

# Моделирование нестационарных контактных задач динамики упругих сред

Б.Т. Сарсенов

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан  
bakytbek.sarsenov@iktu.kz

**Аннотация.** В настоящей работе дана постановка начально-краевой контактной задачи при жестком сцеплении прямоугольного тела и породного массива, приведены определяющие уравнения движения, дан выбор точечной расчетной схемы и шаблона. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Решена модельная задача для исследования напряженно - деформированного состояния поверхностных сооружений, обусловленного сбросом тектонических напряжений на глубинных трещинах в земной коре при землетрясениях. Построены дифракционные картины процессов распространения, отражения и преломления сейсмических волн, характеризующие поля скоростей и напряжений в среде и поверхностном включении, осциллограммы скоростей и напряжений на дневной поверхности, и проведено исследование волновых процессов при разном типе сейсмического воздействия, моделирующего процессы образования в земной коре трещин отрыва и сдвига.

**Ключевые слова:** распространения упругих волн, трещина, землетрясение, поле скоростей, изолинии напряжения, осциллограммы скоростей.

## 1 Введение

Исследование процессов распространения и дифракции сейсмических волн в земной коре и их воздействия на наземные сооружения относится к актуальным проблемам геофизики, сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Характерным для землетрясений является возникновение в земной коре под действием тектонических напряжений глубинных трещин. При этом происходит скачкообразный сброс напряжений на трещине, порождающий нестационарные упругие волны, которые, дифрагируя на земной поверхности, порождают поверхностные волны, разрушительные для наземных сооружений. Здесь разработана математическая модель для изучения таких явлений. Для решения нестационарных задач в упругих средах одним из наиболее удобных в приложениях методов является метод бихарактеристик с использованием идей метода расщепления, развитый Г.Т.Тарабриным [1]. В настоящей работе этот метод развит для решения контактных задач взаимодействия упругих тел с угловыми точками в условиях плоской деформации [2], [3]. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Для моделирования процесса сброса напряжений на трещине используются сингулярные обобщенные функции по методу, предложенному в [4]. Проведены численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния упругого полупространства и упругого тела при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на трещине с использованием физико-механических параметров, типичных для горных пород и строительных сооружений. Построены осциллограммы скоростей перемещений дневной

поверхности и упругого тела и дифракционные картины полей скоростей и напряжений при отражении и преломлении ударных волн. Исследовано влияние параметров массива, глубины трещины и характера возникающих ударных волн на напряженно-деформированное состояние среды и упругого тела. Также изучено напряженно-деформированное состояние упругого тела (сооружения) в зависимости от расстояния до эпицентра.

## 2 Постановка контактной задачи

Рассмотрим составную неоднородную упругую среду в условиях плоской деформации: полупространство  $x_1 \geq 0$  однородной изотропной упругой среды (среда  $D_1$ ) с плотностью  $\rho_1$  и коэффициентами Ламе  $\lambda_1$  и  $\mu_1$ , и поверхностное включение (среда  $D_2$  – изотропное упругое тело с высотой  $d_1$  и шириной  $2d_2$ ) с плотностью  $\rho_2$  и коэффициентами Ламе  $\lambda_2, \mu_2$ , (рис.1).

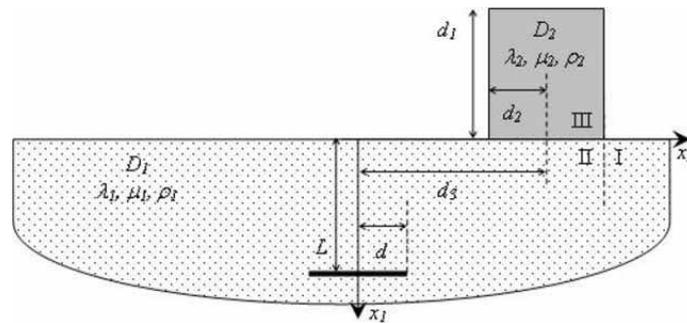


Рис. 1. Упругое полупространство  $D_1$  с поверхностным включением  $D_2$

Предполагается, что до начального момента времени среда находится в состоянии покоя:

$$\mathbf{u}^{(k)} = 0, \dot{\mathbf{u}}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2), \tag{1}$$

а при  $t \geq 0$  происходит сброс напряжений на горизонтальной трещине  $S$ , которая расположена на глубине  $L$  ( $x_1 = L, |x_2| \leq d$ ).

Границы полупространства и включения свободны от внешних нагрузок:

$$\sigma_{1j}^{(1)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = 0, |x_2 - d_3| > d_2, \tag{2}$$

$$\sigma_{1j}^{(2)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = -d_1, |x_2 - d_3| \leq d_2, \tag{3}$$

$$\sigma_{2j}^{(2)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad \text{при } |x_2 - d_3| = d_2, 0 \leq x_1 \leq d_1, \tag{4}$$

где  $d_3$  – горизонтальная координата центра масс упругого включения (см. рис.1).

