

Моделирование электромагнитного поля для различных типов возбуждающих сигналов*

М.И. Эпов^{1,2}, Э.П. Шурина^{1,3}, Е.П. Штабель¹, Н.В. Штабель¹

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

³ Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
epovmi@mail.ru, shurina@online.sinor.ru, stabel@ngs.ru, nadino2000@mail.ru

Аннотация. В работе предложен подход к ускорению времени моделирования электрического поля для задачи зондирования с использованием сигналов типа меандр. Уменьшение времени моделирования достигается за счет перехода от решения волнового уравнения с временной схемой к параллельному решению ряда уравнений Гельмгольца с последующим преобразованием данных во временную область. Для преобразований между временной и частотной областью использовалось быстрое преобразование Фурье. Приведены результаты моделирования для различных меандров и выполнены оценки минимально необходимого и оптимального количества частот, а также масштабируемости задачи по времени решения.

Ключевые слова: векторный метод конечных элементов, трехмерное моделирование, преобразование Фурье, импульсные электромагнитные зондирования.

1 Введение

Электроразведка выделяется среди других геофизических методов большим разнообразием методик наблюдений. Большинство методов электроразведки (ВЭЗ, ЧЗ, ЗС и др.) [1,2,3,4] используют в качестве возбудителя первичного поля искусственные источники. Возбуждающие сигналы в генераторах могут быть различной длительности и конфигурации в зависимости от выбранного метода зондирования. В методе вертикальных электрических зондирования (ВЭЗ) вторичное поле генерируется с помощью постоянного тока. В методах частотных зондирования (ЧЗ) генерируется и измеряется первичное поле определенной частоты или узкого диапазона частот. Методы зондирования становлением (ЗС) могут использовать различные импульсы возбуждающих сигналов (синусоидальные, прямоугольные, меандры и др.).

Сигналы, используемые в генераторных установках, могут быть однополярными (сигнал не переходит через ноль) и двухполярными (сигнал переходит через ноль). Как правило, импульсы, применяемые в геофизике, обладают свойством периодичности, т.к. измеряемый полезный сигнал от геологической среды также сохраняет свойство периодичности. Наиболее распространенной формой сигналов в геофизической аппаратуре являются сигналы типа меандр или меандр с паузой. Использование таких сигналов связано с большой шириной спектра в амплитудно-частотной характеристике. Это дает возможность получить отклик среды от различных частот в измеряемом сигнале и увеличить информативность измерений по сравнению с одночастотными синусоидальными сигналами.

Математическое моделирование электромагнитного поля, возбуждаемого сигналами типа меандр, позволяет уточнить особенности измеряемых сигналов от взаимодействия различных геологических сред с первичным полем. Используемая для этого математическая

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-05-12031 офи-м)

модель это гиперболическое уравнение второго порядка относительно напряженности электрического поля. Эта математическая модель описывает распространение электромагнитного поля как по пространству, так и во времени. Поэтому для решения этого уравнения требуется два типа дискретизаций: пространственная в виде сеточного разбиения и временная в виде схемы аппроксимации по времени. В работе использован векторный метод конечных элементов [5,6] на неструктурированных симплицеальных разбиениях (тетраэдры) в качестве метода дискретизации по пространству. Тетраэдральные разбиения позволяют описывать модели среды любой сложности: в том числе с локальными криволинейными объектами и наклонными внутренними границами. Базисные функции, на которых ищется конечноэлементное решение, ассоциированы с ребрами сетки. В геометрически сложных и больших областях размерность задачи может достигать миллионов неизвестных. Для аппроксимации по времени используется неявная временная схема, требующая решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на каждом шаге по времени. Для решения СЛАУ с большим нуль-ядром, соответствующему rot-rot оператору, необходимо использование специальных многоуровневых решателей [5,7].

Для сложных геологических сред и длительных возбуждающих импульсов решение задачи требует больших временных и вычислительных ресурсов. В работе предложен способ ускорения решения задачи с помощью применения метода быстрого преобразования Фурье и параллельных вычислений. Известно что, чтобы восстановить функцию с помощью обратного преобразования Фурье не обязательно знать значения разложения на всех частотах. Для того чтобы получить кривую во временной области с некоторой погрешностью необходимо знать значения на ограниченном наборе частот с максимальной амплитудой. Воспользовавшись этим для решения задачи математического моделирования нестационарного процесса можно заменить выполнение множества шагов временной схемы на решение нескольких десятков уравнений Гельмгольца в частотной области. После чего восстановить кривые измерения во временной области. Такой подход при разумном выборе частот позволяет существенно сократить вычислительные затраты и решать задачи параллельно.

