

Модификации многомасштабного метода конечных элементов для решения задач электромагнетизма на постоянном и переменном токе

М.И. Эпов¹, Э.П. Шурина^{1,2}, Е.И. Михайлова¹ и А.Ю. Кутищева^{1,2}

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
shurina@online.sinor.ru

Аннотация. В работе предлагаются многомасштабные модификации метода конечных элементов на симплицИАльных разбиениях применительно к решению стационарных и гармонических задач электромагнетизма. На постоянном токе формулируется скалярная задача, которая решается гетерогенным многомасштабным методом, на всех уровнях иерархии которого используется тетраэдральное разбиение. На переменном токе решается векторное уравнение Гельмгольца, для решения которого строится многомасштабный разрывный метод Галеркина, сочетающий классический векторный метод конечных элементов, разрывный метод Галеркина и многомасштабный метод суперэлементов Федоренко. Моделирование выполняется в гетерогенных средах сложной внутренней структуры.

Ключевые слова: переменный ток, постоянный ток, метод конечных элементов, разрывный метод Галеркина, многомасштабные методы

1 Введение

Большинство современных приложений требуют решения различных многомасштабных задач, причем многомасштабность может иметь различную природу. Одним из первых методов, позволяющих эффективно и параллельно решать такие задачи, считается метод конечных суперэлементов (МКСЭ), предложенный Стаховской Л.Г. и Федоренко Р.П. в 1974 г. [1], [2], [3]. Метод основан на разбиении всей области моделирования на специальные конечные носители – суперэлементы.

В 1983 г. был предложен обобщенный метод конечных элементов (Generalized FEM) [4] для решения одномерных задач с быстро осциллирующими коэффициентами: задачи о колебаниях [5], о распределении тепла [6] и др. Метод основан на построении конечноэлементного подпространства приближенных функций с использованием локальных данных о решении. Основное отличие от МКСЭ заключается в использовании для разбиения расчетной области «открытых» макроэлементов (т.е. с налеганием).

Наибольшее распространение многомасштабные методы получили после выхода статьи [7] в 1997 г., где был предложен многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ), который является неким обобщением уже имеющихся многомасштабных методов. Основной идеей является (по аналогии с МКСЭ) разделение масштабов решения путем введения разбиения на макроэлементы (суперэлементы в терминологии Р.П. Федоренко). Все многомасштабные методы строятся на специальных неполиномиальных функциях формы. В связи с этим появляются особенности работы с границами макроэлементов. Вопросу вычисления функций формы по границам макроэлементов посвящено несколько работ [7], [8]. В работе [7] для прямоугольного разбиения предлагаются линейные и осциллирующие краевые условия. При использовании линейных краевых условий на границах макроэлементов необходимо выполнение условий гладкости решения (аналогично МКСЭ). Осциллирующие

условия (решение дополнительных задач по границам) позволяют решать задачи с непрерывными масштабами включений.

Гетерогенный многомасштабный метод (НММ) впервые был рассмотрен в работах [9], [10] и представляет собой общую идеологию для построения алгоритмов решения многомасштабных и многофизических задач. В связи с большим разнообразием задач существуют различные модификации НММ. Одним из первых был предложен FE-НММ [11], [12], [13], [14], основанный на использовании классического метода конечных элементов для решения подзадач на всех уровнях решения. Оценки сходимости данного метода для задач диффузии приведены в [11], для адвекции-диффузии в [13], [15], для задач эластичности в [12]. Однако в литературе ранее не рассматривалось применение FE-НММ для трехмерных задач с симплицеальным разбиением на каждом уровне иерархии.

В 2005 г. в [16] была предложена модификация МКЭ в идеологии разрывного метода Галеркина (DG-MsFEM) для решения эллиптических двумерных задач. Предложенный метод получил развитие в работах [17], [18] и в настоящее время широко применяется для решения эллиптических задач с резко контрастными физическими коэффициентами. Однако следует отметить, что несмотря на возросший в последние годы интерес к DG-MsFEM, единый подход не выработан и реализаций для решения других классов задач (параболических, гиперболических, гармонических) не предлагается.

2 Задача электромагнетизма на постоянном токе

Рассмотрим образец кубической формы (рис. 1), состоящий из слабопроводящей матрицы (удельная электропроводность $\sigma_{matrix} = 0.7$ См/м) и сильнопроводящих включений ($\sigma_{incl} = 1e + 4$ См/м). Таким образом всю область моделирования Ω можно представить как объединение Ω_{matrix} (основная среда) и Ω_{incl} (неоднородности). К верхней и нижней граням приложены электроды, боковые грани изолированы ($\partial\Omega = \Gamma_A \cup \Gamma_B \cup \Gamma_C \cup \Gamma_{M-I}$).