Условия на контактной границе пространства и включения отвечают требованиям полного сцепления (жесткий контакт):

$$v_j^{(1)} = v_j^{(2)}, \sigma_{1j}^{(1)} = \sigma_{1j}^{(2)} \quad (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = 0, |x_2 - d_3| \leq d_2. \tag{5}$$

Здесь  $\sigma_{ij}^{(k)}(x, t)$  – компоненты тензора напряжений  $k$ -ой среды в точке  $x = (x_1, x_2)$  в момент времени  $t$ ,  $v_j^{(k)}(x, t)$  – компоненты скоростей перемещений этих сред.

Так как на бесконечности отсутствуют источники возмущений, то очевидным является требование:

$$u_j \rightarrow 0, \quad \sigma_{ij} \rightarrow 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad \text{при } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Для описания движения упругой среды используются две системы дифференциальных уравнений:

$$\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} + F_i^{(k)} = \rho_k \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2} \quad (i, k = 1, 2) \quad (6)$$

и соотношения обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \lambda_k u_{\beta,\beta}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_k (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (7)$$

Здесь по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование от 1 до 2 (тензорная свертка),  $u_i^{(k)} = \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_k}$ ,  $F_i^{(k)}$  – компоненты объемной силы в  $k$ -ой среде,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Для моделирования сброса напряжений на трещине в полупространстве введена объемная сила  $\mathbf{F}^{(1)}$ , компоненты  $F_i^{(1)}$  которой определяются сингулярной обобщенной функцией – простым слоем на горизонтальной трещине  $S$  [4]. В данном случае они имеют следующий вид:

$$F_i^{(1)} = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta_S(x) = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta(x_1 - L) H(d - |x_2|), \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

где выражение в квадратных скобках – скачок компонент тензора напряжений на берегах трещины,  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к ее поверхности, здесь  $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (1, 0)$ ,  $H(t)$  – функция Хевисайда,  $\delta(x_1)$  – дельта-функция Дирака. Предполагается, что скачок напряжений на трещине известен:

$$n_\beta [\sigma_{i\beta}(x)]_S = P_i(x, t), \quad x \in S, \quad t > 0. \quad (9)$$

Здесь в расчетах он имеет импульсный вид:

$$P_i(x, t) = P t e^{-at} H(t) \quad (a > 0), \quad (10)$$

характерный для землетрясений. При описанных условиях необходимо определить напряженно-деформированное состояние среды и поверхностного включения  $D_1 \cup D_2$  при  $t > 0$ .

### 3 Определяющие уравнения

Решение задачи удобно отыскивать в безразмерном пространстве переменных и искомым функций, которые получаются после введения обозначений [5]

$$c_1^{(k)} = \frac{c_1^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad c_2^{(k)} = \frac{c_2^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad x_i = \frac{x_i^*}{L^*}; \quad t = \frac{t^* c_1^{(m)*}}{L^*};$$

$$\rho_k = \frac{\rho_k^*}{\rho_m^*}; \quad v_i^{(k)} = \frac{u_i^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad \sigma_{ij}^{(k)} = \frac{\sigma_{ij}^{(k)*}}{\rho_m^* (c_1^{(m)*})^2}; \quad F_i^{(k)} = \frac{F_i^{(k)*} L^*}{\rho_m^* (c_1^{(m)*})^2}$$

$$\gamma_{11}^{(k)} = \gamma_{22}^{(k)} = \rho_k \left( c_1^{(k)} \right)^2; \quad \gamma_{12}^{(k)} = \gamma_{21}^{(k)} = \rho_k \left( c_2^{(k)} \right)^2; \quad \gamma_{33}^{(k)} = \gamma_{11}^{(k)} - 2\gamma_{12}^{(k)}$$

Здесь индекс \* придается размерным величинам; индекс  $m$  относится к материалу, в котором скорость продольных волн является наибольшей;  $L^*$  – характерный линейный размер;  $c_1^{(k)*} = \sqrt{\frac{\lambda_k^* + 2\mu_k^*}{\rho_k^*}}$ ,  $c_2^{(k)*} = \sqrt{\frac{\mu_k^*}{\rho_k^*}}$  – скорости распространения продольных (сжатия-расширения) и поперечных (сдвиговых) волн в  $k$ -той среде.

После введения безразмерных величин, из уравнений (6), (7) после простых преобразований получим систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} \rho_k \dot{v}_i^{(k)} &= \sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\ \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} &= \gamma_{ij}^{(k)} (v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)}) \frac{1}{(1+\delta_{ij})} + \gamma_{33}^{(k)} (v_{\beta,\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)}) \delta_{ij}, \\ &(i, j, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (11)$$

Система (11) имеет два семейства характеристических конусов. Образующие этих конусов совпадают с бихарактеристиками уравнений (11). Вдоль характеристик, лежащих в плоскости  $x_\alpha = \text{const}$ , уравнения (11) являются функциями только двух переменных  $(x_j; t)$  ( $j \neq \alpha$ ). Это дает возможность записать условия на бихарактеристиках как условия на характеристиках в соответствующей одномерной задаче. Соответствующие преобразования можно выполнить, если в системе уравнений (11) поочередно зафиксировать одну из пространственных переменных. При этом система уравнений (11) расщепляется на две системы уравнений, соответствующие направлениям  $j=1$  и  $j=2$  ( $i=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \dot{v}_i^{(k)} - \rho_k^{-1} \sigma_{ij,j}^{(k)} &= a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\ \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} - \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} &= b_{ij}^{(k)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= \rho_k^{-1} (\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} - \sigma_{ij,j}^{(k)}), \\ b_{ij}^{(k)} &= \gamma_{ij}^{(k)} v_{j,i}^{(k)} (1 - \delta_{ij}) + \gamma_{33}^{(k)} (v_{\beta,\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)}) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид:

$$dx_i = \pm \lambda_{ij}^{(k)} dt \quad (14)$$

а условиями на бихарактеристиках являются соотношения:

$$d\sigma_{ij}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} dv_i^{(k)} = \left( b_{ij}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left[ a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)} \right] \right) dt \quad (15)$$