2 Математическая модель

Электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла (1) – (4)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

где \mathbf{E} - напряженность электрического поля (В/м), \mathbf{H} - напряженность магнитного поля (А/м), \mathbf{D} - электрическая индукция (Кл/м²), \mathbf{B} - магнитная индукция (Тл), \mathbf{J} - плотность электрического тока (А/м), σ - электропроводность (См/м), μ - магнитная проницаемость (Гн/м), ε - электрическая проницаемость (Ф/м).

2.1 Постановка задачи во временной области

Система уравнений (1) – (4) может быть преобразована к уравнению второго порядка (5) относительно вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} :

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \text{ в } \Omega \quad (5)$$

с начальными(6) и граничными условиями(7):

$$\mathbf{E}|_{t=t_0} = \mathbf{E}_0, \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|_{t=t_1} = \mathbf{E}_1 \quad (6)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7)$$

Аппроксимация по времени для уравнения (5) выполнялась с помощью трехслойной неявной схемы [8] в результате получаем:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^{n+1}) + \sigma \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}^{n+1} - 2\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t^2} = - \frac{\mathbf{J}^{n+1} - \mathbf{J}^n}{\Delta t} \quad (8)$$

2.2 Постановка задачи в частотной области

Преобразование Фурье [9,10] позволяет сопоставить сигналу, заданному во временной области, представление этого сигнала в частотной области, и наоборот, если известна частотная характеристика сигнала, то обратное преобразование Фурье позволяет определить соответствующий сигнал во временной области.

Выполнив дискретное преобразование Фурье для тока \mathbf{J} , получим распределение тока по частотам с комплекснозначными амплитудами \mathbf{I} . Пусть напряженность электрического поля \mathbf{E} зависит от времени следующим образом:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (9)$$

то есть имеет место гармонический характер изменения поля \mathbf{E} от времени с частотой ω . Подставляя выражение (26) в уравнение (5) получим уравнение Гельмгольца:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + (i\sigma\omega - \varepsilon\omega^2)\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{I} \quad (10)$$

2.3 Вариационные формулировки

Введем функциональные пространства [11,12] $H(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$, $H_0(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega), \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}$, где \mathbf{n} - вектор внешней нормали к границе области Ω . В пространстве $H(\text{rot}, \Omega)$ введем скалярное произведение, определяемое соотношением(11):

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, \partial\Omega \quad (11)$$

Вариационная формулировка в форме Галеркина для уравнения (8) имеет вид:

Для заданного $\mathbf{J} \in \mathbf{C}^1(0, T; L^2(\text{rot}, \Omega))$ найти $\mathbf{E} \in \mathbf{C}^2(0, T; H_0(\text{rot}, \Omega))$ такое, что для $\forall \mathbf{W} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется для всех t :

$$\left(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^{n+1}) + \sigma \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}^{n+1} - 2\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{J}^{n+1} - \mathbf{J}^n}{\Delta t}, \mathbf{W} \right) = 0 \quad (12)$$

Для уравнения (10) вариационная формулировка имеет вид:

Для заданного $\mathbf{I} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{W} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется:

$$(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + (i\sigma\omega - \varepsilon\omega^2)\mathbf{E} + i\omega \mathbf{I}, \mathbf{W}) = 0 \quad (13)$$

Введем конечномерное подпространство V^h роторно-конформных функций $V^h(rot, \Omega) \subset H_0(rot, \Omega)$. Дискретная вариационная постановка для (12) имеет вид:

Для заданного $\mathbf{J}^h \in \mathbf{C}^1(0, T; L^2(rot, \Omega))$ найти $\mathbf{E}^h \in \mathbf{C}^2(0, T; H_0(rot, \Omega))$ такое, что для $\forall \mathbf{W}^h \in V^h(rot, \Omega)$ выполняется для всех t :

$$\left(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{n+1}^h) + \sigma \frac{\mathbf{E}_{n+1}^h - \mathbf{E}_n^h}{\Delta t} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}_{n+1}^h - 2\mathbf{E}_n^h + \mathbf{E}_{n-1}^h}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{J}_{n+1}^h - \mathbf{J}_n^h}{\Delta t}, \mathbf{W}^h \right) = 0 \quad (14)$$

