

УДК 519.63; 519.684

Исахов А.А. *, Байтуреева А.Р.**.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: *alibek.issakhov@gmail.com, **abaitur@yandex.kz

Математическое моделирование распространения пассивной скалярной примеси в поперечной струе

Активное развитие промышленности приводит к увеличению количества заводов, фабрик, ТЭС и АЭС, вследствие чего повышается объем выбросов примеси в атмосферу. Вредные химические соединения оседают и остаются в приземных слоях атмосферы, что влечет за собой различные экологические проблемы, наносящие вред здоровью населения и окружающей среде. Учитывая вышеуказанные проблемы, очень важно контролировать объем выбросов, чтобы поддерживать их на безопасном для окружающей среды уровне. Для этого необходимо исследовать распространение вредных выбросов. Наиболее оптимальным способом оценки является составление математической модели движения газообразных веществ. Подобная модель предусматривает различные физические, метеорологические и химические факторы. В представленной работе рассматривается модельная задача, позволяющая произвести валидацию корректности выбранной математической модели и алгоритма численного решения. Модель учитывает физические параметры веществ, позволяет рассчитать химическую реакцию реагентов и распространение массовых долей выбросов в зависимости от скорости ветра. Расчеты выполнялись с помощью программного комплекса ANSYS Fluent. В итоге приведены результаты численных решений и построены графики. Подобная задача позволяет протестировать имеющуюся математическую модель и в дальнейшем построить максимально корректную модель распространения выбросов в атмосфере.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, перенос веществ, численное моделирование, загрязнение воздуха, концентрация.

Issakhov A.A., Baitureyeva A.R.

Mathematical simulation of passive scalar impurity in the transverse jet

The active development of the industry leads to an increase in the number of factories, plants, thermal power plants and nuclear power plants, thereby there are increasing the amount of emissions into the atmosphere. Harmful chemicals are deposited and remain in the ground surface layers of the atmosphere, which leads to a variety of environmental problems which are harmful to human health and the environment. Considering the above problems, it is very important to control emissions, to keep them at a safe level for the environment. That is why it is necessary to investigate the spreading of harmful emissions. The best way to assess is the compilation of the mathematical model of the gaseous substances motion. Such model includes various physical, chemical and weather factors. In the present paper is considered a model problem, which allows to validate the correctness of the chosen mathematical models and numerical solution algorithm. The model takes into account the physical parameters of the materials, allows to calculate the chemical reaction between the reactants and the distribution of mass fractions of emission depending on the wind velocity. The calculations were performed using the ANSYS Fluent software package. In the end there are given results of numerical solutions and the graphs. This task allows to test the existing mathematical model in order to create in the further more accurate model of the emissions distribution in the atmosphere.

Key words: Navier-Stokes equations, mass transfer, numerical simulation, air pollution, concentration.

Исахов А.А., Байтуреева А.Р.

Көлденең ағысындағы пассивті скаляр қоспаның таралуының математикалық модельдеуі

Өнеркәсіптің белсенді дамуының арқасында зауыттар, фабрикалар, ЖЭС және АЭС сандары көбейеді, соның салдарынан атмосфераға шығарындыларының көлемі өсіп жатыр. Зиянды химиялық қосылыстар төмен түсіп, атмосфераның жер қабатында қалады, сондықтан халықтың денсаулығына және қоршаған ортаға зиян келтіретін әр түрлі экологиялық проблемалар басталады. Осыны ескере отырып, шығарындыларының көлемін қоршаған орта үшін қауіпсіз деңгейде бақылау өте маңызды. Бұл үшін зиянды шығарындылардың таратылуын зерттеу қажет. қозғалыс және газ тектес заттар қимылын математикалық моделін құрып бағалау неғұрлым оңтайлы тәсіл болып табылады. Мұндай модель әр түрлі физикалық, метеорологиялық және химиялық факторларды көздейді. Ұсынылған жұмыста таңдалған математикалық моделдің және шешу алгоритмінің дұрыстылығын тексеретін модельдік есеп қарастырылады. Модель заттардың физикалық параметрлерін ескертіп, жел жылдамдығына байланысты реагенттердің химиялық реакцияларын және шығарындылардың таратылуын есептейді. Есеп ANSYS Fluent бағдарламалық кешенінің көмегімен орындалған. Аяғында сандық шешімдердің нәтижелері келтірілген және графиктер салынған. Мұндай есеп бар математикалық моделді және оны шешетін сандық алгоритмын тексеруге мүмкіндік береді. **Түйін сөздер:** Навье-Стокс теңдеулері, зат тасымалы, сандық модельдеу, ауаның ластануы, концентрация.

1 Введение

Загрязнение воздуха из года в год становится все более глобальной и серьезной проблемой мирового значения. Непрерывное развитие и рост численности населения в городских районах, ряд проблем, связанных с окружающей средой, таких как вырубка лесов, выброс токсичных материалов, выбросов твердых отходов, загрязнение воздуха и многое другое, привлекают к себе гораздо больше внимания, чем когда-либо прежде. Повсеместно развивается промышленность, вследствие чего растет количество фабрик, заводов, ТЭС и АЭС, которые производят большое количество загрязняющих веществ. Выбросы приводят к различным экологическим проблемам, которые наносят вред здоровью человека и окружающей среде. Проблема загрязнения воздуха в городах стала настолько серьезной, что существует потребность в своевременной информации об изменениях в уровне загрязнения [1-3]. Помимо выбросов загрязняющих веществ из дымовых труб, в процессе работы ТЭС производятся золошлаковые отходы. Также оказывает вредное воздействие на охладительные водоемы. Повышающаяся температура воды влияет на изменение флоры и фауны.

Каждый год в окружающую среду выбрасываются десятки миллионов тонн газообразных оксидов серы, углерода и азота. Доля ТЭС в антропогенных выбросах этих оксидов составляет 45-65% и 15-45% соответственно [4]. Дальнейшее развитие теплоэнергетики сильно зависит от обеспечения допустимого уровня воздействия энергоустановок на окружающую среду и их безопасности для экологии [1]. Попадая в атмосферу, газообразные выбросы распределяются в воздухе, вступают в химические реакции, и опадают в виде сухих и жидких осадков на окружающую поверхность земли (растения, почву, воду, строения и т.д.). В зависимости от различных физических, химических и метеорологических факторов, загрязняющие вещества могут достигать поверхности земли на расстоянии 500-1000 км от источника. Данное расстояние растёт с увеличением мощности источника [4-6].