здесь  $\lambda_{ij}^{(k)} = \sqrt{\rho_k^{-1} \gamma_{ij}^{(k)}} = c_1^{(k)} \delta_{ij} + c_2^{(k)} (1 - \delta_{ij})$ . Из (14) видно, что на каждой из двух гиперплоскостей имеются две пары семейств характеристик, определяющие продольные  $\lambda_{ii}^{(k)}$  и сдвиговые  $\lambda_{ij}^{(k)}$  ( $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2$ ) скорости распространения волн. В каждой из двух плоскостей  $(x_j; t)$  имеются по два семейства бихарактеристик положительного и отрицательного направлений. Верхний знак соответствует характеристикам положительного, а нижний - отрицательного направлений. Уравнения (14) и (29) соответствуют друг другу при одинаковой паре индексов и при одинаковом расположении знаков. Уравнения (12) и условия (29) используются для отыскания решения сформулированной задачи (1) – (7).

### 4 Выбор точечной схемы шаблона

Пусть тело  $D_1 \cup D_2$  разбивается на ячейки, образуемые пересечениями координатных поверхностей  $x_i = const$  ( $i = 1, 2$ ). Линейные размеры этих ячеек в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$  считаются равномерными и равными  $h$ . Пересечения линий  $x_i = const$  ( $i = 1, 2$ ) образуют узлы. В этих узловых точках отыскиваются значения искомым функций  $v_i^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) в различные моменты времени  $t_n - \tau, t_n, t_n + \tau$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) с шагом по времени  $\tau$ . Получившаяся сетка является трехмерной. Точечная сетка, на основе которых строится разностная схема, помимо упомянутых узловых точек содержит точки, образованные пересечениями бихарактеристик с гиперплоскостями  $t = const$ . Принимается шаблон, состоящий из узла  $O$  и точек  $E_{ij}^{\pm(k)}$ , лежащих на координатных линиях  $x_j = const$  и отстоящих от точки  $O$  на расстояния  $\lambda_{ij}^{(k)} \tau$ . В дальнейшем значениям функций в точке  $O$  приписывается верхний знак "0"; в точках  $E_{ij}^{\pm(k)}$  – нижний "ij" и верхний знак  $\pm$  (например,  $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ ), а в точке  $A$  дополнительный индекс не приписывается. Точки  $O$  и  $A$  представляют собой одну и ту же точку тела в моменты времени, отстоящие друг от друга на один шаг  $\tau$  по времени (рис.2).

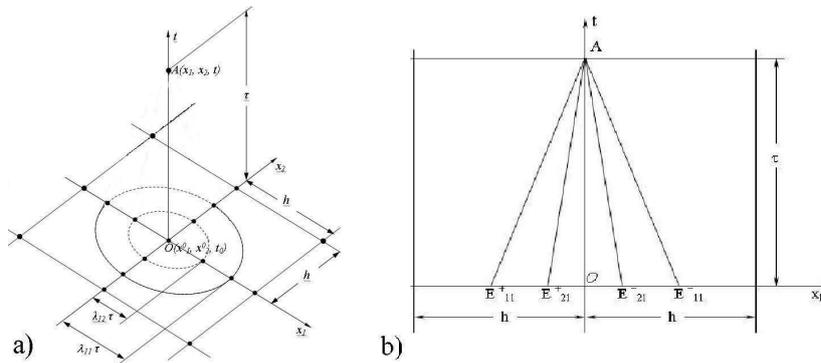


Рис. 2. Точечная схема шаблона: а) трехмерная б) на  $x_2 = const$

На основании описанных точечных схем разрабатываемая ниже методика решения динамических задач позволяет определить скорости частиц  $v_i^{(k)}$  и компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$  в точке  $A$  на слое по времени  $t_n$ , если известны их значения на предыдущем слое  $t_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) в точке  $O$  и в прилегающих к ней точках  $E_{ij}^{\pm(k)}$ .

