УДК 517.927

Ж.Х. Жунусова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: zhzhkh@mail.ru

О решений доменной стенки интегрируемого спинового уравнения

Некоторые обобщенные уравнения Ландау-Лифшица являются интегрируемыми, допускают физически интересные точные решения, более того эти интегрируемые уравнения разрешимы методом обратной задачи рассеяния [1]. Исследование интегрируемых спиновых уравнений в (1+1)-, (2+1)-измерениях являются актуальным с точки зрения математической физики [2]-[5]. Интегрируемые уравнения допускают различные виды решений как решение доменной стенки [2]. Рассмотрим интегрируемое спиновое уравнение [3]. Оно имеет соответствующее представление Лакса. Кроме того уравнение обладает бесконечным числом интегралов движения. В данной работе мы строим поверхность соответствующую решению доменной стенки данного уравнения. Далее исследуем некоторые геометрические характеристики этой поверхности.

Ключевые слова: поверхность, решение доменной стенки, интегрируемое уравнение, интегралы движения, нелинейное уравнение.

Ж.Х. Жүнусова

Интегралданатын спиндік теңдеудің домендік қабырға шешімі

Кейбір Ландау-Лифшиц теңдеуінің жалпыламалары интегралданады, физикалық мағыналы шешімдері бар, сонымен қатар осы интегралданатын теңдеулер кері сейілу әдісімен шешіледі [1]. Интегралданатын спиндік теңдеулерді (1+1)-, (2+1)-өлшемдерінде математикалық физика тұрғысынан зерттеу өзекті [2]-[5]. Интегралданатын теңдеулердің домендік қабырға сияқты қызықты шешімдері бар. Бұл жұмыста интегралданатын спиндік теңдеуді қарастырамыз [3]. Оның Лакс жұбы бар. Сонымен қатар бұл теңдеуде қозғалыс интегралдарының шексіз саны бар. Бұл теңдеудің домендік қабырға шешіміне сәйкес бет құрамыз. Осы беттің геометриялық қасиеттерін зерттейміз.

Түйін сөздер: бет, домендік қабырға шешімі, интегралданатын теңдеу, қозғалыс интегралдары, сызықты емес теңдеу.

Zh.Kh. Zhunussova

On domain wall solution of the integrable spin equation

Some generalizations of Landau-Lifschitz equation are integrable, admit physically interesting exact solutions and these integrable equations are solvable by the inverse scattering method [1]. Investigating of the integrable spin equations in (1+1)-, (2+1)-dimensions are topical both from mathematical physics point of view [2]-[5]. Integrable equations admit different kinds of physically interesting as domain wall solutions [2]. We consider an integrable spin equation [3]. There is a corresponding Lax representation. Moreover the equation allows an infinite number of integrals of motion. We construct a surface corresponding to domain wall solution of the equation. Further, we investigate some geometrical features of the surface.

Key words: surface, domain wall solution, integrable equation, integrals of motion, nonlinear equation.

Введение

Мы применяем геометрический подход к обобщенному уравнению Ландау-Лифшица следующего вида [3]

$$\mathbf{S}_t = (\mathbf{S} \times \mathbf{S}_y + u\mathbf{S})_x, \tag{1a}$$

$$u_x = -(\mathbf{S}, (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y)), \tag{1b}$$

где $\mathbf{S}$ является спиновым вектором, $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, $\times$ является векторным произведением, u произвольная скалярная функция. Данное уравнение допускает бесконечное число интегралов движения и имеет некоторые точные решения. Одним из них является решение доменной стенки. Согласно геометрическому подходу [3] мы отождествляем спиновый вектор $\mathbf{S}$ с вектором $\mathbf{r}_x$

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{r}_x \tag{2}$$

Тогда (1a), (1b) принимает вид

$$\mathbf{r}_{xt} = (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_{xy} + u\mathbf{r}_x)_x \tag{3a}$$

$$u_x = -(\mathbf{r}_x, (\mathbf{r}_{xx} \times \mathbf{r}_{xy})). \tag{3b}$$

Если проинтегрировать (3a) по x, тогда оно примет следующий вид

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_{xy} + u\mathbf{r}_x.$$

Учитывая уравнение Гаусса-Вейнгартена и $E = \mathbf{r}_x^2 = 1$ система определяется как

$$\mathbf{r}_t = (u + \frac{MF}{\sqrt{\Lambda}})\mathbf{r}_x - \frac{M}{\sqrt{\Lambda}}\mathbf{r}_y + \Gamma_{12}^2\sqrt{\Lambda}\mathbf{n},$$

$$u_x = \sqrt{\Lambda}(L\Gamma_{12}^2 - M\Gamma_{11}^2),$$

где

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_x - EE_t - FE_x}{2\Lambda},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_x - FE_t}{2\Lambda},$$

$\Lambda = EG - F^2$. Уравнение (1a), (1b) является интегрируемым и имеет солитонные решения.