для (13):

Для заданного $\mathbf{I}^h \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E}^h \in H_0(rot, \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{W} \in V^h(rot, \Omega)$ выполняется:

$$\left(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^h) + (i\sigma\omega - \varepsilon\omega^2)\mathbf{E}^h + i\omega \mathbf{I}^h, \mathbf{W}^h \right) = 0 \quad (15)$$

Дискретизация по пространству выполнялась на тетраэдральном разбиении векторным методом конечных элементов, в качестве базисных функций использовались edge- функции 1-го порядка I и II-типа [11,13]. Конечноэлементное решение можно представить в виде разложения по базисным функциям:

$$E = \sum_i e_i N_i, N_i \in V^h \quad (16)$$

Подставляя это разложение в (14), получим систему алгебраических уравнений(СЛАУ):

$$\left(A + \frac{C^\sigma}{\Delta t} + \frac{C^\varepsilon}{\Delta t^2} \right) e^{n+1} = \frac{C^\sigma}{\Delta t} e^n + 2 \frac{C^\varepsilon}{\Delta t^2} e^n - \frac{C^\varepsilon}{\Delta t^2} e^{n-1} - \frac{1}{\Delta t} (J^{n+1} - J^n) \quad (17)$$

где $A, C^\sigma, C^\varepsilon$ - конечноэлементные матрицы, определяемые соотношениями: $A_{ij} = \int_\Omega \mu^{-1} rot N_i rot N_j \partial \Omega$, $C_{ij}^\sigma = \int_\Omega \sigma N_i N_j \partial \Omega$, $C_{ij}^\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon N_i N_j \partial \Omega$, где N_i - базисные edge- функции из пространства $V^h(rot, \Omega)$. Аналогичным образом для (17) получаем систему:

$$(A + i\omega C^\sigma - \omega^2 C^\varepsilon) e = -i\omega \mathbf{I} \quad (18)$$

СЛАУ (17) является действительной, симметричной и положительно определенной. Система (18), записанная в комплексной арифметике, также является симметричной.

3 Вычислительный эксперимент

Моделирование электрического поля проводилось на синтетической прямой задаче геоэлектрики. Расчетная область (рис. 1) представляет собой параллелепипед $8000 \times 8000 \times 4000$ м³, разделенный на две подобласти: "воздух" и "землю". На границе этих подобластей в центре параллелепипеда находится генераторная петля диаметром 250 м с током $I=100$ А. Электропроводность в воздухе равна $1e-6$ См/м, а вмещающей среды $1e-2$ См/м.

В качестве импульсов в генераторной петле использовались различные виды импульсов типа "меандр", вид которых приведен на рисунке 2. Рассчитанное поле измерялось электродом (точка М на рисунке 1), сдвинутым в положительную сторону на 325 метров по оси X и на 50 метров по оси Y относительно центра петли.

Для ускорения времени моделирования импульсов необходимо определить оптимальное количество частот, на которых следует считать гармонические задачи. Частичный набор частот из спектра исходного сигнала выбирался следующим образом. Частотный спектр сортируется по убыванию амплитуд и берется к первым частот. На оставшихся частотах

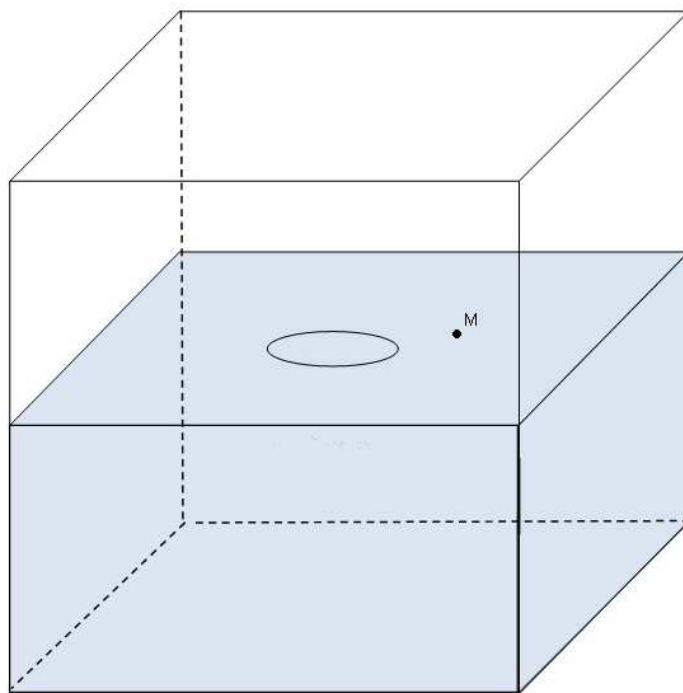


Рис. 1. Расчетная область.