Исследование данного процесса в Казахстане является особенно актуальным. Казахстан обладает крупными запасами энергетических ресурсов (нефть, газ, уголь, уран) и является сырьевой страной, живущей за счет продажи природных запасов энергоносителей (80% экспорта - сырье, а доля промышленного экспорта сокращается ежегодно). Согласно статистике, энергетика Казахстана почти на 87% работает на угле, а к 2020 году доля каменного топлива в генерации выбросов в атмосферу составит 66% от общего объема. Таким образом, энергетический сектор страны является основным загрязнителем воздушного бассейна Казахстана.

Для моделирования подобных масштабных задач, необходимо решить модельную задачу для проверки корректности выбранной математической модели и численного алгоритма. В этих целях в данной работе исследуется движение вещества, выходящего из трубы перпендикулярно основному течению в канале. Входные условия для выхода из трубы и поперечного течения описаны различными профилями скоростей. Отношение скоростей выражается через $R = \frac{U_{jet}}{U_{crossflow}} = 1,5$. В работе сравниваются результаты для различных профилей скорости и их влияние на дальнейшее движение вещества. Вещество В, выходящее из трубы вступает в реакцию с веществом А основного течения, в результате образуется вещество С. Исследована концентрация каждого из них. Вещества подобраны таким образом, что число Дамкелера равно 1. Само течение несжимаемое. Расчеты проводились с помощью программного комплекса ANSYS Fluent. Аналогичное исследование проводили зарубежные исследователи [8, 9], и целью данной работы было сравнение полученных данных с их результатами.

2 Схема и размеры расчетной области

На рисунке 1 приведена схема и размеры расчетной области. Вещество А входит через левую границу inlet 1, вещество В через вход трубы inlet 2, выход находится в правой границе - outlet. Размеры расчетной области указаны на рисунке 1.

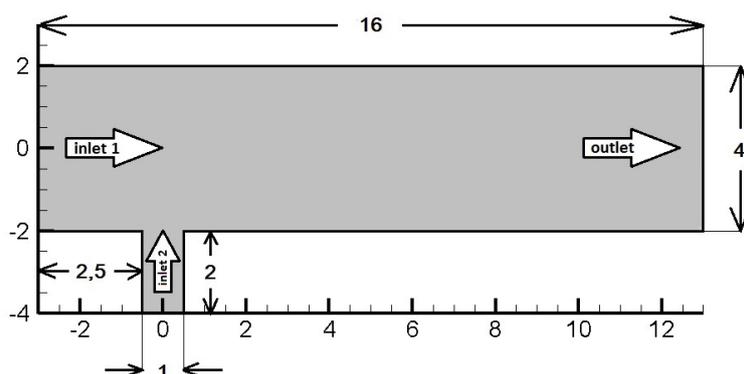


Рисунок 1 – Схема расчетной области

3 Математическая модель

Подробный обзор последних работ по течению струи в поперечном потоке можно найти в работе [10]. Предыдущие авторы численно исследовали поле скорости [11-16],

а пассивное скалярное поле концентрации рассматривалось в работах [17-19]. А также численное моделирование поля скорости было рассмотрено в работах [20-24]. На сегодняшний день для исследования течения струи в поперечном потоке все чаще применяют численное моделирование. В работах [25-26] моделируется течение струи в поперечном потоке с помощью осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) и полученные численные результаты для поля скоростей сравниваются с экспериментальными данными. В работах [27-29] численное моделирование осуществляется с помощью метода крупных вихрей (LES), который дает гораздо лучшие результаты, чем RANS подход. В работе [30, 31] была получена хорошая согласованность средних скоростей и турбулентной интенсивности экспериментальных результатов с решениями, полученными с помощью прямого численного моделирования (DNS) [18, 32]. Для численного моделирования данного процесса в основу математической модели легли уравнения Навье-Стокса, состоящие из уравнения неразрывности и уравнений движения.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

Для расчета переноса концентрации были использованы уравнения для компонентов Y_A и Y_B .

$$\rho \left(u \frac{\partial Y_A}{\partial x} + w \frac{\partial Y_A}{\partial z} \right) = \rho \Gamma_A \left(\frac{\partial^2 Y_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_A}{\partial z^2} \right) - k_1 Y_A Y_B \quad (4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial Y_B}{\partial x} + w \frac{\partial Y_B}{\partial z} \right) = \rho \Gamma_B \left(\frac{\partial^2 Y_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_B}{\partial z^2} \right) - k_2 Y_A Y_B \quad (5)$$

Согласно закону Дальтона Y_C вычисляется таким образом:

$$Y_C = 1 - Y_A - Y_B \quad (6)$$

Здесь u , w – компоненты скорости, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость, Γ_A , Γ_B – коэффициенты диффузии, k_1 , k_2 – константы скорости реакции.

4 Граничные и начальные условия

Граничные условия задавались следующим образом: для inlet 1 и inlet 2 – ‘Velocity-inlet’, для outlet – ‘Pressure-outlet’, для стен – ‘Wall’.

Начальные условия:

Для входа основного канала inlet 1 были рассмотрены различные варианты профиля скорости u :

$$u1 : \quad u = u^* \tag{7}$$

$$u2 : \quad u = u^* \left(1 - e^{-4.5 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right)} \right), \quad r = y \tag{8}$$

$$u3 : \quad u = u^* \left(1 - e^{-5 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right)} \right), \quad r = y \tag{9}$$

$$u4 : \quad u = u^* \left(1 - e^{-5.5 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right)} \right), \quad r = y \tag{10}$$

Остальные параметры задавались постоянными: $w = 0, Y_A = 1, Y_B = 0$

Для входа трубы inlet 2: $u = 0, w = 2 R u^* (1 - 4l^2)$, где $l = x, Y_A = 0, Y_B = 1$

Здесь u^* варьируется в зависимости от выбранного вещества. За вещество А и В был указан кислород O_2 . Для численного моделирования данной задачи берутся следующие параметры: динамическая вязкость кислорода равна $\mu = 1,919e - 05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, плотность $\rho = 1,299874 \text{ кг} / \text{м}^3$, скорость $u^* = 0,000369074233 \text{ м} / \text{сек}$, гидравлический диаметр $D = 1$, коэффициент диффузии был задан, как $0,67737051 \text{ м}^2/\text{сек}$.

