infty} \dot{y}(t) = 0)$.

Предположим противное, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) \ne 0$. Тогда существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ такая, что $|z(t_k)| \ge \varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Выберем $t_{k+1} - t_k \ge \varepsilon_1 > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Поскольку $z(t)$, $t \in I$ непрерывно дифференцируема $|z(t)| \le a$, $|\dot{z}(t)| \le c$, $t \in I$, то $|z(t) - z(t_k)| \le c|t - t_k|$, $\forall t$, $t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}]$, $k = 1, 2, \dots$. Так как $t_k - \frac{\varepsilon_1}{2} > t_{k-1}$, $t_k + \frac{\varepsilon_1}{2} < t_{k+1}$, $W(z) > 0$, $z \in R^{2n}$, то

$$\int\limits_0^\infty W(z(t))dt \ge \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} W(z(t))dt,$$

где $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \ge |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \ge \varepsilon - c\frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_0 > 0$, $\forall t$, $t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}]$. Всегда можно выбрать величину $\varepsilon_1 > 0$ так, что величина $\varepsilon_0 > 0$. Итак $|z(t)| \ge \varepsilon_0$, $|z(t)| \le c$, $t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}]$.

Так как функция $W(z)$ непрерывная на компактном множестве $\varepsilon_0 \le |z| \le c$, то существует число $m > 0$ такое, что $\min\limits_{\varepsilon_{01} \le |z| \le c} W(z) = m$. Тогда значение интеграла

$$\int\limits_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}} W[z(t)]dt \ge \varepsilon_1 m, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty W[z(t)]dt \ge \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} W[z(t)]dt \ge \lim_{k\to\infty} k(\varepsilon_1 m) = \infty.$$

Это противоречит условию 3) Леммы. Лемма доказана.

3.2 Глобальная асимптотическая устойчивость I

Рассмотрим случай, когда

$$\int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = 0, \quad \forall\sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \;\; i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Теорема 1 *Пусть выполнены условия Лемм 1–5 и теоремы 1 из [16], и пусть, кроме того, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, *компоненты вектор функции* $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m))$ *удовлетворяют условиям* (5). *Тогда для любых диагональных матриц* $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m}) > 0$, $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) > 0$, *вектор строк* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in R^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R^n$ *вдоль решения системы* (3) *несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_5 = \int\limits_0^\infty [\ddot{y}^*(t)S_1\ddot{y}(t) + \dot{y}^*(t)S_2\ddot{y}(t) + y^*(t)S_3\ddot{y}(t) + \dot{y}^*(t)S_4\dot{y}(t) + y^*(t)S_5\dot{y}(t) + \\ + y^*(t)W_1y(t)]dt \le \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)Q_1\dot{y}(t) + y^*Q_2y(t)]dt - \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty, \end{gathered} \tag{6}$$

где $S_1 = H_0^*\tau_1H_0 - \alpha^*\alpha$, $S_2 = \overline{A}_{11}^*\tau_1H_0 + H_0^*R^*\mu_1\tau_1H_0 + H_0^*R^*\tau_1\mu_2H_0 + 2\alpha^*\beta$, $S_3 = -(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*(\mu_1\tau_1 + \tau_1\mu_2)H_0 - 2\alpha^*\gamma$, $S_4 = H_0^*R^*\mu_1\tau_1\overline{A}_{11} + \overline{A}_{11}^*\tau_1\overline{A}_{11} + H_0^*R^*\mu_1\tau_1\mu_2RH_0 + H_0^*R^*\tau_1\mu_2\overline{A}_{11} - \beta^*\beta + H_0^*\tau_2RH_0$, $S_5 = \overline{A}_{11}^*\mu_1\tau_1(\overline{C} - RA_{11}) - 2H_0^*R^*\mu_1\tau_1\mu_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) - \overline{A}_{11}^*\tau_1\mu_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) + 2\beta^*\gamma + \overline{A}_{11}^*\tau_2RH_0 - (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_2H_0$, $W_1 = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau\mu_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) - \gamma^*\gamma - \overline{A}_{11}^*\tau_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11})$, $Q_1 = \overline{A}_{11}^*\tau_1H_0 + H_0^*R^*\mu_1\tau_1H_0 + H_0^*R^*\tau_1\mu_2H_0 + 2\beta^*\alpha$, $Q_2 = (\overline{C}-R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1A_{11} - 2(\overline{C}-R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1\mu_2RH_0 - (\overline{C}-R\overline{A}_{11})^*\tau_1\mu_2\overline{A}_{11} + 2\gamma^*\beta + \overline{A}_{11}^*\tau_2RH_0 - (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_2H_0$.

Доказательство. Поскольку выполнены условия лемм 1 – 5 и теоремы 1 из [16], то несобственные интегралы

$$\begin{gathered} I_{10} = \int\limits_0^\infty [-y^*(t)\Lambda_1\ddot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_2\ddot{y}(t) + y^*(t)\Lambda_3\dot{y}(t) - \dot{y}^*(t)\Lambda_4\dot{y}(t) - \ddot{y}^*(t)\Lambda_5\ddot{y}(t) - \\ -y^*(t)\Lambda_6y(t)]dt \le \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)\Lambda_2\dot{y}(t) + y^*(t)\Lambda_3y(t)]dt < \infty, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} I_{20} = \int\limits_0^\infty [-\ddot{y}^*(t)\alpha^*\alpha\ddot{y}(t) - \dot{y}^*(t)\beta^*\beta\dot{y}(t) - y^*(t)\gamma^*\gamma y(t) + 2\dot{y}^*(t)\alpha^*\beta\ddot{y}(t) - \\ -2y^*(t)\alpha^*\gamma\ddot{y}(t) + 2y^*(t)\beta^*\gamma\dot{y}(t)]dt \le \int_0^\infty \frac{d}{dt}[2\dot{y}^*(t)\beta^*\alpha\dot{y}(t) + \\ +2y^*(t)\gamma^*\beta y(t)]dt < \infty, \end{gathered} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
I_{30} &= \int\limits_0^\infty [-y^*(t)T_1^*\dot y(t) + y^*(t)T_2 y(t) + \dot y^*(t)T_3\dot y(t)]dt = \\
&= \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma\infty} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma - \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)T_1 y(t)]dt < \infty.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Из (7) – (9) следует, что несобственный интеграл