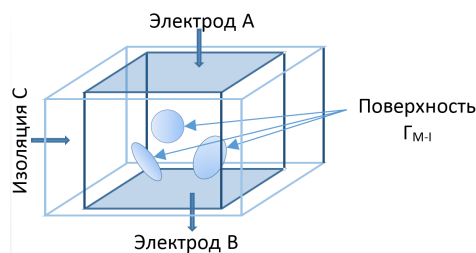


Рис. 1. Область моделирования

Таким образом, для того чтобы найти распределение напряженности электрического поля \mathbf{E} в области моделирования (рис. 1), необходимо решить однородное эллиптическое уравнение

$$-\nabla \cdot (\sigma(x) \nabla u(x)) = 0 \quad \text{на } \Omega \quad (1)$$

с краевыми условиями на границах расчетной области

$$u(x)|_{\Gamma_A} = 1 \quad (2)$$

$$u(x)|_{\Gamma_B} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_C} = 0 \tag{4}$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности Γ_C , $u(x)$ – скалярный потенциал ($\mathbf{E} = -\nabla u(x)$).

Также необходимо выполнение условия непрерывности на границах между подобластями с различной электропроводностью Γ_{M-I} (в данном случае между матрицей и включением). Математическая формализация физических условий согласования полей имеет следующий вид:

$$u(x)|_{\Gamma_{M-I}^+} = u(x)|_{\Gamma_{M-I}^-} \tag{5}$$

$$\sigma_{incl} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}^+} \Big|_{\Gamma_{M-I}^+} = \sigma_{matrix} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}^-} \Big|_{\Gamma_{M-I}^-} \tag{6}$$

2.1 Гетерогенный многомасштабный метод конечных элементов (FE-HMM)

Вариационная постановка. Для решения краевой задачи (1)–(4) воспользуемся гетерогенным многомасштабным методом конечных элементов (FE-HMM). Введем гильбертовы пространства

$$H^1(\Omega) = \{u, v \in L^2(\Omega) : (u(x), v(x)) = \int_{\Omega} u(x)v(x) d\Omega, \forall x \in \Omega\} \tag{7}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\} \tag{8}$$

Тогда вариационная постановка для эллиптической краевой задачи (1)–(4): найти $u \in H_0^1(\Omega) + u_0(\partial\Omega)$ такую, что $\forall v(x) \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u(x), v(x)) = 0 \tag{9}$$

где $a(\cdot, \cdot)$ – непрерывная, коэрцитивная билинейная форма на пространстве $H^1(\Omega)$.

Дискретизация. Основная идея FE-HMM заключается в том, что вся многомасштабная информация (например, мелкомасштабные включения и их взаимодействие) содержится в неполиномиальных многомасштабных функциях формы, которые связываются через глобальную вариационную постановку (9), обеспечивающую приближение к точному решению. При этом такие неполиномиальные функции строятся как решение серии подзадач на более мелком уровне (т.е. в данном случае, на уровне микровключений). Поэтому необходимо использовать специальную иерархию сеток, которая формируется в соответствии с рис. 2.

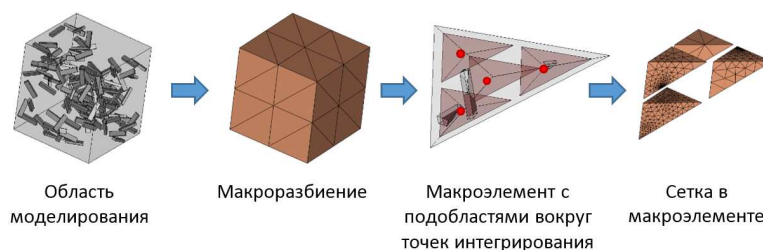


Рис. 2. Декомпозиция области моделирования

На начальном этапе вся область моделирования разбивается на конечные элементы (тетраэдры) с учетом только макромасштабной структуры (матрицы). Это разбиение называется макроразбиением, а конечные элементы — макроэлементами или суперэлементами (в терминологии Федоренко [2]). Далее в каждом макроэлементе выбираются точки интегрирования (в соответствии с квадратурными схемами Гаусса [19]) для последующего вычисления интегралов по объему. Затем вокруг каждой точки интегрирования выбирается некоторая область, в которой строится адаптивное симплицеальное микроразбиение с учетом мелкомасштабных особенностей.