В ANSYS Fluent все расчеты производятся в действительных размерах, поэтому в данном случае были указаны реальные параметры.

Таблица 1 – Граничные условия

Параметры	inlet 1	inlet 2	wall	outlet
u	См. (7) – (10)	$u = 0$	$u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
w	$w = 0$	См. (12)	$w = 0$	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$
p	Ур. (2)	$p = p$	Ур. (3)	Ур. (2)
Y_A	$Y_A = 1$	$Y_A = 0$	$\frac{\partial Y_A}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial Y_A}{\partial x} = 0$
Y_B	$Y_B = 0$	$Y_B = 1$	$\frac{\partial Y_B}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial Y_B}{\partial x} = 0$

Для дискретизации системы уравнений (1) – (6) используется метод контрольного объема. Для этого представим уравнения Навье - Стокса и уравнение для концентрации в виде интегральных законов сохранения для произвольного фиксированного объема Ω с границей $d\Omega$ [33, 34]:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} - B_i \right) d\Omega = 0, \tag{11}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ u_j \\ C \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} u_i \\ u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij} \\ u_j C \end{pmatrix}, \quad G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \chi \frac{\partial C}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (11) можно записать в следующем виде

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} - B \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F_i + G_i) n_i d\Gamma = 0. \quad (12)$$

Приведем уравнения (12) к такому виду

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F_i + G_i) n_i d\Gamma = \int_{\Omega} B_i d\Omega. \quad (13)$$

Сеточные функции будут определяться в центре ячейки, а значения потоков через границу в дробных ячейках. Объем ячейки обозначим через сеточные функции.

Теперь произведем дискретизацию уравнения (13) по контрольному объему (CV) и контрольной поверхности (CS)

$$\sum_{CV} \left(\frac{\Delta U}{\Delta t} \right) \Delta\Omega + \sum_{CS} (F_i + G_i) n_i \Delta\Gamma = \bar{B}_i \Delta\Omega \quad (14)$$

или можно будет написать уравнение (14) в таком виде:

$$\sum_{CV} \Delta U \Delta\Omega + \sum_{CS} \Delta t (F_i + G_i) n_i \Delta\Gamma = \Delta t \bar{B}_i \Delta\Omega. \quad (15)$$

5 Численный алгоритм

Для численного решения уравнения (1) – (6) используется схема расщепления по физическим параметрам [33-35]. Для численной реализации системы (1) – (6) используется дискретизация вида (15). На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится 5-шаговым методом Рунге – Кутта [36, 37]. На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Якоби. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. На четвертом шаге численно решаются уравнения для пассивной примеси также как уравнения движения 5-шаговым методом Рунге – Кутта. При решении уравнения для концентрации также применяется метод конечных объемов и аналогичные вычисления как для уравнения

движения [36, 37]. Алгоритм задачи распараллелен на высокопроизводительной системе. Расчеты проводились на кластерных системах URSA и T-Cluster ДГП НИИ Математики и Механики при КазНУ им. аль-Фараби. Математический численный алгоритм выглядит в таком виде:

$$I) \int_{\Omega} \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\tau} d\Omega = -\oint_{\partial\Omega} (\nabla(\vec{u}^n \vec{u}^* - \tau_{ij}) - \nu \Delta \vec{u}^*) n_i d\Gamma,$$

$$II) \oint_{\partial\Omega} (\Delta p) d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\nabla \vec{u}^*}{\tau} d\Omega,$$

$$III) \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\tau} = -\nabla p,$$

$$IV) \int_{\Omega} \frac{C^* - C^n}{\tau} d\Omega = -\oint_{\partial\Omega} (\nabla \vec{u}^n C^* - \chi \Delta C^*) n_i d\Gamma.$$

6 Численные результаты

На рисунке 2 представлены графики профилей начальных скоростей на входе inlet 1. На рисунке 3 представлены результаты для профиля вертикальных и горизонтальных скоростей при профиле начальной скорости (9) для основного канала.

