УДК 517.938

С.А. Айсагалиев, И.В. Севрюгин

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы
E-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Управляемость и быстродействие процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

Предлагается метод решения задачи управляемости и оптимального быстродействия для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений. Разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия.
Основой предлагаемого метода решения краевой задачи управляемости и оптимального быстродействия является возможность сведения её к одному классу линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Показано, что краевые задачи управляемости обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть сведены к соответствующей начальной задаче оптимального управления.
Получены необходимое и достаточное условия существования решения задачи управляемости и метод её решения путём построения минимизирующих последовательностей. Получена оценка скорости сходимости минимизирующих последовательностей. Сформулирован алгоритм решения задачи, конструктивность предлагаемого метода показана на примере.
Ключевые слова: управляемость, быстродействие, линейная управляемая система, оптимизационная задача, градиент функционала, минимизирующие последовательности.

S.A. Aisagaliev, I.V. Sevryugin

Controllability and high-speed performance of processes described by ordinary differential equations

In this work offers method for solving problems of controllability and optimal performance for processes described by ordinary differential equations with boundary conditions,and also with phase and integral restrictions. Developed algorithm for solving of this optimal control problem.
The base of the offered method of solving boundary value problems of controllability and optimal performance is the possibility of reducing it to one class of linear integral Fredholm equations of the first kind. It is shown that boundary controllability problem of ordinary differential equations can be reduced to the corresponding initial optimal control problem.
Obtained necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to the problems of controllability and offers method of its solving by constructing of minimizing sequences. Obtained estimation of the speed of convergence for minimizing sequences. Formulated algorithm for solving of this problem, constructiveness of the proposed method is demonstrated with example.
Key words: controllability, high-speed performance, linear controlled system, optimization problem, gradient of the functional, minimizing sequences.

С.Ә. Айсағалиев, И.В. Севрюгин

Қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үдерістердің басқарымдылығы мен тиімді тез әрекет етуі

Бұл жұмыста шекаралық шарттарында фазалық және интегралдық шектеулері бар қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үдерістер үшін басқарымдылық және тиімді тез әрекет ету есептерін шешу әдістері ұсынылады. Тиімді тез әрекет ету есебін шешудің алгоритмі құрылады.

Басқарымдылық және тиімді тез әрекет ету есептерін шешу әдістерінің негізі оларды Фредгольмнің бірінші текті сызықты интегралдық теңдеуінің бір класына келтіру болып табылады. Қарапайым дифференциалдық теңдеулерді басқарудың шекаралық есебі тиімді басқарудың сәйкес бастапқы есебіне келтірілетіндігі көрсетілген.

Минимумдаушы тізбектер құру арқылы басқарымдылық есебінің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Минимумдаушы тізбектердің жинақталу жылдамдығының бағасы алынған. Есепті шешу алгоритмі құрылған. Ұсынылған әдістің конструктивтілігі мысалда көрсетілген.

Түйін сөздер: басқарымдылық, тиімді тез әрекет еті, сызықты басқарылатын жүйе, тиімділік есеп, функционал градиенті, минимумдаушы тізбектер

1 Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением следующего вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x,u,t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset R^{2n}, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t):\ G(t) = \{x \in R^n /\ \gamma(t) \le F(x,t) \le \delta(t),\ t \in I\}, \tag{3}$$

интегральных ограничений

$$g_j(x,u,x(t_0),x(t_1)) \le c_j,\ j = \overline{1,m_1},\ g_j(x,u,x(t_0),x(t_1)) = c_j,\ j = \overline{m_1+1,m_2}, \tag{4}$$

$$g_j(x,u,x(t_0),x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),u(t),x(t_0),x(t_1))dt,\ j = \overline{1,m_2}, \tag{5}$$

а также ограничений на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I,R^m)/\ u(t) \in V(t) \subset R^m \text{ п.в. } t \in I\}. \tag{6}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $n \times n$, $n \times k$ соответственно, вектор-функция $f(x,u,t)$ непрерывна по совокупности переменных при всех $(x,u,t) \in R^n \times R^m \times I$, удовлетворяет условиям

$$|f(x,u,t) - f(y,u,t)| \le l(t)\,|x-y|\,,\ \forall (x,u,t),\ (y,u,t) \in R^n \times R^m \times I,$$

$$|f(x,u,t)| \le c_0(|x| + |u|^2) + c_1(t),\ t \in I,$$

где $l(t) > 0,\ l(t) \in L_1(I, R^1),\ c_0 = const > 0,\ c_1(t) \geq 0,\ c_1(t) \in L_2(I, R^1)$.

Функция $F(x,t) = (F_1(x,t), \ldots, F_s(x,t))$ непрерывна по совокупности переменных при всех $(x,t) \in R^n \times I$, функция

$$f_0(x, u, x_0, x_1, t) = (f_{01}(x, u, x_0, x_1, t), \ldots, f_{0m_2}(x, u, x_0, x_1, t))$$

непрерывна по совокупности переменных при всех $(x, u, x_0, x_1, t) \in R^n \times R^m \times R^n \times R^n \times I$, удовлетворяет условиям

$$|f_0(x, u, x_0, x_1, t) - f_0(y, u, x_0, x_1, t)| \leq l_1(t)\,|x - y|\,,\ \forall (x, u, x_0, x_1, t),\ (y, u, x_0, x_1, t) \in R^n \times \\ \times R^m \times R^n \times R^n \times I,$$

$$|f_0(x, u, x_0, x_1, t)| \leq c_2(|x| + |u|^2) + c_3(t),\ t \in I,$$

где $l_1(t) > 0,\ l_1(t) \in L_2(I, R^1),\ c_2 = const > 0,\ c_3(t) \geq 0,\ c_3(t) \in L_2(I, R^1)$. Полагаем, что S_0, S_1 – заданные выпуклые замкнутые множества, определяющие ограничения на начальное и конечное состояния системы. Векторы $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_s(t))$, $\delta(t) = (\delta_1(t), \ldots, \delta_s(t)),\ t \in I,$ являются заданными функциями с непрерывными элементами, величины $c_j,\ j = \overline{1, m_2}$ – заданные постоянные, множество $V(t) \subset R^m$ выпукло.

В частности, если $A(t) \equiv 0,\ t \in I,\ B(t) = I_n$, I_n – единичная матрица порядка $n \times n$, то уравнение (1) имеет вид $\dot{x} = f(x, u, t)$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *Найти необходимые и достаточные условия существования решения системы* (1)-(6).

Задача 2 *Найти управление из множества $U(t) \subset L_2(I, R^m)$, которое переводит траекторию системы* (1), *исходящую из точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 \subset R^n$ в момент времени t_0, в точку $x(t_1) = x_1 \in S_1 \subset R^n$,$nt_1 > t_0$, при этом решение системы* (1), *функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, u),\ x_0 \in S_0,\ x_1 \in S_1$ находится на множестве $G(t) \subset R^n$, а также вдоль решения системы* (1) *выполнены интегральные ограничения* (4)-(5).