Пусть \mathfrak{S}^{macro} — макроразбиение на тетраэдры. Введем конечномерное подпространство $V^{macro} \subset H_0^1$, состоящее из неполиномиальных непрерывных функций (многомасштабные функции формы), которые определены на конечном носителе $K \in \mathfrak{S}^{macro}$

$$V^{macro}(\Omega, \mathfrak{S}^{macro}) = span \{u_{i_K}^H \in H_0^1(\Omega) : i_K = \overline{1, N_K}, K \in \mathfrak{S}^{macro}\} \quad (10)$$

где N_K — количество степеней свободы макроэлемента $K \in \mathfrak{S}^{macro}$.

Таким образом билинейная форма на макроуровне для $u^H(x), v^H(x) \in V^{macro}(\Omega, \mathfrak{S}^{macro})$ примет вид:

$$a^{macro}(u^H(x), v^H(x)) = \sum_{K \in \mathfrak{S}^{macro}} \int_K \sigma(x) \nabla u^H(x) \nabla v^H(x) dx, \quad \forall x \in \Omega \quad (11)$$

На каждом макроэлементе $K \in \mathfrak{S}^{macro}$ выберем квадратурные точки $x_p \in K$, $p = \overline{1, P}$ и веса ω_p , $p = \overline{1, P}$ (в соответствии с формулами численного интегрирования [19] для вычисления интегралов в (11)). Вокруг каждой точки x_p определим некоторую подобласть $\tilde{K}_p \subset K$. Определим на $\tilde{K}_p \subset K$ микроразбиение \mathfrak{S}^{micro} , которое учитывает мелкомасштабные особенности (включения). Введем пространство

$$V^{micro}(\tilde{K}_p, \mathfrak{S}^{micro}) = span \{\varphi_i^{micro} \in H_0^1(\Omega) : i = 1, \dots, n\} \quad (12)$$

где n — количество степеней свободы в разбиении \mathfrak{S}^{micro} , φ_i^{micro} — классические базисные функции (1 и 2 порядков), определенные на конечных элементах разбиения \mathfrak{S}^{micro} . Определим многомасштабные функции формы в $\tilde{K}_p \subset K$ как $u_{\tilde{K}_p}^h(x), v_{\tilde{K}_p}^h(x) \in V^{micro}(\tilde{K}_p, \mathfrak{S}^{micro})$. Тогда получаем:

$$a^{macro}(u^H(x), v^H(x)) = \sum_{K \in \mathfrak{S}^{macro}} \sum_{p=1}^P \frac{\omega_p^K}{|\tilde{K}_p|} \int_{\tilde{K}_p} \sigma(x) \nabla u_{\tilde{K}_p}^h(x) \nabla v_{\tilde{K}_p}^h(x) dx, \quad \forall x \in \Omega \quad (13)$$

где $|\tilde{K}_p|$ — объем подобласти $\tilde{K}_p \subset K$.

Рассмотрим процедуру нахождения $u_{\tilde{K}_p}^h(x)$ в соответствии с классическими многомасштабными методами [7]. Пусть η_i^{lin} , $i = \overline{1, 4}$ — полиномиальные базисные функции 1 порядка, определенные на $K \in \mathfrak{S}^{macro}$.

1. Если ребро области \tilde{K}_p пересекается включением, то решается эллиптическая краевая задача на этом ребре (1D задача). В противном случае за решение принимается значение соответствующей функции η_i^{lin} , $i = \overline{1, 4}$ на текущем ребре.

2. Если грань области \tilde{K}_p пересекается неоднородностью, то решается эллиптическая краевая задача на этой грани (2D задача). В качестве краевых условий используется решение из п.1. В противном случае за решение принимается значение соответствующей функции η_i^{lin} , $i = \overline{1,4}$ на текущей грани.
3. Решается эллиптическая краевая задача на \tilde{K}_p (3D задача). В качестве краевых условий используется решение п.2. А именно,

$$-\nabla \cdot \left(\sigma(x) \nabla u_{\tilde{K}_p}^h(x) \right) = 0 \quad \text{на } \tilde{K}_p \quad (14)$$

$$u_{\tilde{K}_p}^h(x) \Big|_{\partial \tilde{K}_p} = \xi(x) \quad (15)$$

где $\xi(x)$ - некоторая функция, определенная на $\partial \tilde{K}_p$

3 Задача электромагнетизма на переменном токе

Рассматривается электромагнитное поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (16)$$

где $\omega = 2\pi f$ - циклическая частота [Гц].