Построение поверхности соответствующей решению доменной стенки

Здесь мы рассмотрим решение доменной стенки уравнения (1a), (1b) [3],

$$S^+(x, y, t) = \frac{expiby}{cosh[a(x - bt - x_0)]}, \tag{4a}$$

$$S_3(x, y, t) = -tanh[a(x - bt - x_0)], \tag{4b}$$

где a, b являются действительными постоянными.

Т е о р е м а. *Решение доменной стенки (4a)-(4b) спиновой системы (1a), (1b) может быть представлено в виде компонент вектора* $\mathbf{r}_x$, *где*

$$r_1 = \frac{1}{a} cos(by) arctg(sh[a(x - bt - x_0)]) + c_1, \tag{5a}$$

$$r_2 = \frac{1}{a} sin(by) arctg(sh[a(x - bt - x_0)]) + c_2, \tag{5b}$$

$$r_3 = -\frac{1}{a} ln|ch[a(x - bt - x_0)]| + c_3, \tag{5c}$$

где c_1, c_2, c_3 *являются постоянными. Решению вида (5a)-(5c) соответствует поверхность с коэффициентами первой и второй квадратичных форм*

$$E = \frac{2 + sh^2[a(x - bt - x_0)]}{(1 + sh^2[a(x - bt - x_0)])^2}, \quad F = 0, \tag{6a}$$

$$G = \frac{b^2}{a^2} arctg^2(sh[a(x - bt - x_0)]), \quad L = 0, \tag{6b}$$

$$M = 0, \quad N = -\frac{b^3 arctg^2(sh[a(x - bt - x_0)])}{\sqrt{\Lambda} a^2 ch[a(x - bt - x_0)]}. \tag{6c}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2) имеем

$$(S_1, S_2, S_3) = (r_{1x}, r_{2x}, r_{3x}), \tag{7}$$

т.е.

$$r_{1x} = S_1, \quad r_{2x} = S_2, \quad r_{3x} = S_3. \tag{8}$$

Следовательно

$$r_1 = \int S_1 dx + c_1, \tag{9a}$$

$$r_2 = \int S_2 dx + c_2, \tag{9b}$$

$$r_3 = \int S_3 dx + c_3, \tag{9c}$$

где c_1, c_2, c_3 являются постоянными интегрирования. Заметим

$$S^+ = S_1 + iS_2 = r_x^+,$$

тогда

$$r^+ = r_1 + ir_2 = \int S^+ dx + c^+, \tag{10}$$

где c^+ является постоянной интегрирования. Подставляя (4b) в уравнение (9c) имеем

$$r_3 = \int S_3 dx + c_3 = -\int [tanh[a(x - bt - x_0)] dx + c_3 =$$

$$= -\frac{1}{a} ln|ch[a(x - bt - x_0)]| + c_3, \tag{11}$$

где c_3 является постоянной. Таким образом

$$r_3 = -\frac{1}{a} ln|ch[a(x - bt - x_0)]| + c_3, \tag{12}$$

Подставляя (4a) в (10) имеем

$$r^+ = r_1 + ir_2 = \int S^+ dx + c^+ =$$

$$= \int \frac{expiby}{cosh[a(x - bt - x_0)]} dx + c^+,$$

тогда

$$r^+ = \frac{1}{a} cos(by) arctg(sh[a(x - bt - x_0)]) + c_1 +$$

$$+ i(\frac{1}{a} sin(by) arctg(sh[a(x - bt - x_0)]) + c_2),$$

т.е. мы получили

$$r_1 = \frac{1}{a} cos(by) arctg(sh[a(x - bt - x_0)]) + c_1,$$

$$r_2 = \frac{1}{a} sin(by) arctg(sh[a(x - bt - x_0)]) + c_2. \tag{13}$$

Таким образом, (12), (13) дает нам (5a)-(5c).

Мы переходим к доказательству второй части теоремы. Из (12) и (13) имеем

$$r_{1x} = \frac{cos(by)}{1 + sh^2[a(x - bt - x_0)]}, \quad r_{2x} = \frac{sin(by)}{1 + sh^2[a(x - bt - x_0)]}, \tag{14a}$$

$$r_{3x} = -\frac{1}{ch^2[a(x - bt - x_0)]}, \quad r_{1y} = -\frac{b}{a} sin(by) arctg(sh[a(x - bt - x_0)]), \tag{14b}$$

$$r_{2y} = \frac{b}{a} cos(by) arctg(sh[a(x - bt - x_0)]), \quad r_{3y} = 0. \tag{14c}$$

Затем мы вычислим

$$E = \mathbf{r}_x^2 = r_{1x}^2 + r_{2x}^2 + r_{3x}^2 =$$

$$= \frac{cos^2(by)}{(1 + sh^2[a(x - bt - x_0)])^2} +$$

$$+ \frac{sin^2(by)}{(1 + sh^2[a(x - bt - x_0)])^2} + \frac{1}{ch^2[a(x - bt - x_0)]} = \frac{2 + sh^2[a(x - bt - x_0)]}{(1 + sh^2[a(x - bt - x_0)])^2}. \tag{15}$$