Решению отдельных проблем управляемости линейных систем посвящены работы [1-10]. Следует отметить, что в указанных работах исследованы частные случаи общей задачи управляемости и быстродействия динамических систем без фазовых и интегральных ограничений. Актуальными и нерешенными проблемами управляемости и оптимального быстродействия являются: нахождение необходимого и достаточного условия разрешимости общей задачи управляемости и быстродействия; создание конструктивного метода построения ее решения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Данная работа является продолжением научных исследований изложенных в [11-15].

2. Преобразование

Пусть вектор $f_0 = (f_{01}, \ldots, f_{0m_2})$. Введем вектор-функцию $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_{m_2}(t))$, $t \in I$ следующим образом

$$\bar{x}(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), u(\tau), x_0, x_1, \tau)d\tau,\ t \in I.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\bar{x}}(t) = f_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t),\ t \in I, \tag{7}$$

$$\bar{x}(t_0) = 0,\ \bar{x}(t_1) = \bar{c} \in Q, \tag{8}$$

$$Q = \{\bar{c} \in R^{m_2} / \ \bar{c}_j = c_j - d_j,\ j = \overline{1, m_1},\ \bar{c}_j = c_j,\ j = \overline{m_1 + 1, m_2},\ d_j > 0,\ j = \overline{1, m_1}\}, \tag{9}$$

где $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m_1})$, $d = (d_1, \dots, d_{m_1})$, причем $g_j(u, x, x_0, x_1) = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $d \geq 0$ – неизвестный вектор. Теперь исходная задача (1)-(6) запишется в виде (см.(7)-(9))

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, u, t),\ t \in I, \tag{10}$$

$$\dot{\bar{x}} = f_0(x, u, x_0, x_1, t),\ \bar{x}(t_0) = 0, \tag{11}$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1,\ \bar{x}(t_1) \in Q,\ x(t) \in G(t),\ u(t) \in U(t). \tag{12}$$

Вводя следующие векторы и матрицы

$$\mu = \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix},\ A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix},\ B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2,k} \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} I_n, & O_{n,m_2} \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} O_{m_2,n}, & I_{m_2} \end{pmatrix},$$

где $O_{r,q}$ – прямоугольная матрица порядка $r \times q$ с нулевыми элементами, I_n, I_{m_2} – единичные матрицы порядков $n \times n$, $m_2 \times m_2$ соответственно

Систему (10)-(12) запишем в векторной форме

$$\dot{\mu} = A_1(t)\mu + B_1(t)f(P_1\mu, u, t) + B_2 f_0(P_1\mu, u, x_0, x_1, t), \tag{13}$$

$$(P_1\mu(t_0), P_1\mu(t_1)) \in S_0 \times S_1,\ P_2\mu(t_0) = 0,\ P_2\mu(t_1) = \bar{c} \in Q, \tag{14}$$

$$P_1\mu(t) \in G(t),\ u(t) \in U(t),\ t \in I. \tag{15}$$

3. Линейная управляемая система

Для решения задачи управляемости и быстродействия необходимы следующие теоремы о существовании и общем виде решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода из работ [11, 12]. Рассмотрим интегральные уравнения следующего вида:

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, t \in I = [t_0, t_1], \tag{16}$$

где $K(t_0, t) = \|K_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – известная матрица порядка $m \times n$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированных t_0, t_1, $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – искомая функция, $K : L_2(I, R^m) \to R^n$ – оператор, $a \in R^n$ – заданный вектор.

Теорема 1 *Интегральное уравнение* (16) *при любом фиксированном* $a \in R$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt \tag{17}$$

порядка $n \times n$ *является положительно определённой, где* $*$ *– знак транспонирования,* $t_1 > t_0$.

Теорема 2 *Пусть матрица* $C(t_0,t_1)$ *положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения* (16) *имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a + v(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt, t \in I, \tag{18}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I,R^m)$ *– произвольная функция,* $a \in R^n$ *– произвольный вектор.*

Теперь наряду с системой (13)-(15) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2w_2(t),\ t \in I = [t_0,t_1], \tag{19}$$

$$y(t_0) = \mu(t_0) = \mu_0,\ y(t_1) = \mu(t) = \mu_1, \tag{20}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I,R^k),\ w_2(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2}), \tag{21}$$

где

$$\mu(t_0) = \mu_0 = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \bar{x}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ O_{m_2,1} \end{pmatrix},\ \mu(t_1) = \mu_1 = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ \bar{x}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{c} \end{pmatrix},$$

$$\mu_0 \in S_0 \times O_{m_2,1},\ \mu_1 \in S_1 \times Q.$$

Пусть матрица $\bar{B}(t) = (B_1(t), B_2)$ порядка $(n+m_2)\times(k+m_2)$, а вектор $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in L_2(I, R^{k+m_2})$. По исходным данным задачи, определим следующие матрицы и векторы

$$\bar{a} = \bar{\Phi}(t_0,t_1)\mu_1 - \mu_0,\ \mu_0,\mu_1 \in R^{n+m_2},\ \bar{W}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}(t_0,t)\bar{B}(t)\bar{B}^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0,t)dt,$$

$$\bar{W}(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} \bar{\Phi}(t_0,\tau)\bar{B}(\tau)\bar{B}^*(\tau)\bar{\Phi}(t_0,\tau)d\tau,\ \bar{W}(t,t_1) = \bar{W}(t_0,t_1) - \bar{W}(t_0,t),\ t \in I,$$

$$\bar{\lambda}_1(t,\mu_0,\bar{\mu}_1) = \bar{B}^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0,t)\bar{W}^{-1}(t_0,t)\bar{a},\ \bar{N}_1(t) = -\bar{B}^*(t)\Phi^*(t_0,t)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1) =$$
$$= \begin{pmatrix} -B_1^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0,t_1)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\bar{\Phi}(t_0,t_1) \\ -B_2^*\bar{\Phi}^*(t_0,t)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\bar{\Phi}(t_0,t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11}(t) \\ N_{12}(t) \end{pmatrix},\ \bar{\lambda}_2(t,\mu_0,\mu_1) =$$
$$= \bar{\Phi}(t,t_0)\bar{W}(t,t_1)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\mu_0 + \bar{\Phi}(t,t_0)\bar{W}(t_0,t)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\bar{\Phi}(t_0,t_1)\mu_1,$$
$$\bar{N}_2(t) = -\bar{\Phi}(t,t_0)\bar{W}(t_0,t)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\bar{\Phi}(t_0,t_1),\ t \in I,$$

где $\bar{\Phi}(t,\tau) = \bar{\theta}(t)\bar{\theta}^{-1}(\tau)$, $\bar{\theta}(\tau)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\eta} = A_1(t)\eta$.