Поведение электромагнитного поля в частотной области описывается уравнением Гельмгольца относительно комплекснозначной величины напряженности электрического поля \mathbf{E}

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{на } \Omega \quad (17)$$

где $k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon$ - волновое число; ε - диэлектрическая проницаемость [Ф/м]; μ - магнитная проницаемость [Гн/м]; σ - электропроводность [См/м], $\Omega \subset R^3$ трехмерная область с Липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega = \partial\Omega_{PEC} \cup \partial\Omega_{PMC}$. Расчетная область Ω представляет собой гетерогенную среду, состоящую из матрицы и включений. Электрическое поле порождается неоднородными электрическими краевыми условиями, заданными на границе $\partial\Omega_{PEC}$ расчетной области Ω :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \Big|_{\partial\Omega_{PEC}} = \mathbf{E}_0 \quad (18)$$

Неоднородные магнитные краевые условия заданы на границе $\partial\Omega_{PMC}$

$$\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \times \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega_{PMC}} = -i\omega \mathbf{g} \quad (19)$$

где \mathbf{n} - внешняя нормаль.

В зависимости от соотношения действительной и мнимой части волнового числа, уравнение (1) описывает различные физические процессы:

- преобладание токов проводимости. Описывается затухающий процесс.

$$\omega\sigma \gg \omega^2\varepsilon \quad (20)$$

- преобладание токов смещения. Описывается волновой процесс

$$\omega\sigma \ll \omega^2\varepsilon \quad (21)$$

Поставленная задача (1)–(3) может быть решена векторным методом конечных элементов (ВМКЭ) [20]. Однако использование классического конформного ВМКЭ [21], [22] приводит к значительному увеличению вычислительных затрат при моделировании электромагнитного поля в гетерогенных средах, т.к. на одну длину волны должно приходиться не менее девяти тетраэдров [23].

Одним из путей решения данной проблемы является применение вычислительных схем на базе неконформных численных методов и многомасштабных технологий, которые обладают естественным параллелизмом и позволяют сводить решение задачи во всей расчетной области к решению задач меньшей размерности в отдельных подобластях.

Многомасштабные методы нашли широкое применение для решения скалярных задач [7]–[14], однако для решения векторных задач в функциональных пространствах с частичной непрерывностью $H(\text{rot}, \Omega)$ и $H(\text{div}, \Omega)$ [20] единого подхода, сочетающего в себе преимущества ВМКЭ и многомасштабных методов, не предлагается.

4 Модифицированный многомасштабный разрывный метод Галеркина

Модифицированный многомасштабный разрывный метод Галеркина [24] построен на основе многомасштабной идеологии [25], предполагающей введение макро- и микроуровней решения задачи. На макроуровне учет гетерогенных особенностей среды (включений, неоднородностей, трещин и т.д.) выполняется путем введения неполиномиального базиса, получаемого путем решения ряда специальным образом сформулированных задач на микроуровне.

Основными отличиями модифицированного многомасштабного разрывного метода Галеркина от предлагаемых в литературе ММКЭ методов [7] являются:

- построение вариационной постановки на макроуровне в пространстве с частичной непрерывностью $H(\text{rot}, \Omega)$

$$H(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \} \quad (22)$$

- использование векторных базисных функций [21], [22] на макроуровне и на микроуровне метода.

Решение задачи на макроскопическом уровне осуществляется в постановке разрывного метода Галеркина [26], [27].

Для модифицированного многомасштабного разрывного метода Галеркина в векторной постановке устанавливаются те же уровни иерархии, что и для многомасштабных методов, применяемых для решения скалярных задач и рассмотренных в разделе 2.

4.1 Постановка задачи на макроуровне

Вариационная постановка. Для построения вариационной постановки на макроуровне в Ω вводится функциональное пространство

$$H_0(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} \big|_{\partial\Omega} = 0 \} \quad (23)$$

с нормой и скалярным произведением.

Вариационная постановка принимает вид: найти $\mathbf{E} \in H_0(\text{rot}, \Omega) + \mathbf{E}_0$ такое, что $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется

$$\mu^{-1}(\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{v})_{\Omega} + k^2(\mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega} = -i\omega(\mathbf{g}, \mathbf{v})_{\partial\Omega_{PMC}} \quad (24)$$

Дискретная вариационная постановка. Для построения дискретной вариационной постановки выполняется разбиение расчетной области Ω на N непересекающихся макроэлементов-параллелепипедов.

$$Q_h = \left\{ \Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i, \forall \Omega_i, \Omega_j \in Q_h, i \neq j, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \right\} \quad (25)$$

Разбиение на макроэлементы является геометрически согласованным, однако внутренние сеточные разбиения макроэлементов могут быть не согласованы по общей границе. Это приводит к необходимости использования специальных условий «сшивки» на границах между макроэлементами. «Сшивка» также можно осуществляться на уровне вариационной постановки путем введения на верхнем уровне иерархии метода дискретной вариационной постановки разрывного метод Галеркина.