полагаем, что амплитуда равна нулю, а значит и значение напряженности электрического поля также равно нулю. Количество частот k выбиралось таким образом, чтобы выполнялось условие(24):

$$\|J - J^*\| / \|J\| \leq eps \quad (19)$$

где J^* - распределение тока от времени, которое получено при обратном преобразовании Фурье для выборочного амплитудно-частотного спектра исходного сигнала, J - исходное распределение тока от времени, eps - задаваемый параметр точности.

Таким образом, в таблице 1 для каждого сигнала, изображенного на рисунке 2, приведено необходимое N_1 -количество частот с максимальной амплитудой для обратного FFT, которое является достаточным для восстановления исходного сигнала с $eps = 0.01$, N_2 - количество частот по которым выполнялось FFT, Δf - шаг, с которым выполняется частота дискретизации FFT.

Таблица 1. Количество частот с максимальной амплитудой, необходимых для восстановления исходного импульса с точностью меньше 1 %.

Тип сигнала	$\Delta f, \text{Гц}$	N_1	N_2
Меандр (рис. 2.а)	200	70	500
Меандр (рис. 2.б)	100.1	85	999
Меандр (рис. 2.с)	66.75	160	1498
Меандр (рис. 2.д)	66.75	160	1498

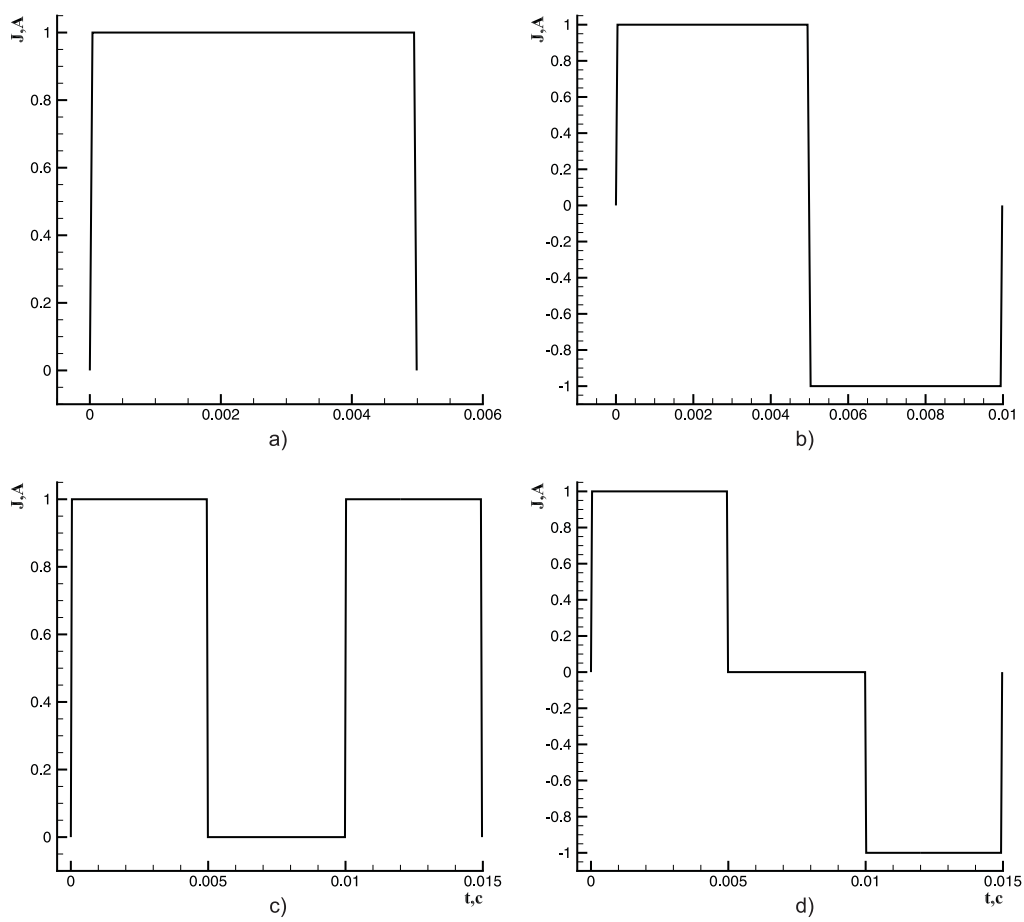


Рис. 2. Импульсы типа "меандр".

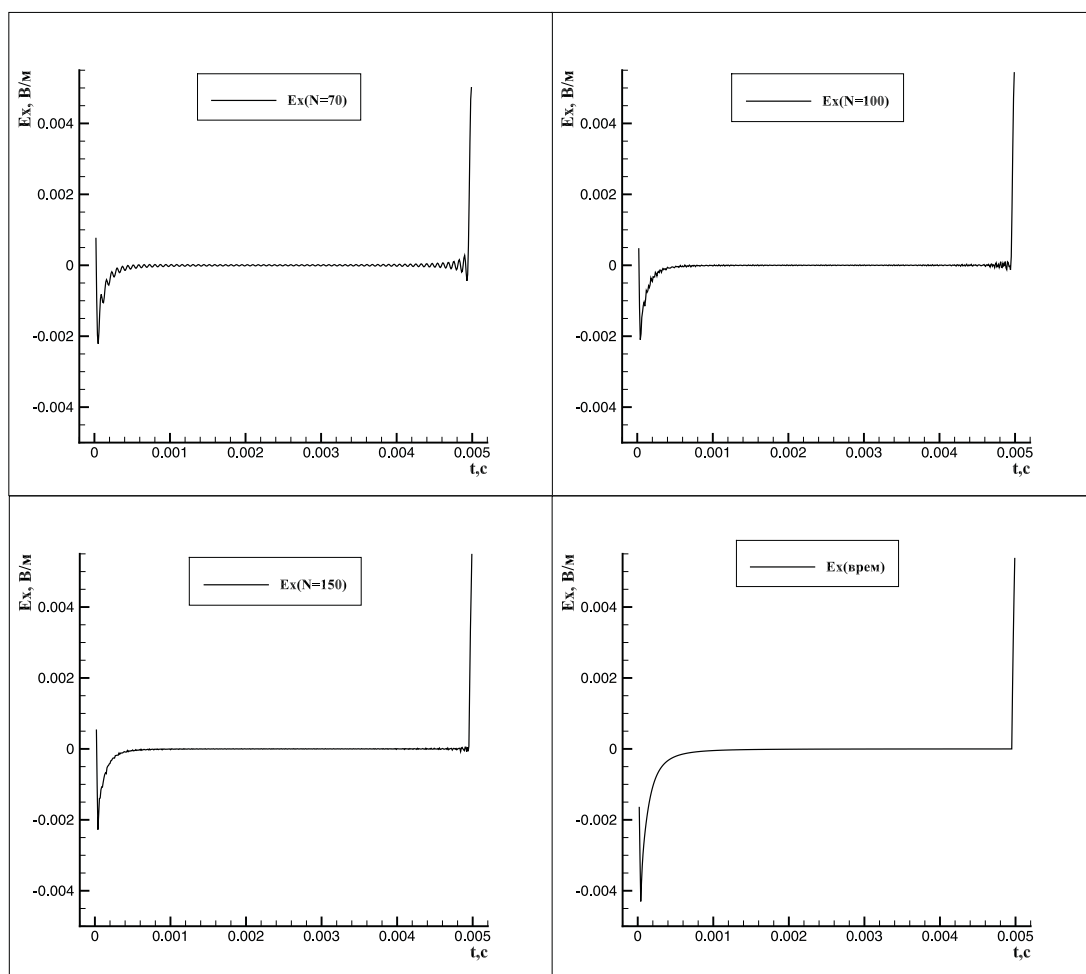


Рис. 3. Значение компоненты поля E_x от t в точке $(325,50,-0.01)$. Сравнение результатов временной задачи и данных, полученных обратным FFT из частотных задач. Источник тока - меандр (рис. 2.а).