Теорема 3 *Пусть матрица* $\bar{W}(t_0,t_1)>0$. *Тогда управление* $w(\cdot)\in L_2(I,R^{k+m_2})$ *переводит траекторию системы* (19)-(21) *из любой заданной начальной точки* $\mu_0\in R^{n+m_2}$ *в любое заданное конечное состояние* $\mu_1\in R^{n+m_2}$, *тогда и только тогда, когда*

$$w(t)\in\Sigma=\{w(\cdot)\in L_2(I,R^{k+m_2})/\ w(t)=v(t)+\bar{\lambda}_1(t,\mu_0,\mu_1)+\bar{N}_1(t)z(t_1,v),\\ \forall v(\cdot)\in L_2(I,R^{k+m_2}),\ t\in I\} \tag{22}$$

где $v(\cdot)\in L_2(I,R^{k+m_2})$ *– произвольная функция, а функция* $z(t)=z(t,v)$, $t\in I$ *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot{z}=A_1(t)z+\bar{B}(t)v(t),\ z(t_0)=0,\ t\in I. \tag{23}$$

Решение дифференциального уравнения (19), *соответствующее уравнению* $w(t)\in\Sigma$, *имеет вид*

$$y(t)=z(t)+\bar{\lambda}_2(t,x_0,x_1)+\bar{N}_2(t)z(t_1,v),\ t\in I. \tag{24}$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1,2. Действительно, решение задачи сводится к нахождению общего решения интегрального уравнения

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\bar{\Phi}(t_0,t)\bar{B}(t)w(t)dt=\bar{a}.$$

Данное интегральное уравнение является частным случаем (16), где $K(t_0,t)=\bar{\Phi}(t_0,t)\bar{B}(t)$. Далее, путём замены $K(t_0,t)$ на $\bar{\Phi}(t_0,t)\bar{B}(t)$, получим $\bar{W}(t_0,t_1)=C(t_0,t_1)$ (см. (17)). Из (18) следует (22). Дифференциальное уравнение (23) и соотношение (24) непосредственно следуют из формул

$$z(t,v)=\int\limits_{t_0}^{t}\bar{\Phi}(t,\tau)\bar{B}(\tau)v(\tau)d\tau,\ z(t_1,v)=\bar{\Phi}(t_1,t_0)\int\limits_{t_0}^{t_1}\bar{\Phi}(t_0,t)\bar{B}(t)v(t)dt.$$

Легко убедиться в том, что $y(t_0)=\mu_0$, $y(t_1)=\mu_1$. Теорема доказана.

Заметим, что компоненты вектор функции $w(t)\in\Sigma$ равны:

$$w_1(t)=v_1(t)+B_1^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0,t_1)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\bar{a}+N_{11}(t)z(t_1,v),\ t\in I, \tag{25}$$

$$w_2(t)=v_2(t)+B_2^*\bar{\Phi}^*(t_0,t_1)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\bar{a}+N_{12}(t)z(t_1,v),\ t\in I, \tag{26}$$

где $v(t)=(v_1(t),v_2(t)),\ t\in I$.

Введем следующие блочные матрицы

$$\bar{\Phi}^*(t_0,t)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\bar{\Phi}(t_0,t_1)=\begin{pmatrix}\Pi_{11}(t)\\ \Pi_{12}(t)\end{pmatrix},\ \bar{\Phi}^*(t_0,t)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)=\begin{pmatrix}S_{11}(t)\\ S_{12}(t)\end{pmatrix},$$

$$\bar{\Phi}(t,t_0)\bar{W}(t,t_1)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)=(\Pi_{21}(t),\Pi_{22}(t)),\ \bar{\Phi}(t,t_0)\bar{W}(t_0,t)\bar{W}^{-1}(t_0,t_1)\bar{\Phi}(t_0,t_1)=\\ =(\Pi_{31}(t),\Pi_{32}(t)),\ B^*(t)\Pi_{11}(t)=(T_0(t),\ T_1(t)),\ \Pi_{12}(t)=(T_2(t),T_3(t)),$$

$$-B^*(t)S_{11}(t) = (D_0(t), D_1(t)),\ -S_{12}(t) = (D_2(t), D_3(t)),\ t \in I.$$

Теперь функции $w_1(t),\ w_2(t),\ t \in I$ из (25), (26) соответственно могут быть представлены в виде

$$w_1(t) = v_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)x_1 + T_1(t)\bar{c} + N_{11}(t)z(t_1, v),\ t \in I, \tag{27}$$

$$w_2(t) = v_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)\bar{c} + N_{12}(t)z(t_1, v),\ t \in I. \tag{28}$$

Функция $y(t),\ t \in I$, определяемая по формуле (24), запишется так

$$y(t) = z(t) + \Pi_{21}(t)x_0 + \Pi_{31}(t)x_1 + \Pi_{32}(t)\bar{c} + N_2(t)z(t_1, v),\ t \in I. \tag{29}$$

Лемма 1 *Пусть матрица* $\bar{W}(t_0, t_1) > 0$. *Тогда краевая задача* (1)-(6) *равносильна следующей задаче*

$$\begin{aligned} w_1(t) = v_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)x_1 + T_1(t)\bar{c} + N_{11}(t)z(t_1, v) = \\ = f(P_1y(t), u, t),\ t \in I, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} w_2(t) = v_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)\bar{c} + N_{12}(t)z(t_1, v) = \\ = f_0(P_1y(t), u, x_0, x_1, t),\ t \in I. \end{aligned} \tag{31}$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in I, \tag{32}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^k),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{33}$$

$$x_0 \in S_0,\ x_1 \in S_1,\ \bar{c} \in Q,\ u(t) \in U(t), \tag{34}$$

$$\begin{gathered} \omega(t) \in \Omega(t) = \{\omega(\cdot) \in L_2(I, R^s)/\ \gamma(t) \le \omega(t) \le \delta(t), t \in I,\ \textit{п.в. } t \in I\} \\ \omega(t) = F(y(t), t),\ t \in I. \end{gathered} \tag{35}$$

где $w_1(t),\ w_2(t),\ y(t),\ t \in I$ *определяются формулами* (27)-(29) *соответственно.*

Доказательство леммы следует из равносильности исходной задачи (1)-(6) к задаче (13)-(15). Теорема 1 позволяющая выделить все множества решений (19)-(21) каждый элемент которого переводит траекторию системы (19) из любой точки $\mu_0 \in R^{n+m_2}$ в любую точку $\mu_1 \in R^{n+m_2}$, в частности, верна и для любых $\mu_0 \in S_0 \times O_{m_2,1},\ \mu_1 \in S_1 \times Q$.

В свою очередь, задача управляемости (19)-(21) при выполнении условий (30)-(35) равносильна краевой задаче (13)-(15). Следовательно, исходная задача управляемости (1)-(6) равносильна условиям (30)-(35) при $\mu(t) = y(t),\ t \in I,\ \omega(t) = F(y(t), t),\ t \in I$.