$$
\begin{aligned}
I_5 = I_{10} + I_{20} + I_{30} = \int\limits_0^\infty [\ddot y^*(t)S_1\ddot y(t) + \dot y^*(t)S_2\ddot y(t) + y^*(t)S_3\ddot y(t) + \dot y^*(t)S_4\dot y(t) + \\
+ y^*(t)S_5\dot y(t) + y^*(t)W_1 y(t)]dt \le \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot y^*(t)Q_1\dot y(t) + y^*(t)Q_2 y(t)]dt + \\
+ \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty,
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $S_1 = -\Lambda_5 - \alpha^*\alpha$, $S_2 = \Lambda_2 + 2\alpha^*\beta$, $S_3 = -\Lambda_1 - 2\alpha^*\gamma$, $S_4 = -\Lambda_4 - \beta^*\beta + T_3$, $S_5 = \Lambda_3^* + 2\beta^*\gamma - T_1$, $W_1 = -\Lambda_6 - \gamma^*\gamma + T_2$, $Q_1 = \Lambda_2 + 2\beta^*\alpha$, $Q_2 = \Lambda_3 + 2\gamma^*\beta - T_1$.

Так как $|y(t)| \le c_2$, $|\dot y(t)| \le c_3$, $\forall t$, $t \in I$, то

$$
\int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot y^*(t)Q_1\dot y(t) + y^*(t)Q_2 y(t)]dt = [\dot y^*(t)Q_1\dot y(t) + y^*(t)Q_2 y(t)]\Big|_0^\infty < \infty,
$$

$$
\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty
$$

в силу соотношения (5). Следовательно, $I_5 < \infty$. Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия теоремы 1, и пусть, кроме того:*

1) $S_i = 0$, $i = \overline{1,3}$;

2) Матрицы W_{11}, W_{12}, W_{22}, $N = N^*$ *порядков* $n \times n$, $n \times n$, $n \times n$, $(n-m)\times(n-m)$ *соответственно, такие, что* $W_{22} > 0$, $\quad W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{12}^* > 0$, *где* $W_{11} = \dfrac{1}{2}(W_1 + W_1^*) + \dfrac{1}{2}(H_1^* N\overline{A}_{12} + \overline{A}_{12}^* N H_1)$, $W_{12} = \dfrac{1}{2}S_5$, $W_{21} = \dfrac{1}{2}S_5^*$, $W_{22} = \dfrac{1}{2}(S_4 + S_4^*)$, $W_{11} = W_{11}^*$, $W_{22} = W_{22}^*$, $N = N^*$.

Тогда стационарное множество Λ *системы* (1), (2) *глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Если диагональные матрицы $\tau_1 > 0$, τ_2 и векторы $\alpha \in R^n$, $\beta \in R^n$, $\gamma \in R^n$ выбраны так, чтобы

$$
S_1 = H_0^*\tau_1 H_0 - \alpha^*\alpha = 0, \quad S_2 = \overline{A}_{11}^*\tau_1 H_0 + H_0^* R^*\mu_1\tau_1 H_0 + H_0^* R^*\tau_1\mu_2 H_0 + 2\alpha^*\beta = 0,
$$

$$S_3 = -(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*(\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2)H_0 - 2\alpha^*\gamma = 0,$$

то несобственный интеграл (10) запишется в виде

$$I_5 = \int\limits_0^\infty [y^*(t)W_1y(t) + y^*(t)S_5\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)S_4\dot{y}(t)]dt < \infty. \tag{11}$$

Как следует из тождества (4) для любой симметричной матрицы $N = N^*$ порядка $(n-m)\times(n-m)$ верно неравенство $y^*(t)H_1^*NH_1\dot{y}(t) = y^*(t)H_1^*N\overline{A}_{12}y(t)$, $t \in I$. Тогда несобственный интеграл

$$I_6 = \int\limits_0^\infty y^*(t)H_1^*N\overline{A}_{12}y(t)dt = \int\limits_0^\infty y^*(t)H_1^*NH_1\dot{y}(t)dt = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}y^*(t)(H_1^*NH_1+ \\ +H_1^*NH_1)y(t)]dt = \frac{1}{2}y^*(t)[H_1^*NH_1 + H_1^*NH_1]y(t)\Big|_0^\infty < \infty, \tag{12}$$

в силу того, что $|y(t)| \le c_2$, $\forall t$, $t \in I$. Отсюда имеем

$$I_6 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{2}y^*(t)[H_1^*NH_1 + H_1^*NH_1]y(t) < \infty. \tag{13}$$

Пусть матрица

$$\pi = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^* & W_{22} \end{pmatrix},$$

функция $z(t) = (y(t), \dot{y}(t))$, $t \in I$, где матрицы W_{11}, W_{12}, W_{22} определяются соотношениями указанные в условии 2) теоремы. Тогда суммируя несобственные интегралы (11), (12), получим

$$I_5 + I_6 = \int\limits_0^\infty z^*(t)\pi z(t)dt = \int\limits_0^\infty \{y^*(t)[\frac{1}{2}(W_1 + W_1^*) + \frac{1}{2}(A_1^*N\overline{A}_{12} + \overline{A}_{12}^*NH_1)]y(t)+$$

$$+y^*(t)[\frac{1}{2}S_5]\dot{y}(t) + \dot{y}^*[\frac{1}{2}S_5]^*y(t) + \dot{y}^*(t)[\frac{1}{2}(S_4 + S_4^*)]\dot{y}(t)\}dt < \infty.$$

Заметим, что матрица π порядка $2n\times 2n$ положительно определенная, если $W_{22} > 0$, $W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{12}^* > 0$. По условию теоремы данные соотношения выполнены. Тогда $W(z) = z^*\pi z > 0$, $\forall z$, $z \in R^{2n}$, $W(0) = 0$,

$$\int\limits_0^\infty W(z(t))dt = \int\limits_0^\infty z^*(t)\pi z(t)dt < \infty,$$

$|z(t)| \le a$, $|\dot{z}(t)| \le c$, $t \in I$. Следовательно, выполнены все условия Леммы 2.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$. Отсюда имеем $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{y}(t) = 0$. Так как $x(t) = (P^*)^{-1}y(t)$, $t \in I$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Как показано в работе [16] системы (1), (2) и

(3) равносильны. Тогда из (4), имеем $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(\sigma(t)) = H_0\lim\limits_{t\to\infty}\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}\lim\limits_{t\to\infty}y(t) = 0$. Отсюда следует $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t) = \sigma_*$, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(\sigma(t)) = \varphi(\sigma_*) = 0$. Заметим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\sigma}(t) = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})\lim\limits_{t\to\infty}y(t) + RH_0\lim\limits_{t\to\infty}\dot{y}(t) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t) = \sigma_*$, $\varphi(\sigma(t)) \to \varphi(\sigma_*)$. Итак, $x(t) \to x_* = 0$ при $t \to \infty$, $\sigma(t) \to \sigma_*$ при $t \to \infty$.