### 5 Разрешающие разностные уравнения во внутренних точках

Интегрирование системы уравнений (12) от точки  $O$  до точки  $A$  и соотношений (29) от точки  $E_{ij}^{\pm(k)}$  до точки  $A$  методом трапеции позволяет получить выражения следующего типа

$$\begin{aligned} v_i^{(k)} &= v_i^{0(k)} + \frac{\tau}{2} \left( \rho_k^{-1} \sigma_{ii,i}^{0(k)} + a_{ii}^{0(k)} + F_i^0 + \rho_k^{-1} \sigma_{ii,i}^{(k)} + a_{ii}^{(k)} + F_i^{(k)} \right), \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{0(k)} + \frac{\tau}{2} \left( \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{0(k)} + b_{ij}^{0(k)} + \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} + b_{ij}^{(k)} \right), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} (v_i^{(k)} - v_i^{\pm(k)}) &= \\ = \frac{\tau}{2} \left( b_{ij}^{(k)} + b_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left[ a_{ij}^{(k)} + a_{ij}^{\pm(k)} + F_i^{(k)} + F_i^{\pm(k)} \right] \right), \end{aligned} \tag{17}$$

где система уравнений (16) и (17), состоящая из 13 уравнений, разрешается относительно 13 неизвестных для каждой среды ( $k=1, 2$ ): 5 функций  $v_i^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}$  ( $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}$ ) и их 8 производных  $a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)}$  ( $v_{1,1}^{(k)}, v_{1,2}^{(k)}, v_{2,1}^{(k)}, v_{2,2}^{(k)}, \sigma_{11,1}^{(k)}, \sigma_{12,2}^{(k)}, \sigma_{21,1}^{(k)}, \sigma_{22,2}^{(k)}$ ).

Значения функций в не узловых точках  $E_{ij}^{\pm(k)}$  заменяются величинами, вычисленными по формуле Тейлора с точностью до первого порядка для производных  $a_{ij}^{\pm(k)}$  и  $b_{ij}^{\pm(k)}$  и с точностью до второго порядка для функций  $v_i^{\pm(k)}$  и  $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$  через их значения в узловых точках  $(x_1^0, x_2^0, t_0)$ :

$$\begin{aligned} a_{ij}^{\pm(k)} &= a_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial a_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j}, \\ b_{ij}^{\pm(k)} &= b_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial b_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\pm(k)} &= \sigma_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j^2}, \\ v_i^{\pm(k)} &= v_i^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 v_i^{0(k)}}{\partial x_j^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив соотношения (18), (24) в (17), затем исключив при помощи (16) переменные  $v_i^{(k)}$  и  $\sigma_{ij}^{(k)}$  и учитывая (18), можно получить восемь уравнений относительно производных  $v_{i,j}^{(k)}$  и  $\sigma_{ij,j}^{(k)}$  в расчетном слое времени

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} &= \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau \left[ \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j,j}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)} \right] \mp \\ &\mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left( v_{i,j}^{0(k)} + \tau \left[ \rho_k^{-1} \sigma_{ij,j}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)} \right] \right) + F_i^{\pm} - F_i^0, \end{aligned} \quad (20)$$

Складывая и вычитая поочередно соответствующие пары уравнений (27), можно найти неизвестные производные

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{(k)} &= v_{i,j}^{0(k)} + \tau \left( \rho_k^{-1} \sigma_{ij,j}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)} \right) + \frac{1}{2\rho_k \lambda_{ij}^{(k)}} (F_i^- - F_i^+), \\ \sigma_{ij,j}^{(k)} &= \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau \left( \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j,j}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)} \right) + \frac{1}{2} (F_i^- + F_i^+ - 2F_i^0), \end{aligned} \quad (21)$$

Систему уравнений (28) можно использовать для определения неизвестных производных как во внутренних, так и граничных узловых точках исследуемой области. Однако важно иметь промежуточные соотношения (27), которые используются при решении систем уравнений, где заданы граничные функции. Подстановка равенств (28) в (16) позволяет получить неизвестные функции  $v_i^{(k)}$  и  $\sigma_{ij}^{(k)}$  во внутренних узловых точках неоднородного тела в момент времени  $t_n + \tau$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).

## 6 Разностные уравнения в граничных точках

На граничных линиях  $x_j = const$  заданы два компонента напряжения (см. (2) - (4)). В расчетах не могут быть использованы два условия из (27), условия на двух характеристиках, не принадлежащих исследуемой области. Тем самым, по сравнению с внутренними точками, число уравнений (27) сокращается на два. Совокупность оставшихся уравнений (27), (16) и двух граничных условий из (2) - (4) является замкнутой линейной системой относительно тринадцати неизвестных (восьми производных и пяти функций). Точки контактных линий также рассматриваются как граничные точки только для отдельных областей  $D_1 \cup D_2$ . В каждой из этих точек сопряжения число уравнений (27), (16) равно 22, а неизвестных 26.

Замкнутая система уравнений получается, если использовать наряду с уравнениями (16), (27) четыре условия жесткого сцепления полосы и полуплоскости (5).

## 7 Разностные уравнения в свободных угловых точках

На угловых точках, образовавшихся пересечением двух границ, все условия, заданные на двух границах, должны выполняться. Поэтому в угловых точках задаются четыре условия, которые, взамен четырех условиями на четырех бихарактеристиках, не принадлежащих области  $D_1 \cup D_2$ , замыкают систему линейных уравнений относительно тринадцати неизвестных.

В верхних угловых точках тела  $D_2$  (рис.1) заданы четыре компоненты тензора напряжений. В силу закона парности касательных напряжений только три из них являются линейно-независимыми. Число неизвестных производных можно сократить непосредственным дифференцированием (3), (4), получаются, что  $\sigma_{21,1}^{(k)} = 0$  и  $\sigma_{12,1}^{(k)} = 0$ . Остальные неизвестные вычисляются при последовательном решении уравнений (27) и (16).