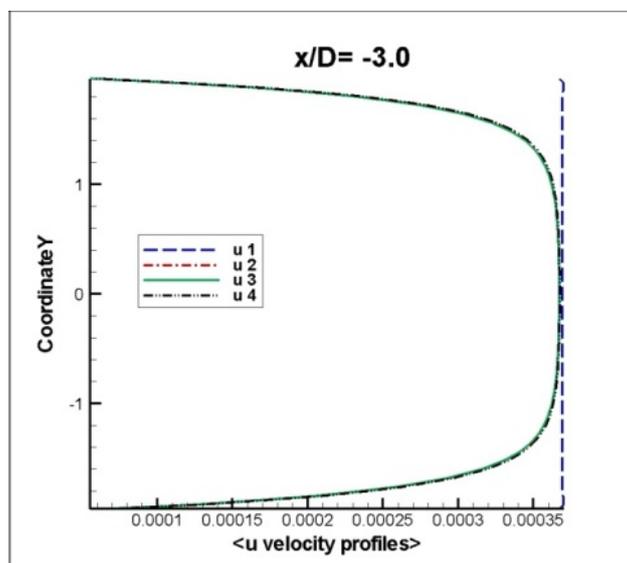


Рисунок 2 – Начальный профиль скоростей

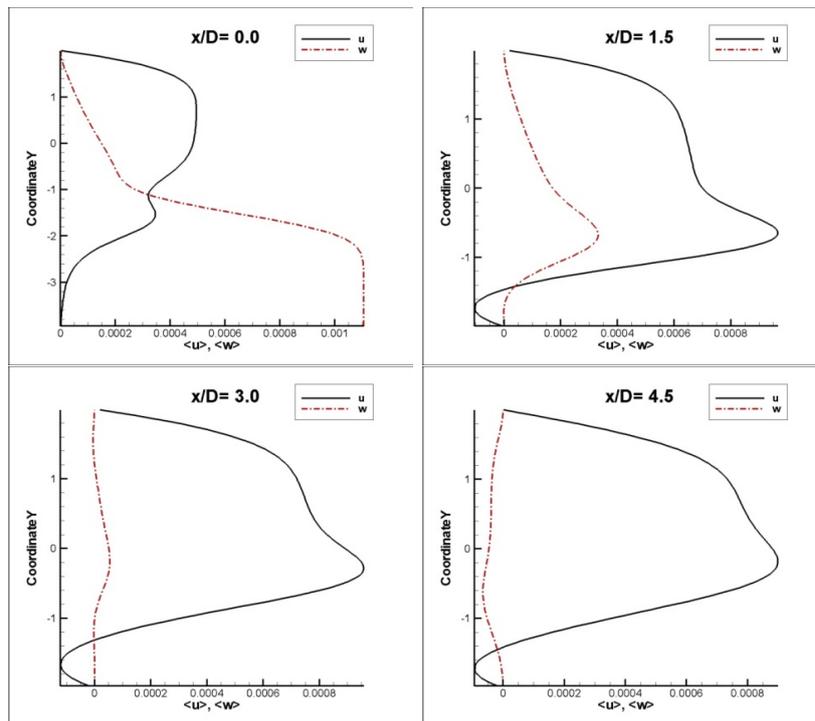


Рисунок 3 – Профили вертикальной и горизонтальной компоненты скорости: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$ [м].

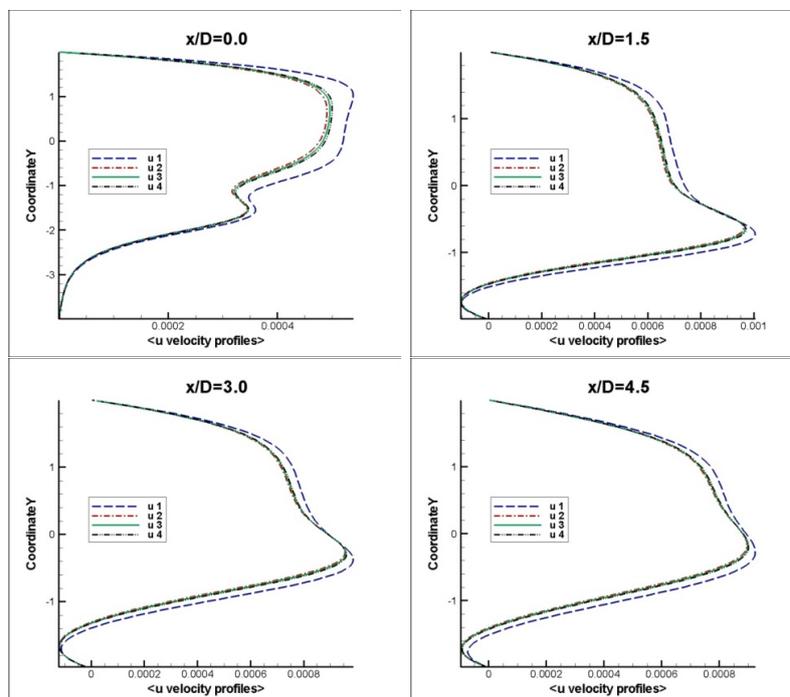


Рисунок 4 – Сравнение профилей скоростей на различных дистанциях: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$

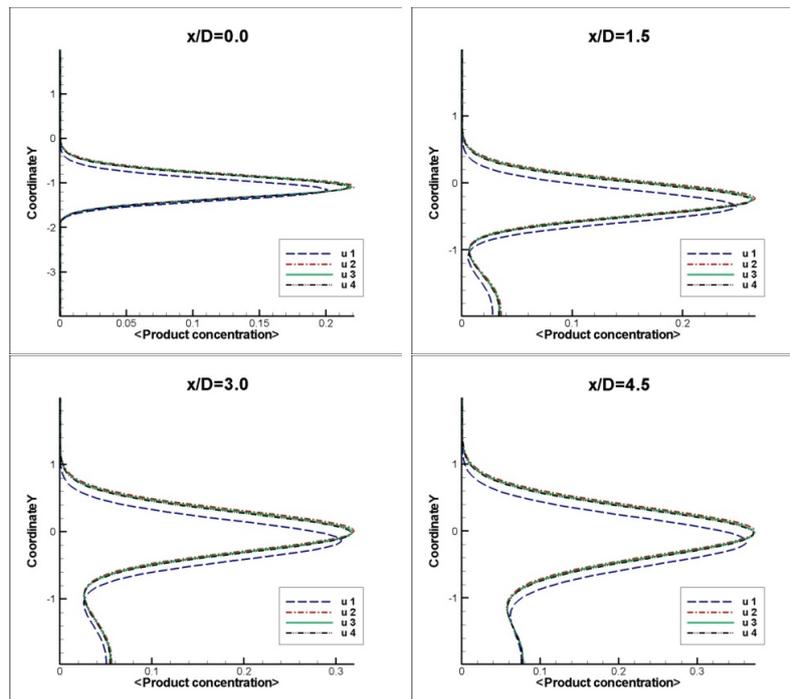


Рисунок 5 – Профили концентраций продукта реакции С на различных дистанциях для различных профилей начальной скорости: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$