Легко убедиться в том, что пара $(x_* = 0, \sigma_*) \in \Lambda$. Теорема доказана.

3.3 Глобальная асимптотическая устойчивость II

Рассмотрим случай, когда

$$\int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i}\varphi_i(\xi_i)d\xi_i = \overline{\alpha}_i \neq 0, \quad \forall\sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1,m}. \tag{14}$$

Теорема 3 *Пусть выполнены условия лемм 1–5 и теоремы 1 из [16], и пусть, кроме того функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *удовлетворяет условию* (14). *Тогда для любых диагональных матриц* $\tau_1 > 0$, τ_3, $\tau_4 > 0$, $\tau_5 > 0$ *таких, что* $4\tau_4\tau_5 - (\nu\tau_3)(\nu\tau_3) > 0$ *и* $\overline{\alpha} - \nu\overline{\beta} = 0$, *вектор строк* $\alpha \in R^n$, $\beta \in R^n$, $\gamma \in R^n$, *вдоль решения системы* (3) *несобственный интеграл*

$$\begin{gathered}I_7 = \int\limits_0^\infty[\ddot{y}^*(t)E_1\ddot{y}(t) + \dot{y}^*(t)E_2\ddot{y}(t) + y^*(t)E_3\ddot{y}(t) + \dot{y}^*(t)E_4\dot{y}(t) + y^*(t)E_5\dot{y}(t)+ \\ +y^*(t)E_6y(t)]dt \leq \int\limits_0^\infty\frac{d}{dt}[\dot{y}^*F_1\dot{y}(t) + y^*(t)F_2y(t)]dt + \sum_{i=1}^m\int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)}\Phi_i(\sigma_i)\tau_{3i}d\sigma_i,\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}E_1 = -\Lambda_5 - \alpha^*\alpha = H_0^*\tau_1H_0 - \alpha^*\alpha, \quad E_2 = S_2, \quad E_3 = S_3, \quad E_4 = S_4 - H_0^*\tau_2RH_0+ \\ +H_0^*\tau_3RH_0 - H_0^*R^*\tau_5RH_0 - H_0^*\tau_4H_0, \quad E_5 = S_5 - \overline{A}_{11}^*\tau_2RH_0 - (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_2H_0+ \\ +H_0^*R^*\tau_3\overline{A}_{11} - H_0^*\tau_3(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) + H_0^*R^*\tau_5(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) + (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_5RH_0- \\ -2\overline{A}_{11}^*\tau_4H_0, \quad E_6 = S_6 + \overline{A}_{11}^*\tau_2(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) - \overline{A}_{11}^*\tau_3(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) - (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_5(\overline{C} - R\overline{A}_{11})- \\ -\overline{A}_{11}^*\tau_4\overline{A}_{11}, \quad F_1 = \overline{A}_{11}^*\tau_1H_0+H_0^*R^*\mu_1\tau_1H_0+H_0^*R^*\tau_1\mu_2H_0+2\beta^*\alpha, \quad F_2 = (\overline{C}-R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1\overline{A}_{11}- \\ -2(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\mu_1\tau_1\mu_2RH_0 - (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_1\mu_2\overline{A}_{11} + 2\gamma^*\beta + \overline{A}_{11}^*\tau_3RH_0- \\ -(\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_3H_0 + [H_0^*R^*\tau_5(\overline{C} - R\overline{A}_{11})]^* + (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_5RH_0 - 2\overline{A}_{11}^*\tau_4H_0.\end{gathered}$$

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Несобственный интеграл $I_7 = I_{10} + I_{20} + I_{10}$, где

$$\begin{gathered}I_{40} = \int\limits_0^\infty[-y^*(t)\Gamma_1^*\dot{y}(t) + y^*(t)\Gamma_2y(t) + \dot{y}^*(t)\Gamma_3\dot{y}(t)]dt \leq \sum_{i=1}^m\int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)}\Phi_i(\sigma_i)\tau_{3i}d\sigma_i- \\ -\int\limits_0^\infty\frac{d}{dt}[\dot{y}^*\Gamma_1y(t)]dt < \infty,\end{gathered} \tag{16}$$

$\Gamma_1 = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_3 H_0 - \overline{A}_{11}^*\tau_3 R H_0 - H_0^* R^*\tau_5(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) - (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_5 R H_0 + 2\overline{A}_{11}^*\tau_4 H_0$, $\Gamma_2 = -\overline{A}_{11}^*\tau_3(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) - (\overline{C} - R\overline{A}_{11})^*\tau_5(\overline{C} - R\overline{A}_{11}) - \overline{A}_{11}^*\tau_4\overline{A}_{11}$, $\Gamma_3 = H_0^*\tau_3 R H_0 - H_0^* R^*\tau_5 R H_0 - H_0^*\tau_4 H_0$.

Суммируя несобственные интегралы (7), (8), (16) получим (15). Теорема доказана.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия теоремы 3, и пусть, кроме того:*

1) $E_i = 0$, $i = 1, 2, 3$;

2) матрицы $V_{11} = V_{11}^*$, V_{12}, $V_{22} = V_{22}^*$, $N = N^*$ *порядков* $n \times n$, $n \times n$, $n \times n$, $(n-m) \times (n-m)$ *соответственно такие, что*

$$V_{22} > 0, \quad V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{12}^* > 0,$$

где $V_{11} = \frac{1}{2}(E_6 + E_6^*) + \frac{1}{2}(H_1^* N\overline{A}_{12} + \overline{A}_{12}^* N H_1)$, $V_{12} = \frac{1}{2}E_5$, $V_{12}^* = \frac{1}{2}E_5^*$, $V_{22} = \frac{1}{2}(E_4 + E_4^*)$.