Для построения дискретной вариационной постановки на разбиении Q_h введем функциональное пространство [26]

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{v}|_K \in P^l(K) \forall K \in Q_h \right\} \quad (26)$$

и базисные функции $\psi_i^k \in \mathbf{V}_h, k = \overline{1, N}, i = \overline{1, M}$, где N – количество макроэлементов в разбиении Q_h , M – количество базисных функций на макроэлементе.

В постановках DG-метода базисные функции за пределами конечного элемента не определяются нулем, поэтому стандартные процедуры ассемблирования глобальной матрицы не используются. Для установления связи между соседними конечными элементами на границе между ними вводятся лифтинг-операторы: оператор «скачка»

$$[[\mathbf{v}]]_T = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{v}^+|_T + \mathbf{n}^- \times \mathbf{v}^-|_T, \quad [[\mathbf{v}]]_T = \mathbf{n} \times \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \quad (27)$$

и оператор осреднения

$$\{\mathbf{v}\} = (\mathbf{v}^+|_T + \mathbf{v}^-|_T) / 2, \quad \{\mathbf{v}\} = \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \quad (28)$$

где $\partial\Omega$ – внешняя граница расчетной области, T – внутренние границы между конечными элементами.

Анализ различных постановок DG-метода применительно к решению задач электромагнетизма в широком диапазоне частот приведен в [27]. В данной работе предлагается использовать редуцированную IP постановку DG-метода, не содержащую осреднений. Тогда дискретная вариационная постановка формулируется следующим образом: найти $\mathbf{E}^h \in \mathbf{V}_h$ такое что для $\forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h$ выполняется

$$a_h^{DG}(\mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h)_\Omega + k^2(\mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h)_\Omega = -i\omega(\mathbf{g}, \mathbf{v}^h)_{\partial\Omega_{PMC}} \quad (29)$$

Билинейная форма $a_h^{DG}(\cdot, \cdot)_\Omega$ определяется как

$$a_h^{DG}(\mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h)_\Omega = \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^h \cdot \nabla \times \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma} \mu^{-1} \alpha [[\mathbf{E}^h]]_T \cdot [[\mathbf{v}^h]]_T dS, \quad \alpha > 0 \quad (30)$$

где α – стабилизирующий коэффициент.

Следует отметить, что введенные для макроэлемента векторные функции ψ_i^k задаются не аналитически, как это принято в классическом ВМКЭ, а находятся численно из решения специальным образом сформулированных на макроэлементе задач (из решения задач на микроуровне). Построенный неполиномиальный базис отражает все микрособственности среды.

4.2 Постановка задачи на микроуровне

Вариационная постановка. Целью решения задачи на микроуровне является построение неполиномиальной функции формы для макроэлемента. Решается следующая задача

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{\psi}_j + k^2 \boldsymbol{\psi}_j = 0 \quad \text{на } \Omega_i \quad (31)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{\psi}_j|_{\partial\Omega_i} = \boldsymbol{\varphi}_j \quad (32)$$

где $\boldsymbol{\varphi}_j$ определяет поведение неполиномиальной функции формы на границе макроэлемента и задается как векторная базисная функция на параллелепипеде. Вариационная постановка строится по аналогии с (24).

Дискретная вариационная постановка. На уровне макроэлемента сформулированная задача решается ВМКЭ на тетраэдральном адаптивном разбиении. Для построения дискретной вариационной формулировки вводится конечномерное подпространство $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega) \subset \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ и базисные функции 3-го порядка $\mathbf{w}_i^k \in \mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ на тетраэдральных конечных элементах [21].

Дискретная вариационная постановка принимает вид: найти $\boldsymbol{\psi}_j^h \in \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega_i) + \boldsymbol{\varphi}_j$ такое что $\forall \mathbf{u}^h \in \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega_i)$ выполняется

$$\mu^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{\psi}_j^h, \nabla \times \mathbf{u}^h)_\Omega + k^2(\boldsymbol{\psi}_j^h, \mathbf{u}^h)_\Omega = 0 \quad (33)$$

4.3 Численные эксперименты

Задача электромагнетизма на постоянном токе. Как было сказано выше, основная многомасштабная информация содержится в многомасштабных функциях формы, а значит точность глобального решения будет в значительной степени зависеть от того, с какой точностью строятся эти функции. Для того, чтобы уменьшить погрешность при построении многомасштабных функций формы в НММ существует несколько способов: измельчение сетки или повышение порядка базисных функций конечноэлементных разбиений на мелкомасштабном уровне (при решении серии дополнительных подзадач (14)); выбор схемы численного интегрирования (13); изменение размеров подобласти \tilde{K}_p .