## 8 Разностные уравнения в контактных угловых точках

Нижние угловые точки тела  $D_2$  являются контактными точками неоднородной среды  $D_1 \cup D_2$ , которые имеют особенности. Развивая идеи, впервые описанные в [6], вычисляются разностные уравнения в контактных угловых точках исследуемого тела. В этих особых точках из физических соображений принимается, что компоненты напряжений  $\sigma_{22}^{(2)} = 0$  и  $\sigma_{12}^{(2)} = 0$  и используются условия контакта (5).

В этих особых точках производные могут терпеть разрывы. Поэтому предполагается, что область  $D_1$  по линии продолжения боковых сторон тела  $D_2$  мысленно разделить на подобласти (I), (II). Тем самым, около особых точек рассматриваются три подобласти (I), (II), (III) (рис.1). Для подобластей (I) и (II) принимаются условия непрерывности функций

$$v_i^{(I)} = v_i^{(II)}, \quad \sigma_{ij}^{(I)} = \sigma_{ij}^{(II)} \quad (i, j = 1, 2), \quad (22)$$

и их производных

$$v_{i,1}^{(I)} = v_{i,1}^{(II)}, \quad \sigma_{i1,1}^{(I)} = \sigma_{i1,1}^{(II)} \quad (i = 1, 2), \quad (23)$$

Двенадцать производных для первой среды и восемь производных для второй среды вычисляются по формуле (28). Подставляя в уравнение (16) производные, найденные таким образом, для каждой подобласти и выполняя условия (5), (22) и (23), вычисляются неизвестные функции в этих точках, как многосвязных узлах совокупности подобластей (I), (II), (III).

Значения производных в узловых точках исследуемой области на нижнем слое по времени вычисляются с использованием центральной разности во внутренних узловых точках, а в граничных точках соответствующим аппроксимациями "вперед" и "назад".

## 9 Точность и устойчивость численного решения

Необходимое условие устойчивости сеточно-характеристического метода, вытекающего из условия Неймана (спектральный радиус расширенной матрицы не превосходит единицы) отыскивается в виде:

$$\max \left| \frac{\tau \lambda_{ij}^{(k)}}{h} \right| \leq 1 \quad (24)$$

где  $\lambda_{ij}^{(k)}$  являются коэффициентами гиперболической системы. Физически такое ограничение означает, что решение в вершине гиперконуса выражается через начальное значение внутри области, ограниченной поверхностью гиперконуса, т.е. решение в искомой точке определяется через область влияния. В дальнейшем при проведении расчетов шаги пространственно - временной сетки выбираются согласно условиям устойчивости (24) которое выражает условие Куранта - Фридрихса - Леви. Многочисленными расчетами экспериментально проверено, что условие  $\left| \frac{\tau}{h} \right| \leq \frac{1}{2}$  обеспечивает устойчивость счета для большого момента времени, а также выбор шагов по времени  $\tau = 0.025$  и пространства  $h = 0.05$  обеспечивает сходимость по сетке (средняя относительная погрешность 0,1%) [2].

## 10 Дифракция отраженных и преломленных волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине

Расчет был произведен для грунта ( $D_1$ ) и ( $D_2$ ) бетона при следующих безразмерных значениях исходных данных:  $\rho_1 = 1; c_1^{(1)} = 0.964; c_2^{(1)} = 0.557; \rho_2 = 1; c_1^{(2)} = 1; c_2^{(2)} = 0.612; \tau = 0.025; h = 0.05; d_1 = 1; d_2 = 0.5, L = 4.8; d = 0.45; d_3$  варьируется  $d_3 = 0$  и  $d_3 = 5$ .

Скачок напряжений на трещине задается в виде импульса:

$$P_1(x, t) = 20te^{-10t}H(t), P_2(x, t) = 0,$$

для представления  $\delta$  - функции Дирака используются дельтаобразные последовательности  $\delta_\varepsilon(x)$  :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x), \quad \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1}, & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0, & x \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases}$$

$$F_i = F_i^\varepsilon = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta_\varepsilon(x_1 - L)H(d - |x_2|), \quad i = 1, 2.$$

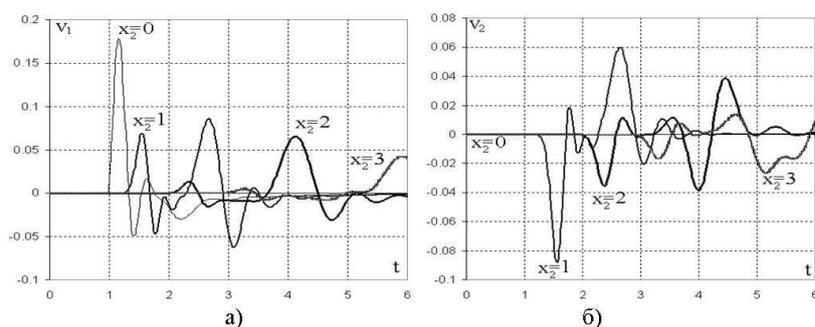
и параметр дельтаобразной функции  $\varepsilon = h = 0.05$ .