Подобно, используя (13) и (14c) получим

$$G = \mathbf{r}_y^2 = r_{1y}^2 + r_{2y}^2 + r_{3y}^2 = \frac{b^2}{a^2} arctg^2(sh[a(x - bt - x_0)]). \tag{16}$$

$$F = (\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y) = r_{1x} r_{1y} + r_{2x} r_{2y} + r_{3x} r_{3y} = 0. \tag{17}$$

Формулы (15) - (17) дают нам первые три уравнения (6a) - (6c). Используя (15) - (17) имеем

$$\Lambda = EG - F^2 = \frac{b^2(2 + sh^2[a(x - bt - x_0)])}{a^2(1 + sh^2[a(x - bt - x_0)])^2} arctg^2(sh[a(x - bt - x_0)]).$$

Найдем компоненты вектора $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}(n_1, n_2, n_3),$$

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}(r_{2x}r_{3y} - r_{3x}r_{2y}) = \frac{bcos(by)arctg(sh[a(x - bt - x_0)])}{\sqrt{\Lambda}ach[a(x - bt - x_0)]}. \tag{18}$$

Подобно для компонент

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}(r_{3x}r_{1y} - r_{1x}r_{3y}) = \frac{bsin(by)arctg(sh[a(x - bt - x_0)])}{\sqrt{\Lambda}ach[a(x - bt - x_0)]}, \tag{19a}$$

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}(r_{1x}r_{2y} - r_{2x}r_{1y}) = \frac{barctg(sh[a(x - bt - x_0)])}{\sqrt{\Lambda}a(1 + sh^2[a(x - bt - x_0)])}. \tag{19b}$$

Теперь из (14a), (14b) имеем

$$r_{1xx} = -\frac{2acos(by)sh[a(x - bt - x_0)]ch[a(x - bt - x_0)]}{(1 + sh^2[a(x - bt - x_0)])^2}, \tag{20a}$$

$$r_{2xx} = -\frac{2asin(by)sh[a(x - bt - x_0)]ch[a(x - bt - x_0)]}{(1 + sh^2[a(x - bt - x_0)])^2}. \tag{20b}$$

$$r_{3xx} = \frac{ash[a(x - bt - x_0)]}{ch^2[a(x - bt - x_0)]}. \tag{20c}$$

Таким образом, используя (18), (19a), (19b), (20a) - (20c) можем найти

$$L = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{xx}) = n_1 r_{1xx} + n_2 r_{2xx} + n_3 r_{3xx}.$$

Следовательно

$$L = 0. \tag{21}$$

Подобным образом, мы находим коэффициенты второй фундаментальной формы

$$M = 0, \tag{22}$$

$$N = -\frac{b^3 arctg^2(sh[a(x - bt - x_0)])}{\sqrt{\Lambda}a^2 ch[a(x - bt - x_0)]}. \tag{23}$$

Формулы (21) - (23) дают нам последние три уравнения (6a) - (6c). Теорема доказана.

Заключение

Основываясь на результатах работы [3], где уравнение Гаусса-Кодацци-Майнарди рассмотрено в многомерном пространстве, мы исследовали обобщенное уравнение Ландау-Лифшица и постороили поверхность соответствующую решению доменной стенки. Таким образом, данная работа раскрывает значение геометрического подхода [3] в (2+1) - измерений.

Литература

[1] Ablowitz M.J. and Clarkson P.A, *Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge,1992;

[2] Bliev N.K., Myrzakulov R., Zhunussova Zh.Kh. *Soma exact solutions of the nonlinear sigma model*, Doclady AN RK, 5, 3-10 (1999);

[3] Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., et all. *On the simplest (2+1) dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear SchrËodinger equations*, J. Math. Phys., 39, No. 7, 2122 (1998);

[4] Lakshmanan, M. Myrzakulov, R., et all.*Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in 2+1 - dimensions*, J. Math. Phys., 39, No. 7, 3765-3771 (1998);

[5] Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. - 1967. -V. 19, -P. 1095-1097.

References

[1] Ablowitz M.J. and Clarkson P.A, *Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge,1992;

[2] Bliev N.K., Myrzakulov R., Zhunussova Zh.Kh. *Soma exact solutions of the nonlinear sigma model*, Doclady AN RK, 5, 3-10 (1999);

[3] Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., et all. *On the simplest (2+1) dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear SchrËodinger equations*, J. Math. Phys., 39, No. 7, 2122 (1998);

[4] Lakshmanan, M. Myrzakulov, R., et all.*Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in 2+1 - dimensions*, J. Math. Phys., 39, No. 7, 3765-3771 (1998);

[5] Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. - 1967. -V. 19, -P. 1095-1097.