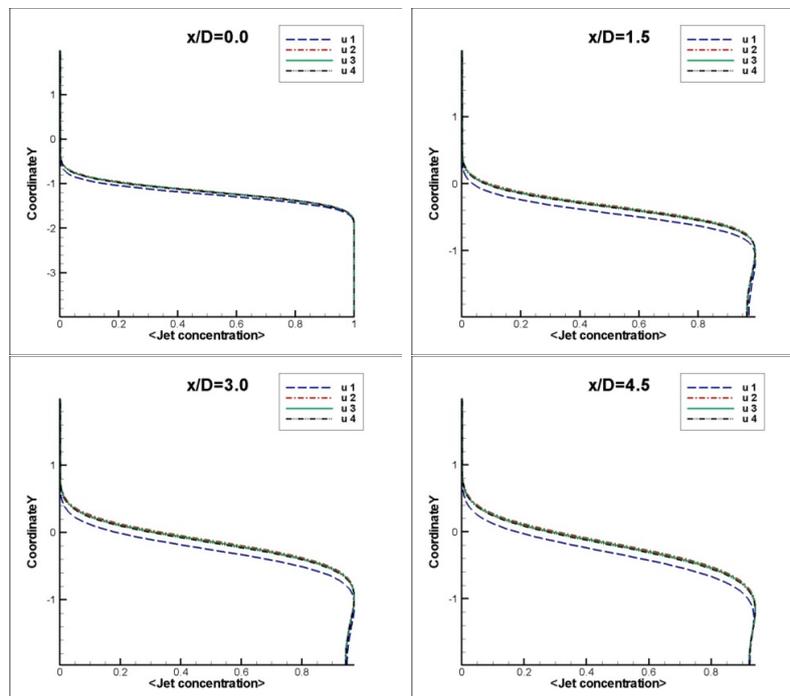


Рисунок 6 – Профили концентраций вещества В на различных дистанциях для различных профилей начальной скорости: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$

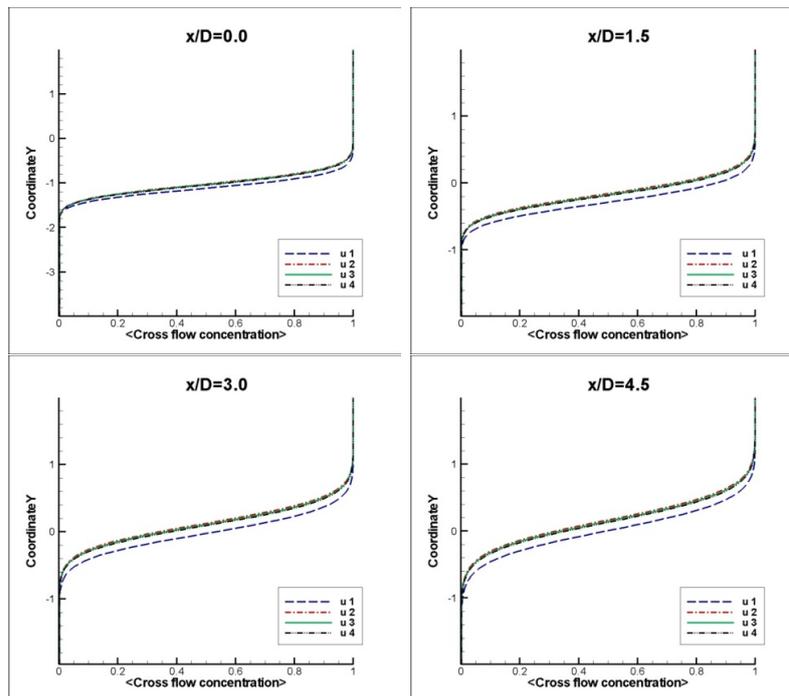


Рисунок 7 – Профили концентраций вещества А на различных дистанциях для различных профилей начальной скорости: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$

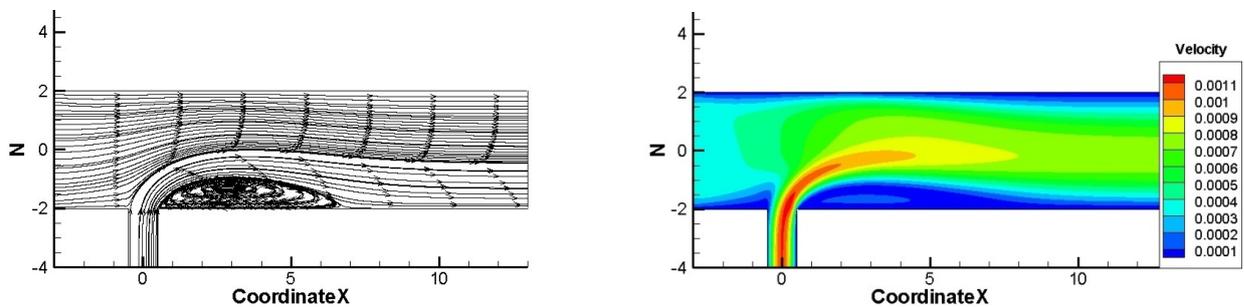


Рисунок 8 – Линии тока скоростей и контур скорости

На рисунке 4 наглядно видно, что различия между профилями u_2, u_3 и u_4 практически нет, но профиль u_1 разительно отличается от них. Отсюда следует вывод, что очень важно задавать скорости через профиль скорости, а не через постоянную величину, так как это значительно влияет на численный результат и более корректно описывает реальные физические процессы, что дает максимально приближенный к действительности результат. На рисунках 5, 6 и 7 проиллюстрированы результаты профиля концентрации веществ А, В и полученного в результате реакции вещества С на различных сечениях соответственно. На рисунке 8 показаны линии тока течения и значения скорости на всей расчетной области. На рисунках 9-11 представлен сравнительный анализ результатов распространения концентраций, полученных в ходе данной работы и результатов, полу-

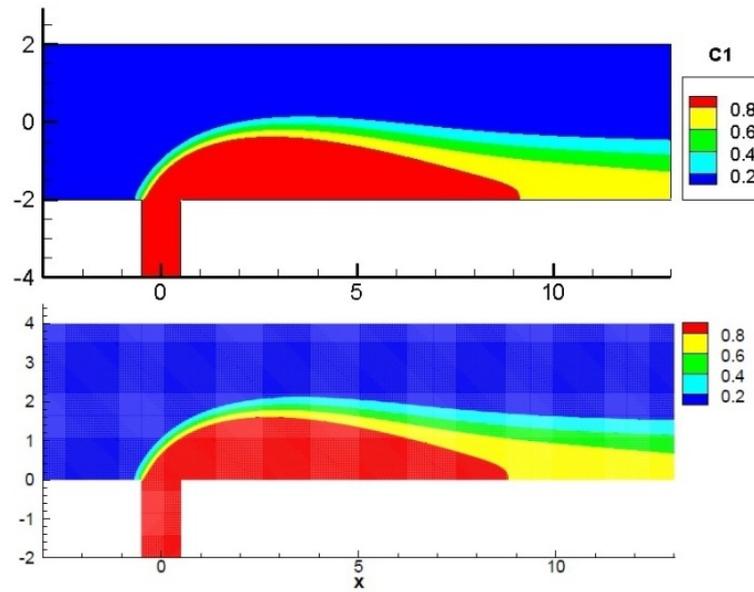


Рисунок 9 – Сравнительный анализ результатов распространения вещества А: верхний график - результаты, полученные в ходе выполнения данной работы, нижние графики - результаты [8]