Рассмотрим образец $10 \times 10 \times 10$ мм с включениями в форме параллелепипедов с размерами $0.25 \times 0.25 \times 1$ мм (рис. 3). Включения (удельная электропроводность $\sigma_{incl} = 1e+4$ См/м) распределены в материале ($\sigma_{matrix} = 0.7$ См/м) по равномерному закону с концентрацией 3.1% (500 включений). Краевые условия задаются в соответствии с рис. 1.

Для исследования влияния схемы численного интегрирования и выбора области вокруг точек численного интегрирования при построении многомасштабных функций формы на точность решения будем рассматривать квадратурные формулы Гаусса с $pi \in \{4, 5, 11\}$, где pi — узлы интегрирования в макроэлементе (в тетраэдре). Результаты приведены на рис. 4. Относительная погрешность решения вычисляется по формуле

$$\frac{\|u^H(x_l) - u^*(x_l)\|}{\|u^*(x_l)\|}, \quad (34)$$

где $u^H(x_l)$ — решение, полученное FE-НММ, $u^*(x_l)$ — «точное» решение (FEM на подробной сетке).

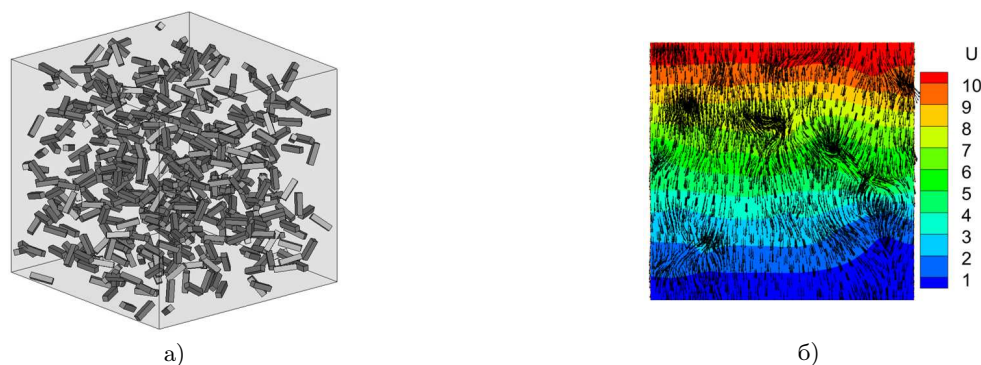


Рис. 3. Область и результаты моделирования (а – образец; б – распределение скалярного потенциала $u(x)$ в сечении и векторное поле плотности тока \mathbf{J})

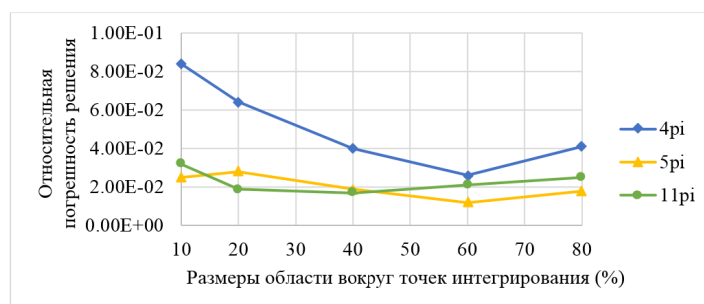


Рис. 4. Влияние схемы численного интегрирования и выбора области вокруг точек численного интегрирования при построении многомасштабных функций формы на точность решения (размеры областей вокруг точек интегрирования указаны в процентах от размера соответствующего макроэлемента)

Из вычислительного эксперимента (рис. 4.) следует, что лучшую точность дает использование схемы Гаусса с пятью и одиннадцатью точками. Однако применение одиннадцатиточечной схемы более затратно.

Одним из способов повышения точности многомасштабных конечноэлементных методов является повышение порядка базисных функций, на которых строятся многомасштабные функции формы. Для FE-НММ было получено, что использование квадратичных базисных функций в среднем уменьшает относительную погрешность решения на 1%, однако при этом время решения возрастает на порядок. Это связано со значительным увеличением количества степеней свободы в конечноэлементной сетке.