4. Оптимизационная задача

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$\begin{gathered} J(v_1, v_2, u, \omega, x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} S_0(q(t), t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - f(P_1y(t), u, t)|^2 + \\ +|w_2(t) - f_0(P_1y(t), u, x_0, x_1, t)|^2 + |\omega(t) - F(P_1y(t), t)|^2]dt \to \inf \end{gathered} \tag{36}$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in I, \tag{37}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^k),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{38}$$

$$x_0 \in S_0,\ x_1 \in S_1,\ u(t) \in U(t),\ \omega(t) \in \Omega(t), \tag{39}$$

$$d \in D = \{d \in R^{m_2} /\ d \geq 0\}, \tag{40}$$

где функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $t \in I$ определяются формулами (27)-(29) соответственно, $\bar{q}(t) = (v_1(t), v_2(t), u(t), \omega(t), x_0, x_1, d, z(t, v), z(t_1, v))$, $v = (v_1, v_2)$.

Матрицы $T_1(t), T_3(t), t \in I$ представим в виде $T_1(t) = (T_{11}(t), T_{12}(t)), T_3(t) = (T_{31}(t), T_{32}(t))$. Пусть векторы, $\bar{c}_1 = (c_1, \ldots, c_{m_1})$, $\bar{c}_2 = (c_{m_1+1}, \ldots, c_{m_2})$. Тогда вектор $\bar{c} = (\bar{c}_1 - d, \bar{c}_2)$, произведения

$$T_1(t)\bar{c} = T_{11}(t)(\bar{c}_1 - d) + T_{12}(t)\bar{c}_2 = T_1(t)e - T_{11}(t)d,\ e = (\bar{c}_1, \bar{c}_2),$$

$$T_3(t)\bar{c} = T_{31}(t)(\bar{c}_1 - d) + T_{32}(t)\bar{c}_2 = T_3(t)e - T_{31}(t)d,\ t \in I.$$

Теперь функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \in I$ запишутся так:

$$w_1(t) = v_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)x_1 + T_1(t)e - T_{11}(t)d + N_{11}(t)z(t_1, v),\ t \in I, \tag{41}$$

$$w_2(t) = v_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)e - T_{31}(t)d + N_{12}(t)z(t_1, v),\ t \in I, \tag{42}$$

где $T_1(t)e$, $T_3(t)e$, $t \in I$ – известные функции. Аналогичным путем, получим

$$y(t) = z(t, v) + \Pi_{21}(t)x_0 + \Pi_{31}(t)x_1 + \Pi_{32}(t)e - \Pi_{321}(t)d + N_3(t)z(t_1, v),\ t \in I, \tag{43}$$

где $\Pi_{32}(t) = (\Pi_{321}(t), \Pi_{322}(t)),\ t \in I$. В функционале (36) функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $t \in I$ представлены в виде (41)-(43).

Введем следующие обозначения

$$\xi = (v_1(t), v_2(t), u(t), \omega(t), x_0, x_1, d) \in X = L_2(I, R^k) \times L_2(I, R^{m_2}) \times U \times \Omega \times$$

$$\times S_0 \times S_1 \times D \subset H = L_2(I, R^k) \times L_2(I, R^{m_2}) \times L_2(I, R^S) \times R^n \times R^n \times R^{m_1}$$

$$X_* = \{\xi_* \in X /\ J(\xi_*) = J_* = \inf_{\xi \in X} J(\xi)\}.$$

Теорема 4 *Пусть матрица* $\bar{W}(t_0, t_1) > 0$. *Для того, чтобы система* (1)-(6) *была управляема, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(\xi_*) = 0$, *где* $\xi_* = (v_1^*(t),\ v_2^*(t),\ u_*(t), \omega_*(t), x_0^*, x_1^*, d_*) \in X$ *–оптимальное управление в задаче* (36)-(40).

Доказательство теоремы следует из равносильности задач (1)-(6) и (36)-(40).

5. Частные производные

Введем следующие обозначения

$$\bar{w}_1(q(t), t) = w_1(t) - f(P_1 y(t), u(t), t),\ t \in I,$$

$$\bar{w}_2(q(t), t) = w_2(t) - f_0(P_1 y(t), u(t), x_0, x_1, t),\ t \in I,$$

$$\bar{w}_3(q(t), t) = \omega(t) - F(P_1 y(t), t),\ t \in I.$$

Теперь функционал (36) запишется в виде

$$J(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_1} S_0(q(t),t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (|\bar{w}_1(q(t),t)|^2 + |\bar{w}_2(q(t),t)|^2 + |\bar{w}_3(q(t),t)|^2)dt,$$

где $q(t) = (v_1(t), v_2(t), u(t), \omega(t), x_0, x_1, d, z(t,v), z(t_1,v))$, $t \in I$.

Частные производные равны:

$$\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial v_1} = 2\bar{w}_1(q(t),t), \;\; \frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial v_2} = 2\bar{w}_2(q(t),t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial u} = -2f_u^*(P_1y,u,t)\bar{w}_1(q(t),t) - 2f_{0u}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t)\bar{w}_2(q(t),t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial \omega} = 2\bar{w}_3(q(t),t), \;\; \frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial x_0} = [2D_0^*(t) - 2\Pi_{21}^*(t)P_1^* f_x^*(P_1y,u,t)]\times$$

$$\times\bar{w}_1(q,t) + [2D_2^*(t) - 2\Pi_{21}^*(t)P_1^* f_{0x}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t)-$$

$$-2f_{0x_0}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t)]\bar{w}_2(q,t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial x_1} = [2T_0^*(t) - 2\Pi_{31}^*(t)P_1^* f_x^*(P_1y,u,t)]\bar{w}_1(q,t)+$$

$$+[2T_2^*(t) - 2\Pi_{31}^*(t)P_1^* f_{0x}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t) - 2f_{0x_1}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t)]\bar{w}_2(q,t)-$$

$$-2\Pi_{31}^*(t)P_1^* F_x^*(P_1y,t)\bar{w}_3(q,t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial z(t_1)} = [2N_{11}^*(t) - 2N_2^*(t)P_1^* f_x^*(P_1y,u,t)]\bar{w}_1(q,t)+$$

$$+[2N_{12}^*(t) - 2N_2^*(t)P_1^* f_{0x}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t)]\,\bar{w}_2(q,t)-$$

$$-2N_2^*(t)P_1^* F_x^*(P_1y,t)\bar{w}_3(q,t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial z} = -2P_1^* f_x^*(P_1y,u,t)]\bar{w}_1(q,t)-$$

$$-2P_1^* f_{0x}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t)]\bar{w}_2(q,t) - 2P_1^* F_x^*(P_1y,t)\bar{w}_3(q,t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial d} = [-2T_{11}^*(t) + 2\Pi_{321}^*(t)P_1^* f_x^*(P_1y,u,t)]\bar{w}_1(q,t)+$$

$$+[-2T_{31}^*(t) + 2\Pi_{321}^*(t)P_1^* f_{0x}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t)]\bar{w}_2(q,t)-$$

$$-2\Pi_{321}^*(t)P_1^* F_x^*(P_1y,t)\bar{w}_3(q,t).$$

Определение 1 *Будем говорить, что производная*

$$S_{0q}(q,t) = (S_{0v_1}(q,t), S_{0v_2}(q,t), S_{0u}(q,t), S_{0\omega}(q,t), S_{0x_0}(q,t),$$