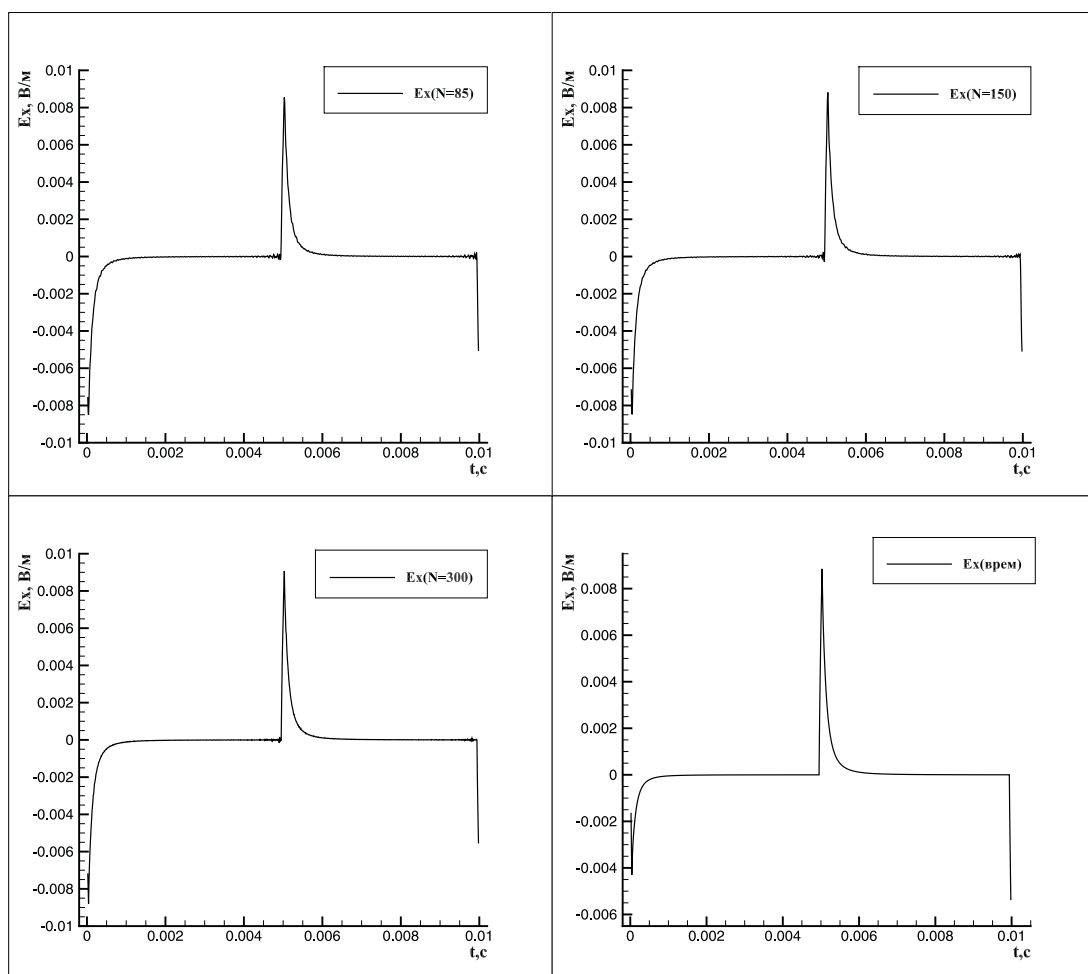


Рис. 4. Значение компоненты поля E_x от t в точке $(325,50,-0.01)$. Сравнение результатов временной задачи и данных, полученных обратным FFT из частотных задач. Источник тока - меандр (рис. 2.b).

На рисунках 3 и 4 приведены графики зависимости компоненты поля E_x от времени в точке M , построенные с помощью обратного преобразования Фурье с использованием разного количества частотных задач для меандров, представленных на рисунке 2.a и 2.b. Из рисунков видно, что минимального количества частот, необходимых для восстановления исходного сигнала, недостаточно для точного восстановления зависимости поля от времени. В полученном решении присутствуют малоамплитудные колебания на участках соответствующих постоянной части исходного сигнала. Повышение количества используемых в обратном преобразовании Фурье частот позволяет скомпенсировать эти колебания. Наилучший результат восстановления данных по сравнению с данными временной задачи достигается с использованием полного набора частот, полученном при разложении исходного сигнала. Однако, такой подход не является эффективным с точки зрения вычислительных и временных ресурсов. Авторы считают оптимальным использование около 60% частот исходного спектра сигнала для получения достаточно информативной и гладкой кривой зависимости поля от времени. Для меандров на рисунках 2.c, 2.d получены аналогичные результаты.