Задача электромагнетизма на переменном токе. Для верификации метода выполнялось сравнение с конформным ВМКЭ на базисных функциях 3-го порядка в однородной расчетной области: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 1e - 6$. За «точное» решение \mathbf{E}^{ext} принимался результат моделирования ВМКЭ. Вычисления производились на двух частотах: $f = 1$ кГц (волновой процесс не формируется) и $f = 3$ ГГц (волновой процесс сформирован). Была выполнена оценка относительной погрешности

$$\delta = \frac{\|\mathbf{E}_x^{ext} - \mathbf{E}_x\|}{\|\mathbf{E}_x^{ext}\|} \quad (35)$$

при $f = 1$ кГц $\delta^{1кГц} = 2.42e - 04$, при $f = 3$ ГГц $\delta^{3ГГц} = 1.07e - 04$. Предложенный метод показал хорошее согласование с классическим ВМКЭ.

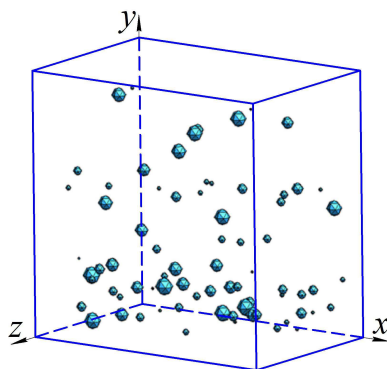
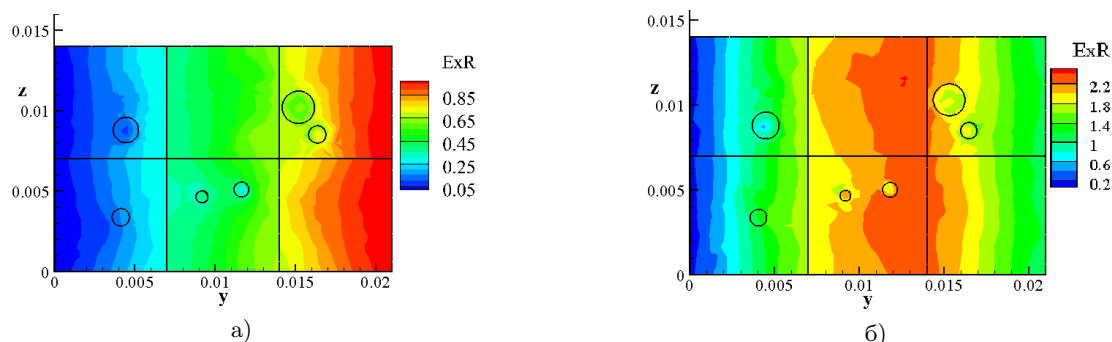


Рис. 5. Область моделирования

Рассмотрим область с гетерогенной внутренней структурой. Расчетная область 21×14 мм приведена на рис.5. Электрофизические характеристики матрицы: $\varepsilon = 4.5\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 1e - 6$. Электрофизические характеристики включений: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 1e + 7$. В области моделирования расположено 80 сферических включений, радиус которых варьировался от 0.11 мм до 0.7 мм.

Для расчетной области рис.5 применение конформного ВМКЭ привело к необходимости построения очень подробной сетки, резкому росту размерности СЛАУ и числа ее обусловленности. Решение получить не удалось. Предложенный в работе модифицированный неконформный разрывный метод Галеркина позволил получить решение для широкого диапазона частот. На рис. 6 приведены действительные компоненты \mathbf{E}_x в сечении $x = 0.0105$.

Рис. 6. Действительная компонента \mathbf{E}_x в плоскости YZ, $x = 0.0105$ (а – частота $f = 1$ кГц; б – частота $f = 3$ ГГц)

Заключение

В работе предлагается модификация FE-НММ, ориентированная на решение трехмерных задач электромагнетизма на постоянном токе в областях со сложной внутренней структурой (с большим количеством хаотично расположенных мелких включений). Исследована точность работы метода в зависимости от реализованной схемы численного интегрирования и порядка базисных функций на мелкомасштабном внутреннем разбиении.

На основе ВМКЭ, DG-метода и многомасштабной идеологии был разработан специальный численный метод моделирования трехмерных гармонических электромагнитных по-

лей. Данный метод ориентирован на моделирование электромагнитных полей в гетерогенных средах с контрастными разномасштабными включениями в широком диапазоне частот. Предложенный метод обладает естественным параллелизмом и позволяет свести решение задачи во всей области моделирования к решению задач меньшей размерности в отдельных подобластях, которое может выполняться параллельно. В то же время не наблюдается резкого падения точности по сравнению с ВМКЭ.