$$S_{0x_1}(q,t), S_{0z}(q,t), S_{0z(t_1)}(q,t), S_{0d}(q,t))$$

удовлетворяет условию Липшица по переменной q *в области* R^{N_1}, $N_1 = k + m_2 + m + s + 2n + m_1 + 2(n + m_2)$, *если*

$$|S_{0v_1}(q+\Delta q,t) - S_{0v_1}(q,t)| \le L_1|\Delta q|, \;\; |S_{0v_2}(q+\Delta q,t) - S_{0v_2}(q,t)| \le L_2|\Delta q|,$$

$$|S_{0u}(q+\Delta q,t)-S_{0u}(q,t)|\leq L_3|\Delta q|,\ |S_{0\omega}(q+\Delta q,t)-S_{0\omega}(q,t)|\leq L_4|\Delta q|,$$
$$|S_{0x_0}(q+\Delta q,t)-S_{0x_0}(q,t)|\leq L_5|\Delta q|,\ |S_{0x_1}(q+\Delta q,t)-S_{0x_1}(q,t)|\leq L_6|\Delta q|,$$
$$|S_{0d}(q+\Delta q,t)-S_{0d}(q,t)|\leq L_7|\Delta q|,\ |S_{0z}(q+\Delta q,t)-S_{0z}(q,t)|\leq L_8|\Delta q|,$$
$$|S_{0z(t_1)}(q+\Delta q,t)-S_{0z(t_1)}(q,t)|\leq L_9|\Delta q|,$$

где $L_i=const>0,\ i=\overline{1,9},\ |\Delta q|=|\Delta v_1,\Delta v_2,\Delta u,\Delta x_0,\Delta x_1,\Delta d,\Delta z,\Delta z(t_1)|$.

Лемма 2 *Пусть матрица* $\bar W(t_0,t_1)>0$*, функция* $S_0(q,t)$ *непрерывно дифференцируема по* q, $q\in R^{N_1}$*, множества* U, S_0, S_1, Ω *– выпуклые и замкнутые и выполнено неравенство*

$$< S_{0q}(q_1,t)-S_{0q}(q_2,t),\ q_1-q_2 >_{R^{N_1}}\geq 0,\ \forall q_1,q_2\in R^{N_1}. \tag{44}$$

Тогда функционал (36) *при условиях* (37)-(40) *является выпуклым.*

Доказательство. Неравенство (44) равносильно тому, что функция $S_0(q,t)$, $q\in R^{N_1}$, $t\in I$ выпукла по переменной q. Тогда $I(\alpha\xi_1+(1-\alpha)\xi_2)\leq\alpha I(\xi_1)+(1-\alpha)I(\xi_2)$, $\forall\xi_1,\xi_2\in X$, $\alpha\in[0,1]$. Лемма доказана.

6. Градиент функционала

Следующая теорема дает алгоритм вычисления градиента функционала (36) при условиях (37)-(40).

Теорема 5 *Пусть матрица* $\bar W(t_0,t_1)>0$*, функции* $f(x,u,t)$, $f_0(x,u,x_0,x_1,t)$, $F(x,t)$ *непрерывно дифференцируемы по переменным* (x,u,x_0,x_1)*, частная производная* $S_{0q}(q,t)$ *удовлетворяет условию Липшица.*

Тогда функционал (36) *при условиях* (37)-(40) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент*

$$J'(\xi)=(J'_{v_1}(\xi),J'_{v_2}(\xi),J'_u(\xi),J'_\omega(\xi),J'_{x_0}(\xi),J'_{x_1}(\xi),J'_d(\xi))\in H$$

в любой точке $\xi\in X$ *вычисляется по формуле*

$$\begin{gathered}J'_{v_1}(\xi)=\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial v_1}-B_1^*(t)\psi,\ J'_{v_2}(\xi)=\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial v_2}-B_2^*\psi,\\ J'_u(\xi)=\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial u},\ J'_\omega(\xi)=\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial \omega},\ J'_{x_0}(\xi)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial x_0}dt,\\ J'_{x_1}(\xi)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial x_1}dt,\ J'_d(\xi)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial d}dt,\end{gathered} \tag{45}$$

где частные производные определяются выражениями выше, функция $z(t,v_1,v_2)$, $t\in I$ *– решение дифференциального уравнения* (37)*, а функция* $\psi(t)$, $t\in I$ *– решение сопряженной системы*

$$\dot\psi=\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial z}-A_1^*(t)\psi,\ \psi(t_1)=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial S_0(q(t),t)}{\partial d}dt. \tag{46}$$

Кроме того, градиент $J'(\xi)$, $\xi \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$||J'(\xi_1) - J'(\xi_2)|| \le K||\xi_1 - \xi_2||, \ \forall \xi_1, \ \xi_2 \in X, \tag{47}$$

где $K = const > 0$.

Доказательство. Пусть $\xi(t)$, $\xi(t) + \Delta\xi(t) \in X$, $z(t,v)$, $z(t, v+\Delta v)$, $t \in I$ решение системы (37),(38). Пусть $z(t, v + \Delta v) = z(t,v) + \Delta z(t)$, $t \in I$. Тогда $|\Delta z(t)| \le c_1 \|\Delta v\|$, $t \in I$, а приращение функционала

$$\Delta I = I(\xi + \Delta\xi) - I(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} [S_0(q(t) + \Delta q(t), t) - S_0(q(t), t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta v_1^*(t) \cdot$$

$$\cdot S_{0v_1}(q(t),t) + \Delta v_2^*(t) S_{0v_2}(q(t),t) + \Delta u^*(t) S_{0u}(q(t),t) + \Delta\omega^*(t) S_{0\omega}(q(t),t) +$$

$$+\Delta x_0^*(t) S_{0x_0}(q(t),t) + \Delta x_1^*(t) S_{0x_1}(q(t),t) + \Delta d^*(t) S_{0d}(q(t),t) + \Delta z^*(t) S_{0z}(q(t),t) +$$

$$+\Delta z^*(t_1) S_{0z(t_1)}(q(t),t)]dt + \sum_{i=1}^{9} R_i,$$

где

$$|R_1| \le L_1 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta v_1(t)||\Delta q(t)|dt, \ |R_2| \le L_2 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta v_2(t)||\Delta q(t)|dt, \ |R_3| \le L_3 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta u(t)||\Delta q(t)|dt,$$

$$|R_4| \le L_4 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta\omega(t)||\Delta q(t)|dt, \ |R_5| \le L_5 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta x_0(t)||\Delta q(t)|dt, \ |R_6| \le L_6 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta x_1(t)||\Delta q(t)|dt,$$

$$|R_7| \le L_7 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta d||\Delta q(t)|dt, \ |R_8| \le L_8 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta z(t)||\Delta q(t)|dt, \ |R_9| \le L_9 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta z(t_1)||\Delta q(t)|dt,$$

Отсюда, с учётом того, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t_1) S_{0z(t_1)}(q(t),t)dt = -\int_{t_0}^{t_1} [\Delta v_1^*(t) B_1^*(t) + \Delta v_2^*(t) B_2^*] \psi(t) dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t) S_{0z}(q(t),t)dt,$$

получим соотношения (45), где $\psi(t)$, $t \in I$ - решение системы (46).