В таблице 2 приведено сравнительное время счета для различных импульсов задачи по времени и N_1 - частотных задач: $t_{вр}$ - общее время счета временной схемы, t_i - время счета N_1 - частотных задач на i - процессорах. Расчеты производились на вычислительном кластере К-100[14] с использованием технологии MPI. Размерность СЛАУ составляет 1283076 неизвестных. Элементы матрицы - вещественные для временной задачи и комплекснозначные для частотной. СЛАУ решалось с точностью 1.e-6. Из таблицы 2 видно, что при решении набора частотных задач, наблюдается практически линейная зависимость уменьшения времени моделирования пропорционально количеству процессоров. При количестве процессоров от 5 и больше, используемых при моделировании задачи удается существенно сократить время моделирования по сравнению с временной схемой.

Таблица 2. Время вычислений временной и частотных задач (на разном количестве процессоров с использованием технологии MPI) на кластере К-100.

Тип сигнала	$t_{вр}$, с	t_1 , с	t_5 , с	t_{10} , с
Меандр (рис. 2.a)	33849.89	85629.15	21876.26	13305.95
Меандр (рис. 2.b)	68828.96	119128.28	24189.59	15125.12
Меандр (рис. 2.c)	101517.92	193449.70	46309.94	26179.41
Меандр (рис. 2.d)	102585.07	194989.69	49852.72	25622.56

4 Заключение

В работе предложен подход к моделированию электрического поля в геологических средах при возбуждении поля сигналами типа меандр. Предложенная схема позволяет получать зависимости поля от времени, как результат параллельного решения ряда частотных задач. Определено минимальное и оптимальное количества частот необходимых для восстановления данных. Численные эксперименты на кластере К-100 показывают хорошую масштабируемость метода. При использовании 5 и более процессоров наблюдается выигрыш по времени счета по сравнению с исходной временной задачей.

Список литературы

1. Ваньян Л.Л. Электромагнитные зондирования. Москва: Научный мир, 1997. - 219 с.

2. Спичак В. В. Современные методы измерения, обработки и интерпретации электромагнитных данных. Электромагнитное зондирование Земли и сейсмичность. Издательство: ЛИБРОКОМ, 2009.- 304 с.
3. D. S. Parasnis. Principles of applied geophysics Springer, 1997 - P. 429.
4. Philip Kearey, M. Brooks, Ian Hill. An introduction to geophysical exploration. // Wiley-Blackwell, 2002 - P. 262.
5. Нечаев О.В., Шурина Э.П. Многосеточный алгоритм решения векторным методом конечных элементов трехмерного уравнения Гельмгольца // Математическое моделирование. 2005. Т.17, №6, стр. 92-102.
6. Garry Rodrigue, Daniel White. A vector finite element time-domain method for solving Maxwell's equations on unstructured hexahedral grids// SIAM J. Sci. Comput. 2001. v. 35, p.315-341.
7. Шурина Э.П., Архипов Д.А. Многоуровневые алгебраические методы моделирования трехмерного электромагнитного поля // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2014): Труды XII Международной конференции (г. Новосибирск, 2-4 октября 2014 г.): в 7 т. – 2014. – Т. 6. – С. 156-163
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.–656 с.
9. Cooley, J. W. and Tukey, O. W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. // Math. Comput. N19. 1965. P. 297-301.
10. Седлецкий А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 504 с.
11. Nedelec J.C. Mixed finite elements in R^3 // Numerische Mathematik. 1980. Vol. 35, N 3. P. 315-341.
12. Nedelec J.C. A new family of mixed finite elements in R^3 // Numerische Mathematik. 1986. Vol. 50. P. 57-81.
13. Webb J.P. Edge elements and what they can do for you // IEEE Transaction on magnetic, 1993, № 2, p.1460-1465.
14. Гибридный вычислительный кластер К-100 –url:<http://www.kiam.ru/MVS/resourses/k100.html>