Тогда стационарное множество Λ *системы* (1), (2) *глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2. Если выполнено условие 1) теоремы, то несобственный интеграл

$$I_7 = \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)E_4\dot{y}(t) + y^*(t)E_5\dot{y}(t) + y^*(t)E_6 y(t)]dt < \infty.$$

Тогда сумма

$$I_7 + I_6 = \int_0^\infty z^*(t)Vz(t)dt < \infty,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^* & V_{22} \end{pmatrix}, \quad z(t) = (y(t), \dot{y}(t)), \quad t \in I.$$

Если выполнено условие 2) теоремы, то матрица $V = V^* > 0$. Далее применяя Лемму 2, получим $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$. Следовательно, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = 0$.

Далее, повторяя доказательства теоремы 2, можно убедиться в том, что стационарное множество Λ системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

3.4 Глобальная асимптотическая устойчивость III

Рассмотрим случай, когда

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = 0, \ \ i = \overline{1, s}, \qquad \int_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = \overline{\alpha}_i \neq 0, \ \ i = \overline{s+1, m}. \tag{17}$$

Обозначим через $\varphi^{(1)}(\sigma^{(1)}) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_s(\sigma_s))$, $\varphi^{(2)}(\sigma^{(2)}) = (\varphi_{s+1}(\sigma_{s+1}), \ldots, \varphi_m(\sigma_m))$, где $\sigma^{(1)} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$, $\sigma^{(2)} = (\sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_m)$. Легко убедиться в том, что

$$\varphi^{(1)}(\sigma^{(1)}) = H_{01}\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}^{(1)}y(t), \quad \varphi^{(2)}(\sigma^{(2)}) = H_{02}\dot{y} + \overline{A}_{11}^{(2)}y(t), \ \ t \in I,$$
$$\dot{\sigma}^{(1)}(t) = (\overline{C} - R\overline{A}_{11}^{(1)})y(t) + R_1H_{01}\dot{y}(t), \quad \dot{\sigma}^{(2)}(t) = (\overline{C} - R\overline{A}_{11}^{(2)})y(t) + R_2H_{02}\dot{y}(t), \ \ t \in I, \tag{18}$$

где

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 \\ \overline{C}_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & O_{s,m-s} \\ O_{m-s,s} & R_2 \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} H_{01} \\ H_{02} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_{11} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11}^{(1)} \\ \overline{A}_{11}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} H_{01} = (I_s, O_{s,n-s}), \\ H_{02} = (I_{m-s}, O_{m-s,n-m+s}), \end{matrix}$$

матрицы $\overline{C}_1, \overline{C}_2, R_1, R_2, H_{01}, H_{02}, \overline{A}_{11}^{(1)}, \overline{A}_{11}^{(2)}$ порядков $s\times n$, $(m-s)\times n$, $s\times s$, $(m-s)\times(m-s)$, $s \times n$, $(m-s) \times n$, $s \times n$, $(m-s) \times n$ соответственно.

Теорема 5 *Пусть выполнены условия лемм 1–5 и теоремы 1 из [16], и пусть, кроме того, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *удовлетворяет условию* (17). *Тогда для любых диагональных матриц* $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m})$, $\overline{\tau}_2 = diag(\tau_{21}, \dots, \tau_{2s})$, $\overline{\tau}_3 = diag(\tau_{31}, \dots, \tau_{3m-s})$, $\overline{\tau}_4 = diag(\tau_{41}, \dots, \tau_{4m-s}) > 0$, $\tau_5 = diag(\tau_{51}, \dots, \tau_{5m-s}) > 0$, $4\overline{\tau}_4\overline{\tau}_5 - (\nu\overline{\tau}_3)(\nu\overline{\tau}_3) > 0$, $\nu = diag(\nu_1, \dots, \nu_{m-s})$, $\overline{\alpha} - \nu \cdot \overline{\beta} = 0$, $\overline{\alpha} = diag(\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_{m-s})$, $\overline{\beta} = diag(\overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_{m-s})$ *и векторов* $\alpha \in R^n$, $\beta \in R^n$, $\gamma \in R^n$ *вдоль решения системы* (3) *несобственный интеграл*

$$I_8 = I_{10} + I_{20} + \overline{I}_{30} + \overline{I}_{40} = \int_0^\infty [\dddot{y}^*(t)D_1\dddot{y}(t) + \dot{y}^*(t)D_2\ddot{y}(t) + y^*(t)_3\ddot{y}(t) + \dot{y}^*(t)D_4\dot{y}(t) +$$
$$+ y^*(t)D_5\dot{y}(t) + y^*(t)D_6y(t)]dt \le \int_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)F_1\dot{y}(t) + y^*(t)(F_2 - T_{11} - \Gamma_{11})y(t)]dt + \tag{19}$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\overline{\tau}_2 d\sigma_i + \sum_{i=s+1}^{m} \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \Phi_i(\sigma_i)\overline{\tau}_{3i} d\sigma_i < \infty,$$

где $D_1 = -\Lambda_5 - \alpha^*\alpha$, $D_2 = \Lambda + 2\alpha^*\beta$, $D_3 = -\Lambda_1 - 2\alpha^*\gamma$, $D_4 = -\Lambda_4 - \beta^*\beta + T_{31} + \Gamma_{31}$, $D_5 = \Lambda_3^* + 2\beta^*\gamma - T_{11}^* - \Gamma_{11}^*$, $D_6 = -\Lambda - \gamma^*\gamma + T_{21} + \Gamma_{21}$.