На рис. 3 представлено поле скоростей в упругом полупространстве со свободной дневной поверхностью. Здесь расчеты приведены для моментов времени, когда ударная волна только дошла до дневной поверхности (а) и отразилась от нее (б).

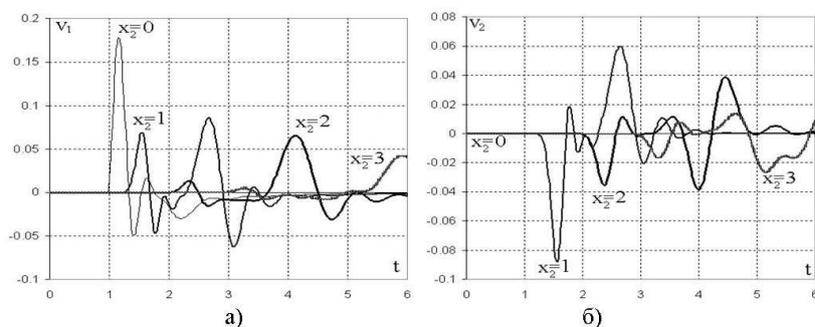
Сброс вертикальных напряжений на трещине порождает продольные ударные волны, а края трещины работают как источники сдвиговых цилиндрических волн (рис.3а). При дифракции волн на свободной поверхности начинает формироваться поверхностная волна, а наложение падающих и отраженных волн формирует в среде сложную дифракционную картину (рис.3б).

На рис.4 представлены осциллограммы скоростей перемещений дневной поверхности  $x_1 = 0$  в точках с координатой  $x_2 = 0, 1, 2, 3$  при дифракции ударных волн. В начале координат  $v_2 = 0$ , т.к. сброс напряжений происходит симметрично и параллельно оси  $Ox_1$ . Запаздывание появления колебаний на графиках осциллограмм связано движением ударной волны от трещины до точки наблюдения, для которого требуется определенное время, связанное со скоростью распространения упругих волн в среде. В данном случае скорости распространения продольных и поперечных волн в безразмерных величинах составляют  $c_1 = 1$  и  $c_2 = 0.577$  соответственно.

Подробно дифракция упругих волн в упругой полуплоскости при сбросе напряжений на трещинах в отсутствии поверхностных включений рассмотрена в [5]. Здесь дадим анализ



**Рис. 3.** Векторное поле скоростей упругого полупространства до и после отражения ударных волн:  $t = 1$  (а);  $t = 2$  (б);



**Рис. 4.** Осциллограммы скоростей  $v_1$  (а) и скоростей  $v_2$  (б) дневной поверхности, при  $x_1 = 0, x_2 = 0; 1; 2; 3$

результатов преломления упругих волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине (трещина разрыва) на поверхностном включении при разном расстоянии включения от эпицентра: для  $d_3 = 0$  (включение в эпицентре) и для  $d_3 = 5$  (включение на расстоянии  $5L$  от эпицентра). Скорости распространения продольных волн в безразмерных величинах составляют  $c_1^{(1)} = 0.964$  и  $c_1^{(2)} = 1$  соответственно.

На рис. 5, 6, 7 представлены векторные поля скоростей точек тела  $D_2$ , находящегося в эпицентре (а)  $d_3 = 0$  и на удалении от него (б)  $d_3 = 5$ , в разные моменты времени: когда преломленные ударные волны распространились до середины включения и верхняя часть тела еще покоится (рис.5), дошли до его верхней поверхности (рис.6), и отраженные от нее волны дошли до основания (рис.7).

Когда тело находится в эпицентре, в нем вначале преобладают вертикальные перемещения, порожденные продольной волной расширения-сжатия. С течением времени дифракционная картина усложняется с появлением вихревых зон в окрестности угловых точек вблизи свободной поверхности. Возрастают сдвиговые деформации вблизи боковых стенок, формируются поверхностные волны на границе тела.

При удалении тела от эпицентра при подходе ударной волны и ее преломлении в начале движения тела наблюдается резкое горизонтальное смещение нижней части, прилежащей к основанию, при сохранении вертикального положения его верхней части, которое распространяется в его верхнюю часть. Т.е. в теле формируется ударная сдвиговая волна, которая во взаимодействии с продольными и отраженными волнами порождает сложную вихревую дифракционную картину в теле.