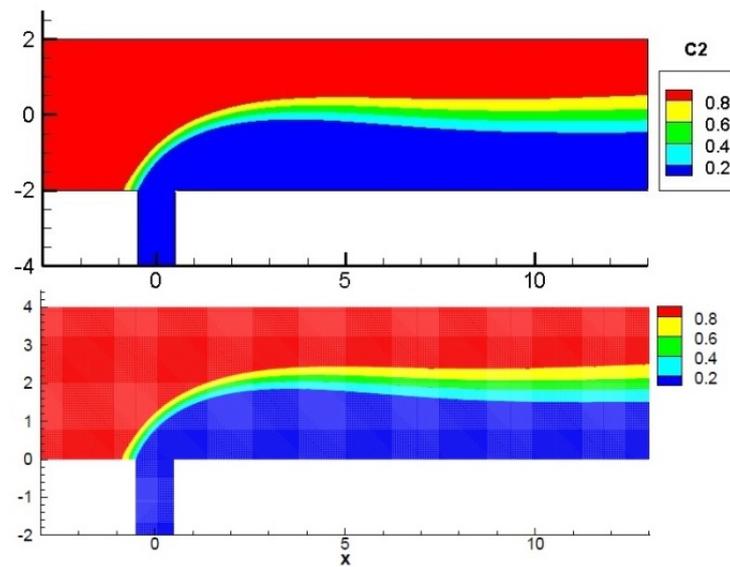


Рисунок 10 – Сравнительный анализ результатов распространения вещества В: верхний график - результаты, полученные в ходе выполнения данной работы, нижние графики - результаты [8]

ченных зарубежными исследователями [8, 9], где C_1 , C_2 , C_3 - концентрации веществ А, В и С соответственно.

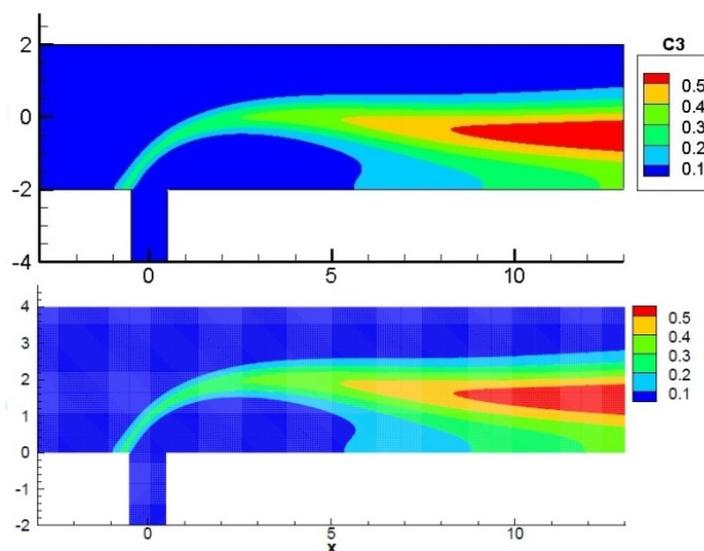


Рисунок 11 – Сравнительный анализ результатов распространения вещества С: верхний график - результаты, полученные в ходе выполнения данной работы, нижние графики - результаты [8]

7 Заключение

Решение упрощенной модельной задачи позволяет провести валидацию корректности выбранной математической модели и численного метода решения, которые в дальнейшем можно будет использовать в расчетах более сложных турбулентных моделей. Было рассмотрено движение вещества, вытекающего из трубы, в основном поперечном течении канала. Физические параметры, такие как плотность, динамическая вязкость, гидравлический диаметр и скорость, были подобраны таким образом, чтобы получить малое число Рейнольдса для ламинарного течения. Вследствие того, что в сложных турбулентных моделях расчета распространения выбросов ТЭС и АЭС рассматривается концентрация и массовое соотношение различных химических веществ, в математической модели необходимо было учесть возможность расчета концентрации. Так как элементы выбросов под воздействием химических и физических параметров смешиваются, образуя новые компоненты, в модель и численный алгоритм была включена возможность расчета химической реакции. Полученные численные результаты показали, что изменение степени экспоненты в профиле скорости не имеет значительного влияния на течение, однако задание скорости в виде константы дает значительную ошибку в расчетах.