Здесь несобственные интегралы $\overline{I}_{30}$, $\overline{I}_{40}$ *равны:*

$$\overline{I}_{30} = \int_0^\infty [-y^*(t)T_{11}^*\dot{y}(t) + y^*(t)T_{21}y(t) + \dot{y}^*(t)T_{31}\dot{y}(t)]dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{s} \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\overline{\tau}_2 d\sigma_i - \int_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)T_{11}y(t)]dt < \infty, \tag{20}$$

где $T_{11} = -[\overline{A}_{11}^{(1)}]^*\overline{\tau}_2R_1H_{01} + (\overline{C}_1 - R_1\overline{A}_{11}^{(1)})^*\overline{\tau}_2H_{01}$, $T_{21} = -[\overline{A}_{11}^{(1)}]^*\overline{\tau}_2(\overline{C}_1 - R_1\overline{A}_{11}^{(1)})$, $T_{31} = H_{01}^*\overline{\tau}_2R_1H_{01}$, $\overline{\tau_2} = diag(\tau_{21}, \dots, \tau_{2s})$;

$$\overline{I}_{40} = \int\limits_0^\infty [-y^*(t)\Gamma_{11}^*\dot{y}(t) + y^*(t)\Gamma_{21}y(t) + \dot{y}^*(t)\Gamma_{31}\dot{y}(t)]dt =$$
$$= \sum_{i=s+1}^{m} \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \Phi_i(\sigma_i)\overline{\tau}_{3i}d\sigma_i - \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)\Gamma_{11}y(t)]dt < \infty, \tag{21}$$

где $\Gamma_{11} = -[\overline{A}_{11}^{(2)}]^*\overline{\tau}_3R_2H_{02} + (\overline{C}_2 - R_2\overline{A}_{11}^{(2)})^*\overline{\tau}_3H_{02} - (\overline{C}_2 - R_2\overline{A}_{11}^{(2)})^*\overline{\tau}_5R_2H_{02} - (\overline{C}_2 - R_2\overline{A}_{11}^{(2)})^*\overline{\tau}_5R_2H_{02} + 2[\overline{A}_{11}^{(2)}]^*\overline{\tau}_4H_{02}$, $\Gamma_{21} = -[\overline{A}_{11}^{(2)}]^*\overline{\tau}_3(\overline{C}_2 - R_2\overline{A}_{11}^{(2)}) - (\overline{C}_2 - R_2\overline{A}_{11}^{(2)})^*\overline{\tau}_5(\overline{C}_2 - R_2\overline{A}_{11}^{(2)})^*\overline{\tau}_4A_{11}^{(2)}$, $\Gamma_{31} = H_{02}^*\overline{\tau}_3R_2H_{02} - H_{02}^*R_2^*\overline{\tau}_5R_2H_{02} - H_{02}^*\overline{\tau}_4H_{02}$, $\overline{\alpha}_i - \nu_i\overline{\beta}_i = 0$, $i = \overline{s+1,m}$, $\overline{\tau}_3 = diag(\tau_{31},\dots,\tau_{3m-s})$, $\overline{\tau}_4 = diag(\tau_{41},\dots,\tau_{4m-s}) > 0$, $\overline{\tau}_5 = diag(\tau_{51},\dots,\tau_{5m-s}) > 0$, $4\overline{\tau}_4\overline{\tau}_5 - (\nu\overline{\tau}_3)(\nu\overline{\tau}_3) > 0$, $\nu = diag(\nu_1,\dots,\nu_{m-s})$, $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_{m-s})$, $\overline{\beta} = (\overline{\beta}_1,\dots,\overline{\beta}_{m-s})$.

Доказательство. Как следует из результатов [16]: несобственный интеграл

$$\overline{I}_3 = \int\limits_0^\infty [\varphi^{(1)}(\sigma^{(1)}(t))]^*\overline{\tau}_2\dot{\sigma}^{(1)}(t)dt = \int\limits_0^\infty [H_{01}\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}^{(1)}y(t)]^*\overline{\tau}_2[(\overline{C}_1 - R_1\overline{A}_{11}^{(1)})y(t) +$$

$$+R_1H_{01}\dot{y}(t)]dt = \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\overline{\tau}_2d\sigma_i < \infty.$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл $\overline{I}_{30}$ определяется по формуле (20).

Аналогичным путем, для случая (17) на основе тождеств (18) имеем

$$\overline{I}_4 = \int\limits_0^\infty \{[\varphi^{(2)}(\sigma^{(2)}(t))]^*\overline{\tau}_3\dot{\sigma}^{(2)}(t) - [\varphi^{(2)}(\sigma^{(2)}(t))]^*\overline{\tau}_4[\varphi^{(2)}(\sigma^{(2)}(t))]^* -$$

$$-[\dot{\sigma}^{(2)}(t)]^*\overline{\tau}_5[\dot{\sigma}^{(2)}(t)]^*\}dt \le \sum_{i=s+1}^{m} \int\limits_0^\infty \Phi_i(\sigma_i(t))\overline{\tau}_{3i}d\sigma_i < \infty,$$

где $\Phi_i(\sigma_i) = \varphi_i(\sigma_i) - \nu_i|\varphi_i(\sigma_i)|$, $i = \overline{s+1,m}$. Следовательно, несобственный интеграл $\overline{I}_{40}$ определяется по формуле (21).

Несобственные интегралы I_{10}, I_{20} определяются формулами (7), (8) соответственно. Суммируя несобственные интегралы I_{10}, I_{20}, $\overline{I}_{30}$, $\overline{I}_{40}$ получим оценку (19). Теорема доказана.

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теоремы 5, и пусть, кроме того:*

1) $D_i = 0$, $i = 1,2,3$;

2) Матрицы $G_{11} = G_{11}^*$, G_{12}, $G_{22} = G_{22}^*$, $N = N^*$ *порядков* $n \times n$, $n \times n$, $n \times n$, $(n-m) \times (n-m)$ *соответственно такие, что*

$$G_{22} = \frac{1}{2}(D_4 + D_4^*) > 0, \quad G_{12} = \frac{1}{2}D_5, \quad G_{11} = \frac{1}{2}(D_6 + D_6^*) + \frac{1}{2}(H_1^*N\overline{A}_{12} +$$

$$+\overline{A}_{12}^*NJ_1), \quad G_{11} - G_{12}G_{22}^{-1}G_{12}^* > 0, \quad G_{12}^* = \frac{1}{2}D_5^*.$$

Тогда стационарное множество Λ *системы* (1), (2) *глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4. Если $D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, то несобственный интеграл

$$I_8 = \int\limits_0^\infty [\dot{y}^*(t)D_4\dot{y}(t) + y^*(t)D_5\dot{y}(t) + y^*(t)D_6y(t)]dt < \infty.$$

Тогда несобственный интеграл (см. (12))

$$I_9 = I_8 + I_6 = \int\limits_0^\infty z^*(t)Gz(t)dt < \infty,$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^* & G_{22} \end{pmatrix}, \quad z(t) = (y(t), \dot{y}(t)), \quad t \in I.$$

Далее, повторяя доказательства теоремы 4, получим $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = \sigma_*$, $\varphi(\sigma_*) = 0$. Теорема доказана.