Пусть $\xi_1 = (v_1 + \Delta v_1, v_2 + \Delta v_2, u + \Delta u, \omega + \Delta\omega, x_0 + \Delta x_0, x_1 + \Delta x_1, d + \Delta d)$, $\xi_2 = (v_1, v_2, u, \omega, x_0, x_1, d) \in X$. Так как

$$\|I'(\xi_1) - I'(\xi_2)\|^2 \le L_{10}|\Delta q(t)|^2 + L_{11}|\Delta\psi(t)|^2 + L_{12}|\Delta\xi|^2,$$

$$|\Delta q(t)| \le L_{13}\|\Delta\xi\|,\ |\Delta\psi(t)| \le L_{14}\|\Delta\xi\|,$$

то $\|I'(\xi_1) - I'(\xi_2)\| \le K\|\xi_1 - \xi_2\|$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in X$. Теорема доказана.

Используя соотношения (45)-(47) строим последовательность

$$\{\xi_n\} = \{v_1^n, v_2^n, u_n, \omega_n, x_0^n, x_1^n, d_n\} \subset X$$

по следующему алгоритму

$$\begin{gathered} v_1^{n+1} = v_1^n - \alpha_n J'_{v_1}(\xi_n),\ v_2^{n+1} = v_2^n - \alpha_n J'_{v_2}(\xi_n), \\ u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_u(\xi_n)],\ \omega_{n+1} = P_\Omega[\omega_n - \alpha_n J'_\omega(\xi_n)], \\ x_0^{n+1} = P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n J'_{x_0}(\xi_n)],\ x_1^{n+1} = P_{S_1}[x_1^n - \alpha_n J'_{x_1}(\xi_n)], \\ d_{n+1} = P_D[d_n - \alpha_n J'_d(\xi_n)],\ n = 0, 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{48}$$

где $0 < \alpha_n < \frac{2}{K+2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $K > 0$ – постоянная Липшица из неравенства (47).

Введем множество $\Lambda_0 = \{\xi \in X/\ J(\xi) \le J(\xi_0)\}$, где $\xi_0 = (v_1^0, v_2^0, u_0, \omega_0, x_0^0, x_1^0, d_0) \in X$ – начальная точка для последовательности (48).

7. Минимизирующие последовательности

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие управляемости системы (1)-(5).

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теоремы 3, последовательность* $\{\xi_n\}$ *определяется по формуле* (48), U, S_0, S_1, Ω *– выпуклые замкнутые множества. Тогда:*

1. *числовая последовательность* $\{J(\xi_n)\}$ *строго убывает;*
2. $||\xi_n - \xi_{n+1}|| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Если, кроме того, выполнено неравенство (44), *множество* Λ_0 *ограничено, то:*

3. *последовательность* $\{\xi_n\} \subset X$ *является минимизирующей, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} J(\xi_n) = J_* = \inf\limits_{\xi\in X} J(\xi)$;
4. *последовательность* $\{\xi_n\} \subset X$ *слабо сходится к множеству* X_*, $X_* \ne \emptyset$, $\xi_n \xrightarrow{сл} \xi_*$ *при* $n \to \infty$;
5. *справедлива следующая оценка скорости сходимости*

$$0 \le J(\xi_n) - J_* \le \frac{m_3}{n},\ n = 1, 2, \dots,\ m_3 = const > 0.$$

6. *задача управляемости* (1)-(5) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $J(\xi_*) = 0$.

Доказательство. Утверждения 1), 2) непосредственно следуют из свойства проекции точки на выпуклом замкнутом множестве и алгоритма (48).

Из неравенства (44) следует, что функционал (36) при условиях (37)-(40) является выпуклым. Так как Λ_0 ограниченное выпуклое замкнутое множество в рефлексивном банаховом пространстве H, то оно слабо бикомпактно. Поскольку $I(\xi) \in C^1(X)$, то $I(\xi)$ - слабо полунепрерывно снизу на Λ_0. Следовательно, функционал $I(\xi)$ достигает нижней грани на множестве Λ_0. Так как функционал $I(\xi)$ выпуклый на Λ_0 то верно неравенство $0 \leq I(\xi_n) - I(\xi_*) \leq C\|\xi_n - \xi_{n+1}\|$, $C = const > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, где $I(\xi_*) = \inf_{\xi\in\Lambda_0} I(\xi) = \min_{\xi\in\Lambda_0} I(\xi)$. Отсюда с учётом того, что $\|\xi_n - \xi_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, имеем: последовательность $\{\xi_n\}$ является минимизирующей. Поскольку $\{\xi_n\} \subset \Lambda_0$, Λ_0 - слабо бикомпактно, то $\xi_n \xrightarrow{\text{сл}} \xi_*$ при $n \to \infty$.

Поскольку $0 \leq I(\xi_n) - I(\xi_*) \leq C\|\xi_n - \xi_{n+1}\|$, $I(\xi_n) - I(\xi_{n+1}) \geq \varepsilon\|\xi_n - \xi_{n+1}\|^2$, то верно утверждение 5). Как следует из теоремы 4, если значение $I(\xi_*) = 0$, то задача управляемости (1) -(5) имеет решение. Теорема доказана.

8. Оптимальное быстродействие. Пример

Пусть $t_{1*} > t_0$ – наименьшее значение t_1, для которого $I(\xi_*) = 0$ при $t_1 = t_{1*}$. Необходимо найти $u_*(t)$, $t \in [t_0, t_{1*}]$, $x_*(t) = x_*(t, u_*)$, $t \in [t_0, t_{1*}]$, такое, что:

1. $u_*(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, t_{1*}]$;
2. $x_{0*} \in S_0$, $x_{1*} \in S_1$;
3. $x_*(t) \in G(t)$, $t \in [t_0, t_{1*}]$;
4. $g_j(x_*, u_*) \leq c_j$, $j = \overline{1, m_1}$; $g_j(x_*, u_*) = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$.

Для решения задачи оптимального быстродействия необходимо решить задачи управляемости для значений $t_{11}, t_{12}, \ldots$, где $t_1 > t_{11} > t_{12} \ldots$.

Пусть решена задача управляемости для заданного значения $t_1 > t_0$. Выберем $t_{11} = t_1/2$. По изложенному алгоритму находим $u_*(t)$, $x_*(t)$, $t \in [t_0, t_{11}]$. Если для данной пары значение $I(\xi_*) = 0$, то выберем значение $t_{12} = t_1/4$ и т.д. В случае, если для заданной пары $I(\xi_*) > 0$, выберем $t_{12} = 3t_1/4$ и т.д. По данной схеме через конечное число шагов получим приближённое решение задачи оптимального быстродействия заданной точности.