8 Примечание

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант No 2017/ГФ4

Литература

- [1] Экологический кодекс Республики Казахстан (с изменениями и дополнениями по состоянию на 11.04.2014 г.).
- [2] Рыжский В. Я. Тепловые электрические станции, / ред. В.Я. Гиршфельда. - М.: Энергоатомиздат.- 1987. – 321 с.
- [3] Дукенбаев К. Энергетика Казахстана. Технический аспект. - Алматы, 2001 г. - 312 с.
- [4] U.S. Environmental Protection Agency, Clean Air Markets Division, available at: <https://ampd.epa.gov/ampd/>
- [5] Zavila O. Physical Modeling of Gas Pollutant Motion in the Atmosphere, Advances in Modeling of Fluid Dynamics, Dr. Chaoqun Liu (Ed.), InTech, 2012, DOI: 10.5772/48405.
- [6] Goyal P., Kumar A. Mathematical Modeling of Air Pollutants: An Application to Indian Urban City, Air Quality-Models and Applications, Prof. Dragana Popovic (Ed.), InTech, 2011, DOI: 10.5772/16840.
- [7] Kozic, M. S. A numerical study for the assessment of pollutant dispersion from kostolac b power plant to viminacium for different atmospheric conditions // THERMAL SCIENCE, Vol. 19, No. 2.-2015.- pp. 425-434.
- [8] Falconi C. J., Denev J. A., Frohlich J. and Bockhorn H. A test case for microreactor flows - a two-dimensional jet in crossflow with chemical reaction, Internal Report, available at: <http://www.ict.uni-karlsruhe.de/index.pl/themen/dns/index.html>: "2d test case for microreactor flows. Internal report. 2007 July 20, 2007.
- [9] Schonauer, W., Adolph, T. FDEM: The Evolution and Application of the Finite Difference Element Method (FDEM) Program Package for the Solution of Partial Differential Equations, Abschlussbericht des Verbundprojekts FDEM, Universität Karlsruhe.- 2005.- available at <http://www.rz.uni-karlsruhe.de/rz/docs/FDEM/Literatur/fdem.pdf>
- [10] Margason, R. J. Fifty years of jet in crossflow research. In AGARD Symp. on a Jet in Cross Flow, Winchester, UK.- AGARD CP . - 1993.- p. 534.
- [11] Kamotani, Y., Greber, I. Experiments on turbulent jet in a crossflow // AIAA J. 10.-1972. - 1425-1429 pp.
- [12] Fearn, R. L., Weston, R. P. Vorticity associated with a jet in crossflow // AIAA J. 12.-, 1974. - 1666-1671 pp.
- [13] Andreopoulos, J., Rodi, W. Experimental investigation of jets in a crossflow // J. Fluid Mech. 138.- 1984. - 93-127 pp.
- [14] Krothapalli, A., Lourenco, L., Buchlin, J. M. Separated flow upstream of a jet in a crossflow // AIAA J. 28.- 1990. - 414-420 pp.
- [15] Fric, T. F., Roshko, A. Vortical structure in the wake of a transverse jet // J. Fluid Mech. 279.- 1994. - 1-47 pp.
- [16] Kelso, R. M., Lim, T. T., Perry, A. E. An experimental study of round jets in cross-flow // J. Fluid Mech. 306.- 1996. - 111-144 pp.
- [17] Smith, S. H., Mungal, M. G. Mixing, structure and scaling of the jet in crossflow // J. Fluid Mech. 357.- 1998. - 83-122 pp.
- [18] Su, L. K., Mungal, M. G. Simultaneous measurement of scalar and velocity field evolution in turbulent crossflowing jets // J. Fluid Mech. 513.-2004. - 1-45 pp.
- [19] Shan, J. W., Dimotakis, P. E. Reynolds-number effects and anisotropy in transverse-jet mixing // J. Fluid. Mech. 566.- 2006. - 47-96 pp.
- [20] Broadwell, J. E., Breidenthal, R. E. Structure and mixing of a transverse jet in incompressible flow // J. Fluid Mech. 148.- 1984.- 405-412 pp.
- [21] Karagozian, A. R. An analytical model for the vorticity associated with a transverse jet // AIAA J. 24.- 1986.- 429-436 pp.
- [22] Hasselbrink, E. F., Mungal, M. G. Transverse jets and jet flames. Part 1. Scaling laws for strong transverse jets // J. Fluid Mech, 443.- 2001.- 1-25 pp.
- [23] Muppidi, S., Mahesh, K. Study of trajectories of jets in crossflow using direct numerical simulations. J. Fluid. Mech. 530.- 2005. - 81-100 pp.
- [24] Muppidi, S., Mahesh, K. Direct numerical simulation of passive scalar transport in transverse jets. J. Fluid Mech., 598.- 2008. - 335-360 pp.

- [25] *Chochua, G., Shyy, W., Thakur, S., Brankovic, A., Lienau, K., Porter, L., Lischinsky, D.* A computational and experimental investigation of turbulent jet and crossflow interaction. *Numer. Heat Transfer A* 38.- 2000. - 557-572 pp.
- [26] *Acharya, S., Tyagi, M., Hoda, A.* Flow and heat transfer predictions for film-cooling. *Ann. NY Acad. Sci.* 934.- 2001. - 110-125 pp.
- [27] *Yuan, L. L., Street, R. L., Ferziger, J. H.* Large-eddy simulations of a round jet in crossflow // *J. Fluid Mech.* 379.- 1999 . - 71-104 pp.
- [28] *Schluter, J. U., Schonfeld, T.* LES of jets in crossflow and its application to a gas turbine burner // *Flow Turbulence Combust.* 65.- 2000. - 177-203 pp.
- [29] *Chai, X., Iyer, P. S., Mahesh, K.* Numerical study of high speed jets in crossflow // *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 785.- 2015. - 152-188 pp.
- [30] *Muppidi, S., Mahesh, K.* Direct numerical simulation of round turbulent jets in crossflow // *J. Fluid. Mech.* 574, 2007,- 59-84 pp.
- [31] *Livescu, D., Jaber, F. A., Madnia C. K.* Passive-scalar wake behind a line source in grid turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. Volume 416.- 2000. - 117-149 pp.
- [32] *Camussi R., Guj G., Stella A.* Experimental study of a jet in a crossflow at very low Reynolds number // *Journal of Fluid Mechanics*. Volume 454. - 2002. - 113-144 pp.
- [33] *Chung T. J.* *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2002 - p. 1012.
- [34] *Ferziger J. H., Peric M.* *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer; 3rd edition, 2013, -p. 426
- [35] *Issakhov A.* Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method. Issue 4 // *J. Phys.: Conf. Ser.* 318. pp. 1282-1288. -2011. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [36] *Issakhov A.* Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(5). -2015, -229-238 pp., doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [37] *Issakhov A.* Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // *Applied Mathematical Modelling* (2015), Volume 40, Issue 2, -2016, - 1082-1096 pp. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.