3.5 Пример

Уравнения фазовой системы имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - \varphi_2(\sigma_2), \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - 1,03x_2 - 0,03x_3 - 0,75\varphi(\sigma_1), \\ \dot{x}_3 = -0,01x_2 - 1,01x_3 - 0,25\varphi_1(\sigma_1) + \varphi_2(\sigma_2), \\ \dot{\sigma}_1 = x_2 + x_3 + \varphi_1(\sigma_1), \quad \dot{\sigma}_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + \varphi_2(\sigma_2), \end{gathered} \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \varphi_2(\sigma_2)) \in C^1(R^21, R^2) \ / \ \mu_{11} \le \frac{d\varphi_1(\sigma_1)}{d\sigma_1} \le \mu_{21}, \\ \mu_{12} \le \frac{d\varphi_2(\sigma_2)}{d\sigma_2} \le \mu_{22}, \quad \varphi_1(\sigma_1) = \varphi_1(\sigma_1 + \Delta_1), \quad \varphi_2(\sigma_2) = \varphi_2(\sigma_2 + \Delta_2), \\ \forall\sigma_1, \quad \sigma \in R^1, \quad \forall\sigma_2, \quad \sigma_2 \in R^1\}. \end{gathered} \tag{23}$$

В частности, $\varphi_1(\sigma_1) = \sin\sigma_1$, $\varphi_2(\sigma_2) = \sin\sigma_2 + \gamma$, $\gamma \in (0,1)$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 2\pi$. В этом случае $\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+2\pi} \varphi_1(\xi_1)d\xi_1 = 0$, $\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_2+2\pi} \varphi_2(\xi_1)d\xi = \overline{\alpha} \neq 0$.

В векторной форме уравнение (22) запишется так

$$\dot{x} = Ax + B_1\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma), \tag{24}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1,03 & -0,03 \\ 0 & -0,01 & -1,01 \end{pmatrix}, \quad B = (B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -0,75 & 0 \\ -0,25 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = (0, 1, 1), \quad C_2 = (-1, 1, -1), \quad \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\sigma_1) \\ \varphi_2(\sigma_2) \end{pmatrix}.$$

1. Неособое преобразование. Выберем вектор $\theta_1^* = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13})$ так, чтобы $\theta_1^* B_1 = 1$, $\theta_1^* B_2 = 0$. Вектор $\theta_1^* = (1; -5/3; 1)$. Аналогично, определим вектор $\theta_2^* = (\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23})$ из условия $\theta_2^* B_1 = 0$, $\theta_2^* B_2 = 1$. Вектор $\theta_2^* = (0; -1/3; 1)$. Наконец, вектор $\theta_3^* = (\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33})$ выберем так, чтобы $\theta_3^* B_1 = 0$, $\theta_3^* B_2 = 0$. Вектор $\theta_3^* = (1; -1/3; 1)$. Определитель

$$\Gamma(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{vmatrix} <\theta_1, \theta_1> & <\theta_1, \theta_2> & <\theta_1, \theta_3> \\ <\theta_2 \theta_1> & <\theta_2, \theta_2> & <\theta_2, \theta_3> \\ <\theta_3, \theta_1> & <\theta_3, \theta_2> & <\theta_3, \theta_3> \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 43/9 & 14/9 & 23/9 \\ 14/9 & 10/9 & 10/9 \\ 23/9 & 10/9 & 19/9 \end{vmatrix} = \frac{16}{9} > 0.$$

Следовательно, векторы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ линейно независимы. Так как векторы $\theta_1^* A = (13/3; 8, 12/3, -0, 96)$, $\theta_2^* A = (2/3; 1/3, -1)$, $\theta_3^* A = (5/3; 4/3, -1)$, то

$$\theta_1^* A = -\frac{5,37}{3}\theta_1^* - \frac{15,88}{3}\theta_2^* + \frac{18,37}{3}\theta_3^*; \quad \theta_1^* A x = -\frac{5,37}{3} y_1 - \frac{15,88}{3} y_2 + \frac{18,37}{3} y_3,$$

где $y_1 = \theta_1^* x$, $y_2^* = \theta_2 x$, $y_3 = \theta_3^* x$. Следовательно,

$$\dot{y}_1 = -\frac{5,37}{3} y_1 - \frac{15,88}{3} y_2 + \frac{18,37}{3} y_3 + \varphi_1(\sigma_1).$$

Аналогичным путем, находим

$$\dot{y}_2 = -\frac{5}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 + \varphi_2(\sigma_2), \quad \dot{y}_3 = -\frac{3}{4} y_1 - \frac{8}{3} y_2 + \frac{29}{13} y_3.$$

Так как $C_1 = (0, 1, 1) = -1 \cdot \theta_1^* + 1 \cdot \theta_2^* + 1 \cdot \theta_3^*$, то $C_1 x = -y_1 + y_2 + y_3$, $C_2 = (-1, 1, -1) = -\frac{1}{2}\theta_1^* - \frac{1}{2}\theta_3^*$, $C_2 x = -\frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_3$.

Из вышеизложенного следует, что уравнение (24) с неособым преобразованием приводится к виду

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = -\frac{5,37}{3} y_1 - \frac{15,88}{3} y_2 + \frac{18,37}{3} y_3 + \varphi_1(\sigma_1), \\ &\dot{y}_2 = -\frac{5}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 + \varphi_2(\sigma_2), \quad \dot{y}_3 = -\frac{3}{4} y_1 - \frac{8}{3} y_2 + \frac{29}{12} y_3, \\ &\dot{\sigma}_1 = -y_1 + y_2 + y_3 + \varphi_1(\sigma_1), \quad \dot{\sigma}_2 = -\frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_3 + \varphi_2(\sigma_2), \\ &\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \varphi_2(\sigma_2)) \in \Phi_0. \end{aligned} \tag{25}$$

Матрица

$$P = \|\theta_1, \theta_2, \theta_3\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |P| = -\frac{4}{3} \neq 0.$$

$$K = P^* = \begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 1 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \\ -1/4 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\overline{A} = KAK^{-1} = \begin{pmatrix} -1,79 & -15,88/3 & 18,37/3 \\ 0 & -5/3 & 2/3 \\ -3/4 & -8/3 & 29/12 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = KB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{C} = CK^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