Список литературы

1. Стаховская Л.Г., Федоренко Р.П. Об одной специальной разностной схеме //Численные методы МСС. – 1974. – Т.5, № 1. – С. 149-163.
2. Федоренко Р.П., Страховская Л.Г. Об одном варианте метода конечных элементов //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т.19, № 4. – С. 950-960.
3. Федоренко Р.П., Введение в вычислительную физику. – М.: МФТИ. – 1994. – Т.4. – 517 с.
4. Babuska I., Osborn J.E. Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods //SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1983. – Vol.20, № 3. – pp. 510-536.
5. Arndt M., Sremin A., Machado R.D. The Generalized Finite Element Method Applied to Free Vibration of Framed Structures. – INTECH Open Access Publisher. – 2011.
6. Soghrati S., Aragyn A.M., Duarte C.A. and Geubelle P.H. An interface-enriched generalized FEM for problems with discontinuous gradient fields //International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2012. – Vol.89, № 8. – pp. 991-1008.
7. Hou T.Y., Wu X.H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media //Journal of computational physics. – 1997. – Vol.134, № 1. – pp. 169-189.
8. Hou T., Wu X.H., Cai Z. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients //Mathematics of Computation of the American Mathematical Society. – 1999. – Vol.68, № 227. – pp. 913-943.
9. E W., Engquist B. The heterogenous multiscale methods //Communications in Mathematical Sciences. – 2003. – Vol.1, № 1. – pp. 87-132.
10. Ming P. Zhang P. Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems //Journal of the American Mathematical Society. – 2005. – Vol. 18, № 1. – pp. 121-156.
11. Abdulle A., Schwab C. Heterogeneous multiscale FEM for diffusion problems on rough surfaces //Multiscale Modeling and Simulation. – 2005. – Vol.3, № 1. – pp. 195-220.
12. Abdulle A. Analysis of a heterogeneous multiscale FEM for problems in elasticity //Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2006. – Vol.16, № 04. – pp. 615-635.
13. Abdulle A. Multiscale methods for advection-difusion problems //Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2005. – pp. 11-21.
14. Abdulle A. On a priori error analysis of fully discrete heterogeneous multiscale FEM //Multiscale modeling and simulation. – 2005. – Vol.4 – pp. 447-459.
15. Henning P., Ohlberger M. The heterogeneous multiscale finite element method for advection-diffusion problems with rapidly oscillating coefficients and large expected drift //NETWORKS AND HETEROGENEOUS MEDIA – 2010. – Vol.5, № 2. – pp. 711-744.
16. Aarnes J., Heimsund B.O. Multiscale discontinuous Galerkin methods for elliptic problems with multiple scales //Multiscale methods in science and engineering. – Springer Berlin Heidelberg. – 2005. – pp. 1-20.
17. Zhang Y., Wang W., Guzman J., Shu C. W. Multi-scale discontinuous Galerkin method for solving elliptic problems with curvilinear unidirectional rough coefficients //Journal of Scientific Computing. – 2014. – Vol.61, № 1. – pp. 42-60.
18. Elfverson D., Georgoulis E.H., Malqvist A., Peterseim D. Convergence of a discontinuous Galerkin multiscale method //SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2013. – Vol. 51, №. 6. – pp. 3351-3372.
19. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа. – 2000.
20. Nedelec J.-C. A new family of mixed finite elements in R3 //Numer.Math. – 1986. – Vol.50, № 1. – pp. 57-81.
21. Webb J.P. Hierarchal scalar and vector tetrahedra //IEEE Transactions on magnetics. – 1993. – Vol.29, № 2. – pp. 1495-1498.
22. Михайлова Е.И., Шурина Э.П. Математическое моделирование высокочастотного электромагнитного поля в волноводных устройствах //Вестник НГУ. Математика, механика, информатика. – 2013. – Т.13, № 4. – С. 102-118.
23. Monk P. Finite element methods for Maxwell's equations. – Oxford University Press. – 2003. – 450 p.

24. Михайлова Е.И., Шурина Э.П. Решение уравнения Гельмгольца модифицированным неконформным методом Галеркина // XV Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Тюмень, 29-31 октября 2014 г.): Программа и тезисы докладов. – Тюмень, 2014. – С. 41-41
25. Шокин Ю.И., Шурина Э.П., Иткина Н.Б. Современные сеточные методы: Многоуровневые методы. Применение многомасштабных методов. Учебное пособие. – Новосибирск: НГТУ. – 2012. – 100 с.
26. Houston P., Perugia I., Schotzau D. Mixed Discontinuous Galerkin Approximation of the Maxwell Operator //SIAM J. Numer. Anal. – 2004. – Vol.42, № 1. – pp. 434-459.
27. Эпов М.И., Шурина Э.П., Михайлова Е.И. Анализ вычислительных схем для моделирования электромагнитного поля в средах с контрастными включениями в широком диапазоне частот // Вычислительные технологии. – 2014. – Т. 19, № 6. – С. 108-121