Пример. Уравнение движения системы имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_1^3 + u^3,\ t \in I = [0, 1].$$

Краевые условия:

$$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = -2,\ x_1(1) = 0,\ x_2(1) = 0.$$

Управление

$$u(\cdot) \in L_2(I, R^1).$$

Множества U, S_0, S_1, $G(t)$, $t \in I$такие:

$$U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^1)/\ -1 \leq u(t) \leq 1 \text{ п.в. } t \in [0, 1]\},$$

$$S_0 = \{x_0 = (x_{10}, x_{20}) \in R^2/\ (x_{10} - 2)^2 + (x_{20} + 2)^2 \leq 1\} \subset R^2,$$

$$S_1 = \{x_1 = (x_{11}, x_{12}) \in R^2/\ x_{11}^2 + x_{12}^2 \leq 1\} \subset R^2,$$

$$G(t) = \{x = (x_1, x_2) \in R^2/\ -1 \leq x_1(t) \leq 3,\ -3 \leq x_2(t) \leq 1,\ t \in [0, 1]\}.$$

при наличии интегрального ограничения следующего вида

$$g_j(u,x,x_0,x_1)=\int\limits_0^1[x_1^2(t)+x_2^2(t)+u^2(t)+x_0^*R_0(t)x_0+x_1^*R_1(t)x_1]dt\le c_1,$$

где $R_0(t)$, $R_1(t)$, $t\in I$ – заданные матрицы порядков 2×2, c_1 – заданное число.

Для данного примера, функция

$$\bar{x}(t)=\int\limits_0^1[x_1^2(\tau)+x_2^2(\tau)+u^2(\tau)+x_0^*P_0(\tau)x_0+x_1^*P_1(\tau)x_1]d\tau,\ t\in I=[0,1].$$

Тогда

$$\dot{\bar{x}}=[x_1^2(t)+x_2^2(t)+u^2(t)+x_0^*P_0(t)x_0+x_1^*P_1(t)x_1],\ t\in I$$
$$\bar{x}(0)=0,\ \bar{x}(1)=\bar{c}=c_1-d,\ d\ge 0.$$

Векторы и матрицы

$$\mu=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\bar{x}\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}.$$

Система (13)-(15) запишется в виде

$$\dot{\mu}=A_1\mu+B_1(\mu_1^3+u^3)+B_2(\mu_1^2+\mu_2^2+u^2+x_0^*P_0(t)x_0+x_1^*P_1(t)x_1),$$

$$(\mu_1(0),\mu_2(0))\in S_0,\ (\mu_1(1),\mu_2(1))\in S_1,\ \mu_3(0)=0,\ \mu_3(1)=c_1-d,$$
$$d\in D=\{d\in R^1/\ d\ge 0,\ (\mu_1(t),\mu_2(t))\in G(t),\ u(t)\in U\}.$$

Линейная управляемая система имеет вид

$$\dot{y}=A_1y+B_1w_1(t)+B_2w_2(t),\ t\in I=[0,1],$$

$$y(0)=\mu_0=\begin{pmatrix}x_{10}\\x_{20}\\0\end{pmatrix},\ y(1)=\mu_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\c-d\end{pmatrix},\ (x_{10},x_{20})\in S_0,\ (x_{11},x_{12})\in S_1,$$
$$d\in D=\{d\in R^1/\ d\ge 0\}.$$

Матрицы

$$\bar{\theta}(t)=e^{A_1t}=\begin{pmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ e^{-A_1t}=\begin{pmatrix}1&-t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \bar{\Phi}(t,0)=\begin{pmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\bar{\Phi}(0,t)=\begin{pmatrix}1&-t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \bar{B}=(B_1,B_2)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\bar{W}(0,1)=\int\limits_0^1 e^{A_1 t}\bar{B}\bar{B}^* e^{-A_1^* t}dt=\int\limits_0^1\begin{pmatrix} t^2 & -t & 0\\ -t & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}>0,$$

$$\bar{W}^{-1}(0,1)=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 0\\ 6 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \bar{W}(0,t)=\begin{pmatrix} t^3/3 & -t^2/2 & 0\\ -t^2/2 & t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\bar{W}(t,1)=\begin{pmatrix} (1-t^3)/3 & (t^2-1)/2 & 0\\ (t^2-1)/2 & 1-t & 0\\ 0 & 0 & 1-t\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\bar{a}=\bar{\Phi}(0,t)\mu_1-\mu_0=e^{-A_1 t}\mu_1-\mu_0=\begin{pmatrix} x_{11}-x_{12}-x_{10}\\ x_{12}-x_{20}\\ c-d\end{pmatrix},$$

$$\bar{\lambda}_1(t,\mu_0,\mu_1)=\bar{B}^*(t)\bar{\Phi}^*(0,t)\bar{W}^{-1}(0,1)a=$$

$$=\begin{pmatrix} x_{11}(-12t+6)+x_{12}(6t-2)+x_{10}(12t-6)+x_{20}(12t-4)\\ c-d\end{pmatrix},$$

$$\bar{N}_1(t)=-\bar{B}^*\bar{\Phi}^*(0,t)\bar{W}^{-1}(0,1)\cdot\Phi(0,1)=\begin{pmatrix} 12t-6 & -6t+2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\bar{\lambda}_2(t,\mu_0,\mu_1)=e^{A_1 t}\bar{W}(t,1)\bar{W}^{-1}(0,1)\mu_0+e^{A_1 t}\bar{W}(0,t)\bar{W}^{-1}(0,1)e^{-A_1}\mu_1=$$

$$=\begin{pmatrix} x_{10}(2t^3+3t^2+1)+x_{20}(t^3-2t^2+t)+x_{11}(-2t^3+3t^2)+x_{12}(t^3-t^2)\\ x_{10}(6t^2-6t)+x_{20}(3t^2-4t+1)+x_{11}(-6t^2+6t)+x_{12}(3t^2-2t)\end{pmatrix},$$

$$N_2(t)=-e^{A_1 t}\bar{W}(0,t)\bar{W}^{-1}(0,1)e^{-A_1}=\begin{pmatrix} 2t^3-3t^2 & -t^3+t^2 & 0\\ 6t^2-6t & -3t^2+2t & 0\\ 0 & 0 & -t\end{pmatrix},$$

$$w_1(t)=v_1(t)+x_{11}(-12t)+6+x_{12}(6t-2)+x_{10}(12t-6)+x_{20}(12t-4)+$$
$$+(12t-6)z_1(1,v_1,v_2)+(-6t+2)z_2(1,v_1,v_2),$$
$$w_2(t)=v_2(t)+(c-d)-z_3(1,v_1,v_2),$$
$$y_1(t)=z_1(t,v_1,v_2)+x_{10}(2t^3-3t^2+1)+x_{20}(t^3-2t^2+t)+x_{11}(-2t^3+3t^2)+$$
$$+x_{12}(t^3-t^2)+(2t^3-3t^2)z_1(1,v_1,v_2)+(-t^3+t^2)z_2(1,v_1,v_2),$$
$$y_2(t)=z_2(t,v_1,v_2)+x_{10}(6t^2-6t)+x_{20}(3t^2-4t+1)+x_{11}(-6t^2+6t)+x_{12}(3t^2-2t)+$$
$$+(6t^2-6t)z_1(1,v_1,v_2)+(-3t^2+2t)z_2(1,v_1,v_2),$$
$$y_3(t)=z_3(t,v_1,v_2)+t(c-d)-t\,z_3(1,v_1,v_2),\ t\in[0,1].$$