References

- [1] *Ekologicheskiy kodeks Respubliki Kazahstan (s izmeneniyami i dopolneniyami po sostojaniyu na 11.04.2014 g.).*
- [2] *Ryzhkin V. Ya.* *Teplovye elektricheskie stancii*, / red V.Ya. Girshfelda .- M: Energoatomizdat.- 1987 g.- 321 s.
- [3] *Dukenbaev K.* *Energetika Kazahstana. Tehnicheskij aspekt*, - Almaty, 2001 g.-312 s.
- [4] U.S. Environmental Protection Agency, Clean Air Markets Division, available at: <https://ampd.epa.gov/ampd/>
- [5] *Zavila O.* Physical Modeling of Gas Pollutant Motion in the Atmosphere, *Advances in Modeling of Fluid Dynamics*, Dr. Chaoqun Liu (Ed.), InTech, 2012, DOI: 10.5772/48405.
- [6] *Goyal P., Kumar A.* Mathematical Modeling of Air Pollutants: An Application to Indian Urban City, *Air Quality-Models and Applications*, Prof. Dragana Popovic (Ed.), InTech, 2011, DOI: 10.5772/16840.
- [7] *Kozic, M. S.* A numerical study for the assessment of pollutant dispersion from kostolac b power plant to viminacium for different atmospheric conditions // *THERMAL SCIENCE*, Vol. 19, No. 2.-2015.- pp. 425-434.
- [8] *Falconi C. J., Denev J. A., Frohlich J. and Bockhorn H.* A test case for microreactor flows - a two-dimensional jet in crossflow with chemical reaction, Internal Report, available at: <http://www.ict.uni-karlsruhe.de/index.pl/themen/dns/index.html>: "2d test case for microreactor flows. Internal report. 2007 July 20, 2007.
- [9] *Schonauer, W., Adolph, T.* FDEM: The Evolution and Application of the Finite Difference Element Method (FDEM) Program Package for the Solution of Partial Differential Equations, Abschlussbericht des Verbundprojekts FDEM, Universität Karlsruhe.- 2005.- available at <http://www.rz.uni-karlsruhe.de/rz/docs/FDEM/Literatur/fdem.pdf>

- [10] *Margason, R. J.* Fifty years of jet in crossflow research. In AGARD Symp. on a Jet in Cross Flow, Winchester, UK.- AGARD CP . - 1993.- p. 534.
- [11] *Kamotani, Y., Greber, I.* Experiments on turbulent jet in a crossflow // AIAA J. 10.-1972. - 1425-1429 pp.
- [12] *Fearn, R. L., Weston, R. P.* Vorticity associated with a jet in crossflow // AIAA J. 12.-, 1974. - 1666-1671 pp.
- [13] *Andreopoulos, J., Rodi, W.* Experimental investigation of jets in a crossflow // J. Fluid Mech. 138.- 1984. - 93-127 pp.
- [14] *Krothapalli, A., Lourenco, L., Buchlin, J. M.* Separated flow upstream of a jet in a crossflow // AIAA J. 28.- 1990. - 414-420 pp.
- [15] *Fric, T. F., Roshko, A.* Vortical structure in the wake of a transverse jet // J. Fluid Mech. 279.- 1994. - 1-47 pp.
- [16] *Kelso, R. M., Lim, T. T., Perry, A. E.* An experimental study of round jets in cross-flow // J. Fluid Mech. 306.- 1996. - 111-144 pp.
- [17] *Smith, S. H., Mungal, M. G.* Mixing, structure and scaling of the jet in crossflow // J. Fluid Mech. 357.- 1998. - 83-122 pp.
- [18] *Su, L. K., Mungal, M. G.* Simultaneous measurement of scalar and velocity field evolution in turbulent crossflowing jets // J. Fluid Mech. 513.-2004. - 1-45 pp.
- [19] *Shan, J. W., Dimotakis, P. E.* Reynolds-number effects and anisotropy in transverse-jet mixing // J. Fluid. Mech. 566.- 2006. - 47-96 pp.
- [20] *Broadwell, J. E., Breidenthal, R. E.* Structure and mixing of a transverse jet in incompressible flow // J. Fluid Mech. 148.- 1984.- 405-412 pp.
- [21] *Karagozian, A. R.* An analytical model for the vorticity associated with a transverse jet // AIAA J. 24.- 1986.- 429-436 pp.
- [22] *Hasselbrink, E. F., Mungal, M. G.* Transverse jets and jet flames. Part 1. Scaling laws for strong transverse jets // J. Fluid Mech, 443.- 2001.- 1-25 pp.
- [23] *Muppidi, S., Mahesh, K.* Study of trajectories of jets in crossflow using direct numerical simulations. J. Fluid. Mech. 530.- 2005. - 81-100 pp.
- [24] *Muppidi, S., Mahesh, K.* Direct numerical simulation of passive scalar transport in transverse jets. J. Fluid Mech., 598.- 2008. - 335-360 pp.
- [25] *Chochua, G., Shyy, W., Thakur, S., Brankovic, A., Lienau, K., Porter, L., Lischinsky, D.* A computational and experimental investigation of turbulent jet and crossflow interaction. Numer. Heat Transfer A 38.- 2000. - 557-572 pp.
- [26] *Acharya, S., Tyagi, M., Hoda, A.* Flow and heat transfer predictions for film-cooling. Ann. NY Acad. Sci. 934.- 2001. - 110-125 pp.
- [27] *Yuan, L. L., Street, R. L., Ferziger, J. H.* Large-eddy simulations of a round jet in crossflow // J. Fluid Mech. 379.- 1999 . - 71-104 pp.
- [28] *Schluter, J. U., Schonfeld, T.* LES of jets in crossflow and its application to a gas turbine burner // Flow Turbulence Combust. 65.- 2000. - 177-203 pp.
- [29] *Chai, X., Iyer, P. S., Mahesh, K.* Numerical study of high speed jets in crossflow // Journal of Fluid Mechanics, Volume 785.- 2015. - 152-188 pp.
- [30] *Muppidi, S., Mahesh, K.* Direct numerical simulation of round turbulent jets in crossflow // J. Fluid. Mech. 574, 2007.- 59-84 pp.
- [31] *Livescu, D., Jaber, F. A., Madnia C. K.* Passive-scalar wake behind a line source in grid turbulence // Journal of Fluid Mechanics. Volume 416.- 2000. - 117-149 pp.
- [32] *Camussi R., Guj G., Stella A.* Experimental study of a jet in a crossflow at very low Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. Volume 454. - 2002. - 113-144 pp.
- [33] *Chung T. J.* Computational Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2002 - p. 1012.
- [34] *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer; 3rd edition, 2013, -p. 426

- [35] *Issakhov A.* Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method. Issue 4 // J. Phys.: Conf. Ser. 318. pp. 1282-1288. -2011. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [36] *Issakhov A.* Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(5). -2015, -229-238 pp., doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [37] *Issakhov A.* Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // Applied Mathematical Modelling (2015), Volume 40, Issue 2, -2016, - 1082-1096 pp. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.