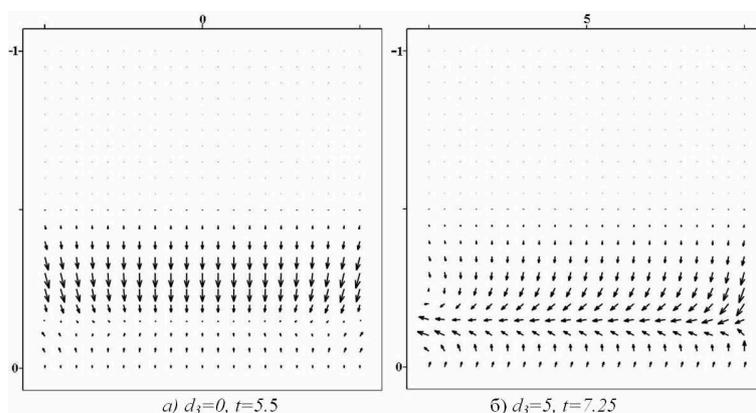


Рис. 5. Векторное поле скоростей в  $D_2$

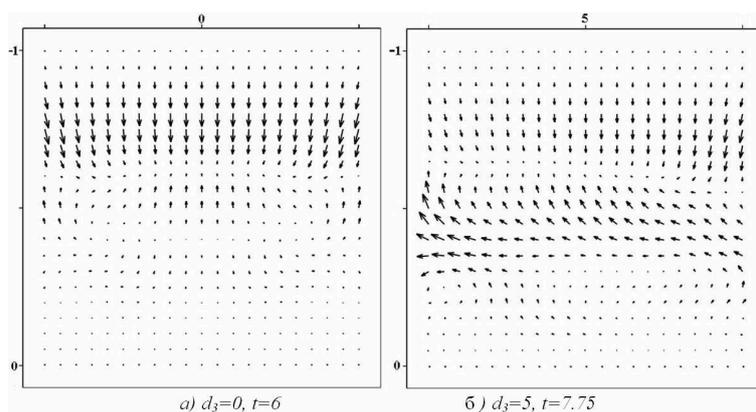


Рис. 6. Векторное поле скоростей в  $D_2$

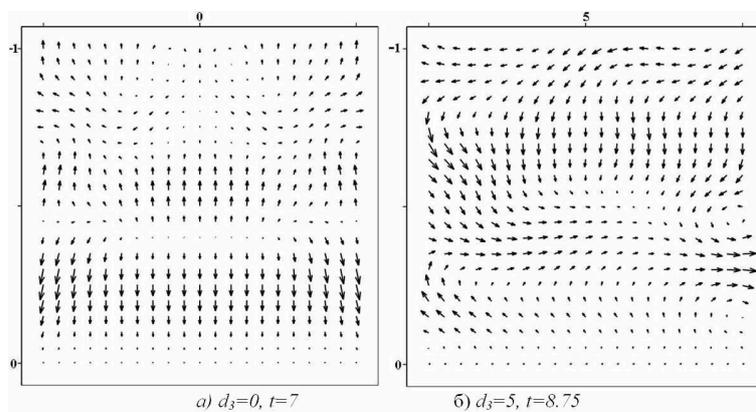


Рис. 7. Векторное поле скоростей в  $D_2$

На рис. 8 – 11, представлены изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжений в разные моменты времени:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{12} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{33}\sigma_{22},$$

где  $\sigma_{33} = \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{2(c_1^2 - c_2^2)}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ . Они характеризуют распределение давления и интенсивность касательных напряжений в исследуемом теле. Эти инварианты также характеризуют соответственно объемные и сдвиговые деформации, распространяющиеся в упругом теле  $D_2$ .

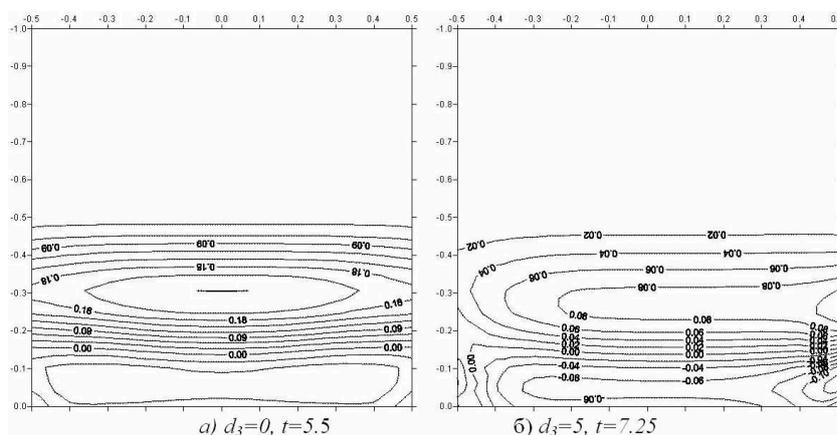


Рис. 8. Изолинии первого инварианта напряжения тела  $D_2$

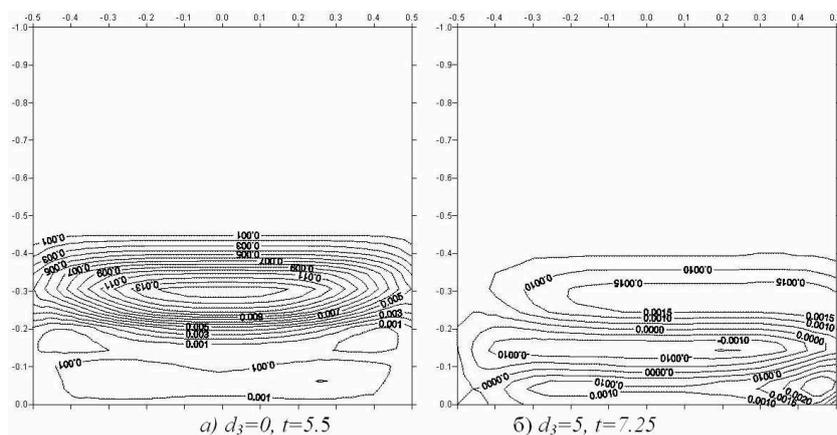


Рис. 9. Изолинии второго инварианта напряжения тела  $D_2$

Сравнивая рис.8 и 9 видим, что тело в эпицентре подвергается обоим изменениям схожего характера, причем они симметричны относительно оси  $x_1$ , и для тела, смещенного от эпицентра, характер объемных и сдвиговых изменений схожи, но здесь дифракционная картинка несимметрична. С течением времени происходит переотражение волн как от верхних и нижних граней включения, так и от его боковых поверхностей. Ударные волны теряют энергию с расстоянием и временем, поэтому давление и интенсивность касательных напряжений в первом теле сравнительно больше, чем во втором.