Оптимизационная задача (36)-(40) для данного примера запишется так:

$$J(v_1,v_2,u,\omega_1,\omega_2,x_0,x_1,d)=\int\limits_0^1[|w_1(t)-(y_1^3+u^3)|^2+|w_2(t)-(y_1^2+y_2^2+$$

$$+u^2 + x_0^* P_0(t) x_0 + x_1^* P_1(t) x_1)|^2 + |\omega_1(t) - y_1(t)|^2 + |\omega_2(t) - y_2(t)|^2]\, dt \to \inf$$

при условиях

$$\dot z_1 = z_2,\ \dot z_2 = v_1,\ \dot z_3 = v_2,\ z_1(0) = 0,\ z_2(0) = 0,\ z_3(0) = 0,\ t \in I,$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^1),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^1),\ x_0 = (x_{10}, x_{20}) \in S_0,\ x_1 = (x_{11}, x_{12}) \in S_1,$$

$$u(t) \in U,\ \omega_1(t) \in \Omega_1 = \{\omega_1(\cdot) \in L_2(I, R^1)/\ -1 \le \omega_1 \le 3,\ t \in [0,1]\},$$

$$\omega_2(t) \in \Omega_2 = \{\omega_2(\cdot) \in L_2(I, R^1)/\ -3 \le \omega_2 \le 1,\ t \in [0,1]\},$$

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^1)/\ -1 \le u(t) \le +1,\ t \in I\},\ d \in D = \{d \in R^1/\ d \ge 0\},$$

$$S_0 = \{x_0 = (x_{10},\, x_{20}) \in R^2/\ (x_{10} - 2)^2 + (x_{20} + 2)^2 \le 1\} \subset R^2,$$

$$S_1 = \{x_1 = (x_{11},\, x_{12}) \in R^2/\ x_{11}^2 + x_{12}^2 \le 1\} \subset R^2,\ G(t) = \{x = (x_1, x_2) \in R^2\}.$$

9. Заключение

Создана новая конструктивная теория управляемости и оптимального быстродействия динамических систем при наличии фазовых и интегральных ограничений с учётом ограниченности ресурсов управления, когда начальное и конечное состояния системы являются элементами заданных множеств.

Литература

[1] *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления // Труды IV Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. АН СССР. 1961. т. 2. С. 521-547.

[2] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

[3] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 480 с.

[4] *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Краевые задачи оптимального управления. Алматы: Қазақ университетi, 1999. 213 с.

[6] *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. Алматы: Қазақ университетi, 2002. 348 с.

[7] *Ананьевский И.М., Анахин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады РАН. 2010. т. 434, № 3. С. 319-323.

[8] *Семёнов Ю.М.* О полной управляемости линейных неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. 2012. т. 48, № 9. С. 1263-1277.

[9] *Емельянов С.В., Крищенко А.П.* Стабилизация нерегулярных систем // Дифференциальные уравенния. 2012. т. 48, № 11. С. 1515-1524.

[10] *Коровин С.К., Капалин И.В., Фомичев В.В.* Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем // Доклады РАН. 2011. т. 441., № 5. С. 606-611.

[11] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991. т. 27, № 9. С. 1475-1486.

[12] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. 2005. т. 5, № 4(21). С. 17-34.

[13] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2010. № 1. С. 30-55.

[14] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. 2012. т. 53, № 1. С. 20-37.

[15] *Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с ограничениями // Математический журнал. 2013. т. 13, № 2(48). С. 5-30

References

[1] *Kalman R.E.* Ob obshhej teorii sistem upravlenija // Trudy IV Kongressa Mezhdunarodnoj federacii po avtomaticheskomu upravleniju. AN SSSR. 1961. t. 2. C. 521-547.

[2] *Krasovskij N.N.* Teorija upravlenija dvizheniem. M.: Nauka, 1968. 475 s.

[3] *Gabasov R., Kirillova F.M.* Kachestvennaja teorija optimal'nyh processov. M.: Nauka, 1971. 480 s.

[4] *Zubov V.I.* Lekcii po teorii upravlenija. M.: Nauka, 1975. 495 s.

[5] *Ajsagaliev S.A.* Kraevye zadachi optimal'nogo upravlenija. Almaty: Kazak universiteti, 1999. 213 s.

[6] *Ajsagaliev S.A., Ajsagaliev T.S.* Metody reshenija kraevyh zadach. Almaty: Kazak universiteti, 2002. 348 s.

[7] *Anan'evskij I.M., Anahin N.V., Ovseevich A.I.* Sintez ogranichennogo upravlenija linejnymi dinamicheskimi sistemami s pomoshh'ju obshhej funkcii Ljapunova // Doklady RAN. 2010. t. 434, № 3. S. 319-323.

[8] *Semjonov Ju.M.* O polnoj upravljaemosti linejnyh neavtonomnyh sistem // Differencial'nye uravnenija. 2012. t. 48, № 9. S. 1263-1277.

[9] *Emel'janov S.V., Krishhenko A.P.* Stabilizacija nereguljarnyh sistem // Differencial'nye uravennija. 2012. t. 48, № 11. S. 1515-1524.

[10] *Korovin S.K., Kapalin I.V., Fomichev V.V.* Minimal'nye stabilizatory dlja linejnyh dinamicheskih sistem // Doklady RAN. 2011. t. 441., № 5. S. 606-611.

[11] *Ajsagaliev S.A.* Upravljaemost' nekotoroj sistemy differencial'nyh uravnenij // Differencial'nye uravnenija. 1991. t. 27, № 9. S. 1475-1486.

[12] *Ajsagaliev S.A.* Obshhee reshenie odnogo klassa integral'nyh uravnenij // Matematicheskij zhurnal. 2005. t. 5, № 4(21). S. 17-34.

[13] *Ajsagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* Optimal'noe bystrodejstvie nelinejnyh sistem s ogranichenijami // Differencial'nye uravnenija i processy upravlenija. 2010. № 1. S. 30-55.

[14] *Ajsagaliev S.A., Belogurov A.P.* Upravljaemost'i bystrodejstvie processa, opisyvaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennym upravleniem // Sibirskij matematicheskij zhurnal. 2012. t. 53, № 1. S. 20-37.

[15] *Ajsagaliev S.A., Sevrjugin I.V.* Upravljaemost'i bystrodejstvie processa, opisyvaemogo linejnoj sistemoj obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s ogranichenijami // Matematicheskij zhurnal. 2013. t. 13, № 2(48). S. 5-30