уравнение (25) запишем в векторной форме

$$\dot{y} = \overline{A}y + \overline{B}\varphi(\sigma), \;\; \dot{\sigma} = \overline{C}y + R\varphi(\sigma), \;\; \varphi(\sigma) \in \Phi_0. \tag{26}$$

2. Свойства решений. Характеристическое уравнение матрицы A равно

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = |\lambda I_3 - A| = \lambda^3 + 1,04\lambda^2 + \lambda + 0,98 = 0.$$

Так как все коэффициенты характеристического полинома больше нуля и $1,04 > 0,98$, то матрица A – гурвицева. Тогда, как следует из теоремы 1 [16] верны оценки $|x(t)| \le c_0$, $|\dot{x}(t)| \le c_1$, $|y(t)| \le c_2$, $|\dot{y}(t)| \le c_3$, $|\dot{\sigma}(t)| \le c_4$, $t \in I = [0, \infty)$. Поскольку матрицы A, $\overline{A}$ подобны, то $\lambda_j(A) = \lambda_j(\overline{A})$, $j = 1, 2, 3$. Следовательно, матрица $\overline{A}$ – гурвицева.

Из (25), (26) имеем

$$\begin{aligned} &\varphi(\sigma(t)) = H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t), \;\; \dot{\sigma}(t) = (\overline{C} - R\overline{A}_{11})y(t) + RH_0\dot{y}(t), \\ &H_1\dot{y}(t) = \overline{A}_{12}y(t), \;\; t \in I, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\varphi(\sigma(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\sigma_1(t)) \\ \varphi_2(\sigma_2(t)) \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = (0, 0, 1), \quad \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = I_3,$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} \\ \overline{A}_{12} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_{11} = \begin{pmatrix} -1,79 & -15,88/3 & 18,37/3 \\ 0 & -5/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_{12} = (-3/4, -8/3, 29/12).$$

Из (27) следует, что

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\sigma_1(t)) = \frac{5,37}{3}y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3 + \dot{y}_1, \;\; y_i = y_i(t), \;\; i = 1, 2, 3, \;\; t \in I; \\ &\varphi_2(\sigma_2(t)) = \frac{5}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 + \dot{y}_2, \;\; t \in I, \;\; \dot{y}_i = \dot{y}_i(t), \;\; i = 1, 2, 3; \\ &\dot{\sigma}_1(t) = \frac{2,37}{3}y_1 - \frac{12,88}{3}y_2 + \frac{21,37}{3}y_3 + \dot{y}_1, \;\; t \in I; \\ &\dot{\sigma}_2(t) = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{3}y_2 - \frac{7}{6}y_3 + \dot{y}_2, \;\; t \in I. \end{aligned} \tag{28}$$

На основе тождеств (28) могут быть вычислены несобственные интегралы I_{10}, I_{20}, I_{30}, I_{40}, $\overline{I}_{30}$, $\overline{I}_{40}$, и установлены условия глобальной асимптотической устойчивости для случаев:

а) $$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+\Delta_1} \varphi_1(\xi_1)d\xi_1 = 0; \quad \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_2+\Delta_2} \varphi_2(\xi_2)d\xi_2 = 0;$$

б) $$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+\Delta_1} \varphi_1(\xi_1)d\xi_1 = \overline{\alpha}_1; \quad \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_2+\Delta_2} \varphi_2(\xi_2)d\xi_2 = \overline{\alpha}_2, \ \ \overline{\alpha}_1 \neq 0, \ \ \overline{\alpha}_2 \neq 0.$$

в) $$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+\Delta_1} \varphi_1(\xi_1)d\xi_1 = 0; \quad \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_2+\Delta_2} \varphi_2(\xi_2)d\xi_2 = \overline{\alpha} \neq 0.$$

Для случаев а), б) $\mu_1 = diag(\mu_{11}, \mu_{12})$, $\mu_2 = diag(\mu_{21}, \mu_{22})$, $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \tau_{12}) > 0$, $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \tau_{22})$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in R^3$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in R^3$, $\tau_3 = diag(\tau_{31}, \tau_{32})$, $\tau_4 = diag(\tau_{41}, \tau_{42}) > 0$, $\tau_5 = diag(\tau_{51}, \tau_{52})$, $\overline{\alpha} = diag(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2)$, $\nu = diag(\nu_1, \nu_2)$, $\overline{\beta} = diag(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2)$, $4\tau_4\tau_5 - (\nu\tau_3)(\nu\tau_3) > 0$.

В частности, если $\varphi_1(\sigma_1) = \sin\sigma_1$, $\varphi_2(\sigma_2) = \sin\sigma_2 - \overline{\gamma}$, $\overline{\gamma} \in (0, 1)$ величины

$$\overline{\alpha}_2 = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_2+2\pi} \varphi_2(\xi_2)d\xi_2 = -2\pi\overline{\gamma}, \quad \overline{\beta}_2 = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_2+2\pi} |\varphi_2(\xi_2)|d\xi_2 = 4[\overline{\gamma}\arcsin\overline{\gamma} + \sqrt{1-\overline{\gamma}^2}],$$

$$\overline{\nu}_2 = \frac{\overline{\alpha}_2}{\overline{\beta}_2} = \frac{-0,5\pi\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}\arcsin\overline{\gamma} + \sqrt{1-\overline{\gamma}^2}}.$$

4 Результаты и обсуждение

Создана общая теория глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем со счетным положением равновесия, основанная на априорном оценивании несобственных интегралов вдоль решения системы.

Основными результатами полученных в данной работе являются:

– установлены ограниченность решений многомерных фазовых систем и их производных первого и второго порядков;

– найдены условия при выполнении которых решение динамических систем со счетным положением равновесия и ее производное первого порядка обладают асимптотическими свойствами;

– получены условия глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем с равными нулю в периоде значениями интегралов от компонентов периодических нелинейностей;

– получены условия глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем с не равными нулю в периоде значениями интегралов от составляющих нелинейных периодических функций;

– исследованы асимптотические свойства решений динамических систем со счетным положением равновесия в общем случае, когда часть компонентов нелинейных периодических функции обладают значениями интегралов в периоде равными нулю, а для другой части компонентов значения интегралов в периоде не равными нулю.