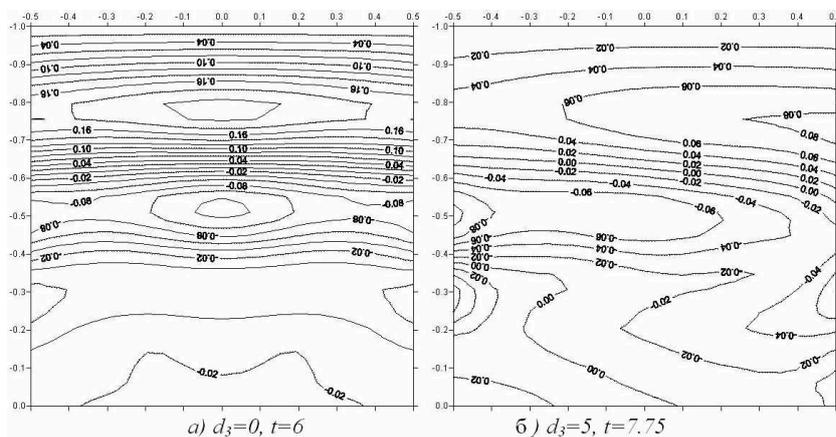


Рис. 10. Изолинии первого инварианта напряжения тела  $D_2$

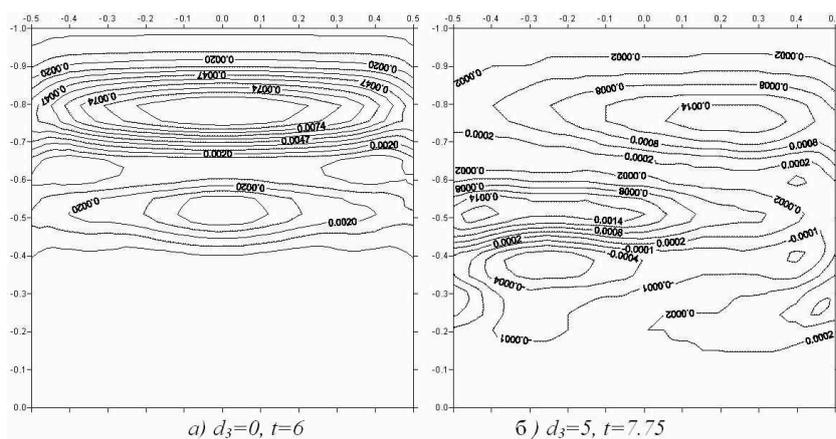


Рис. 11. Изолинии второго инварианта напряжения тела  $D_2$

## 11 Заключение

При сильных землетрясениях ударные сейсмические волны, воздействуя на наземные сооружения, порождают ударные волны в конструкциях сооружений, которые их деформируют, приводя сооружение к разрушению. На рис. 4–6 перемещения по контуру сооружения показывают, как меняется форма сооружения при проходе ударных сейсмических волн. Для зданий в эпицентре сооружение испытывает деформацию расширения-сжатия в вертикальном направлении. Для отдаленных от эпицентра зданий преобладающими являются горизонтальные сдвиговые деформации, которые наиболее разрушительны для сооружений. Поэтому в сейсмоопасных регионах при строительстве наземных сооружений следует использовать материалы с большим запасом прочности по деформациям сдвига, а в блочных конструкциях использовать соединения, обеспечивающие подвижность блоков при относительных сдвиговых деформациях, при сохранности конструкции в целом.

## Список литературы

1. Тарабрин Г.Т. Применение метода бихарактеристик для решения нестационарных задач динамики анизотропных массивов. // Строительная механика и расчет сооружений. – Москва, 1981. – № 4. – С. 38-43.
2. Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т. Дифракция нестационарных волн в упругой полуплоскости с поверхностным включением при сбросе напряжений на трещине // Математический журнал.– Алматы, 2012. – Т.12, – № 2(44). – С. 23-42.
3. Джузбаев С.С., Сарсенов Б.Т. Динамическое напряженное состояние полуполосы при боковом импульсном давлении // Математический журнал. – Алматы, 2003. – Т.3, – № 1(7). – С. 55-62.
4. Алексеева Л.А., Дильдабаева И.Ш. Обобщенное решение уравнений динамики упругой среды с криволинейной трещиной при плоской деформации // Математический журнал, –Алматы, 2007. – Т.7, № 2(25). – С. 19 - 31.
5. Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т. Модель динамики среды в окрестности очага землетрясения // Сб. научн. трудов НИИ РК. Методы экспериментальной физики. – Алматы, 2010. - С. 63-73.
6. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном породном массиве. – Алма-Ата:Наука, 1980. – 212 с.