Список литературы

[1] *Triomi F.* Integrazione di uniquzione differenziale presentatasi in electrotechnica // Annali della Roma schuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche Matematiche. – 1933. – No 2, Vol 2. – P. 3-10.

[2] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 600 с.

[3] *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическими фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 305 с.

[4] *Бакаев Ю.Н.* Некоторые вопросы нелинейной теории фазовых систем // М.: Труды ВИЛ им. Жуковского. – 1959. – Вып. 800. – С. 105-110.

[5] *Бакаев Ю.Н., Гуж А.А.* Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Допплера // Радиотехника и электроника. – 1965. – Т. 10, № 1. – С. 35-46.

[6] *Фазовая синхронизация.* – Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. – М.: Связь, 1975. – 401 с.

[7] *Леонов Г.А.* Устойчивость и колебания фазовых систем // Сибирский матем. журнал. – 1975. – № 5. – С. 7-15.

[8] *Леонов Г.А.* Об ограниченности решений фазовых систем // Вестник ЛГУ. – 1976. – № 1. –С 10-15.

[9] *Леонов Г.А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сибирский математ. журнал. – 1976. – № 1. – С. 10-17.

[10] *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Асимптотика решений системы интегро-дифференциальных уравнений с периодическими нелинейными функциями // Сибирский матем. журнал. – 1978. – № 4. – С. 115-124.

[11] *Применение метода функций Ляпунова в энергетике.* – Под ред. Тагирова М.А. – Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1975. – 301 с.

[12] *Айсагалиев С.А., Иманкул Т.Ш.* Теория фазовых систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2005. – 272 с.

[13] *Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А.* К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем // Дифференциальные уравнения. – Минск-Москва. МГУ. – 1999. – Т. 8, № 30. – С. 3-11.

[14] *Айсагалиев С.А., Абенов Б.К., Аязбаева А.М.* К глобальной асимптотической устойчивости динамических систем // Вестник КазНУ (сер. мат., мех., инф.), 2015. – Т. 85, №2. – С. 3-25.

[15] *Айсагалиев С.А* Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений. – Алматы: Қазақ университетi, 2016. – 420 с.

[16] *Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.* Несобственные интегралы в теории глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2018. – №1 (97) . – С. 3-21.

References

[1] Triomi F. "Integrazione di uniquzione differenziale presentatasi in electrotechnica *Annali della Roma schuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche Matematiche*, Vol 2, No 2 (1933) : 3–10.

[2] Andronov A. A., Vitt A. Haykin S. E. *Teoriya kolebaniya* [Theory of oscillation], (M.: Fizmatgiz, 1959) : 600.

[3] Barbashin E. A., Tabueva V. A. *Dinamicheskie sistemyi s tsilindricheskimi fazovyim prostranstvom* [Dynamic systems with cylindrical phase space], (M.: Nauka, 1969) : 305.

[4] Bakaev Yu.N. *Nekotoryie voprosyi nelineynoy teorii fazovyih sistem* [Some questions of the nonlinear theory of phase systems], (M.: Trudyi VIL im. Zhukovskogo, 1959) : 105–110.

[5] Bakaev Yu. N., Guzh A. A. *Optimalnyiy priem signalov chastotnoy modulyatsii v usloviyah effekta Dopplera* [An optimal reception of frequency modulation signals under the conditions of Doppler effect], *Radiotehnika i elektronika*, T. 10, No 1 (1965) : 36–46.

[6] *Fazovaya sinhronizatsiya* [Phase synchronization], *Pod red. V.V. Shahgildyana i L.N. Belyustinoy*, (M.: Svyaz, 1975) : 401.

[7] Leonov G. A. "Ustoychivost i kolebaniya fazovyih sistem"[Stability and oscillations of phase systems], *Sibirskiy matem. zhurnal*, No 5 (1975) : 7–15.

[8] Leonov G. A. *Ob ogranichennosti resheniy fazovyih sistem* [Stability and oscillations of phase system], *Vestnik LGU*, No 1 (1976) : 10–15.

[9] Leonov G. A. "Ob odnom klasse dinamicheskih sistem s tsilindricheskim fazovyim prostranstvom"[On a class of dynamical systems with a cylindrical phase space], *Sibirskiy matema. zhurnal*, No 1 (1976) : 10–17.

[10] Leonov G. A., Smirnova V. B., "Asimptotika resheniy sistemyi integro-differentsialnyih uravneniy s periodicheskimi nelineynyimi funktsiyami"[Asymptotics of solutions of a system of integro-differential equations with periodic nonlinear functions], *Sibirskiy matem. zhurnal*, No 4 (1978) : 115–124.

[11] *Primenenie metoda funktsiy Lyapunova v energetike* [Application of the Lyapunov function method in the engineering], *Pod red. Tagirova M.A.*, (Novosibirsk: Nauka, Sib. otdelenie, 1975) : 301.

[12] Aisagaliev S. A., Imankul T.,Sh. *Teoriya fazovyih sistem* [Theory of phase systems] (Kazakh universiteti, 2005), 272.

[13] *Aisagaliev S.A., Aipanov Sh.A. K teorii globalnoy asimptoticheskoy ustoychivosti fazovyih sistem* [To the theory of global asymptotic stability of phase systems], *Differentsialnyie uravneniya*, Vol. 8, No 30 (1999) : 3–11.

[14] *Aisagaliev S.A., Abenov B.K., Ayazbaeva A.M. K globalnoy asimptoticheskoy ustoychivosti dinamicheskih sistem* [To global asymptotic stability of dynamical systems], *Vestnik KazNU (ser. mat., meh., inf.)*, Vol. 85, No 2 (2015) : 3–25.

[15] *Aisagaliev S.A kachestvennoy teorii differentsialnyih uravneniy* [The problems of the qualitative theory of differential equations] (Kazakh universiteti, 2016), 420.

[16] *Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S. Nesobstvennyie integralyi v teorii globalnoy asimptoticheskoy ustoychivosti mnogomernyih fazovyih sistem* [Improper integrals in the theory of global asymptotic stability of multidimensional phase systems], *Vestnik KazNU. (ser. mat., meh., inf.)*, No 1(97) (2018) : 3-21.