МРНТИ 27.29.21, УДК 517.984+517.925

# О классе потенциалов с тривиальной монодромией

Ишкин Х.К., Башкирский государственный университет,
г. Уфа, Россия, E-mail: Ishkin62@mail.ru
Ахметшина А.Д., Башкирский государственный университет,
г. Уфа, Россия, E-mail: azipuk@mail.ru

Рассматривается задача описания класса $TM(\Omega, A)$ потенциалов, мероморфных в односвязной области $\Omega$, с множеством полюсов $A$, удовлетворяющих условию тривиальной монодромии: любое решение соответствующего уравнения Штурма–Лиувилля при всех значениях спектрального параметра не имеет точек ветвления ни в одной точке $A$. Показано, что в случае конечного $A$ линейное (относительно обычного сложения) пространство $TM(\Omega, A)$ имеет конечную размерность по модулю подпространства $TM_0(\Omega, A)$ функций, голоморфных в $\Omega$ и имеющих в точках нули заданной кратности (своей для каждой точки). Тем самым при конечном $A$ получено полное описание $TM(\Omega, A, M)$ в терминах любого конечного набора функций – решений интерполяционной задачи с кратными узлами в точках множества $A$. Полученный результат обобщает известные результаты о классах потенциалов с тривиальной монодромией на всей плоскости, убывающих на бесконечности (J.J. Duistermaat, F.A. Grünbaum) или растущих не быстрее второй (А.А. Обломков) либо шестой (J. Gibbons, A.P. Veselov) степени. В случае, когда множество $A$ счетно и имеет единственную предельную точку, построен достаточно широкий класс функций, удовлетворяющих условию тривиальной монодромии.
**Ключевые слова**: спектральная неустойчивость, локализация спектра, уравнение Штурма–Лиувилля, тривиальная монодромия.

**On the class of potentials with trivial monodromy**

Ishkin Kh.K., Bashkir State University,
Ufa, Russia, E-mail: Ishkin62@mail.ru
Akhmetshina A.D., Bashkir State University,
Ufa, Russia, E-mail: azipuk@mail.ru

We consider the problem of describing the class $TM(\Omega, A)$ potentials meromorphic in a simply connected domain $\Omega$ with a set of poles $A$ satisfying the trivial monodromy condition: any solution of the corresponding Sturm–Liouville equation for all values of the spectral parameter has no branch points at any point in $A$. We have shown that in the case of a finite $A$ the linear (with respect to the usual addition) space $TM(\Omega, A)$ has finite dimension modulo the subspace $TM_0(\Omega, A)$ of functions holomorphic in $\Omega$ and having at points $A$, zeros of a given multiplicity (its own for each point). Thus, for a finite $A$, a complete description of $TM(\Omega, A, M)$ is obtained in terms of any finite set of functions – solutions of an interpolation problem with multiple nodes at points of the set $A$. The result obtained summarizes the well-known results on classes of potentials with trivial monodromy on the $\mathbb{C}$, decreasing at infinity (J.J. Duistermaat, F.A. Grünbaum) or growing not faster than the second (A. Oblomkov) or the sixth (J.Gibbons, A.P. Veselov) of degree. In the case when the set $A$ is countable and has a unique limit point, a sufficiently wide class of functions that satisfy the condition of trivial monodromy is constructed.
**Key words**: spectral instability, spectrum localization, Sturm–Liouville equation, trivial monodromy.

## 1 Введение. Обзор литературы

Методы теории функций комплексной переменной (ТФКП) представляют собой естественное и эффективное средство для решения самых разнообразных задач спектральной теории операторов. Несамосопряженные дифференциальные операторы – тот класс операторов, спектральный анализ которых без привлечения методов ТФКП просто невозможен. Наиболее яркий тому пример — теория регуляризованных следов задач, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями на конечном отрезке: в работах [1, 2] было установлено, что получение формул следов таких задач не связано, вообще говоря, с их операторной трактовкой, а носит чисто теоретико-функциональный характер и сводится к исследованию регуляризованных сумм корней некоторого класса целых функций. Этому классу, в частности, принадлежит характеристический определитель спектральной задачи для системы

$$Y' = \lambda A Y,\ x \in [0,1], \tag{1}$$

где $A$– кусочно-постоянная невырожденная матрица $n\times n$ [3,4]. Как отмечено в [5], если собственные числа $d_1,\dots,d_n$ матрицы $A^{-1}$ удовлетворяют известным [6, 7] условиям Биркгофа–Тамаркина $\arg(d_i-d_j)=\mathrm{const},\ i,j=\overline{1,n}$, то указанная задача сводится к спектральной задаче для некоторого оператора, близкого к самосопряженному, то есть представимого в виде относительно компактного возмущения самосопряженного оператора с дискретным спектром. Согласно известной теореме Келдыша [8] операторы, близкие к самосопряженным обладают свойством спектральной устойчивости: при малых возмущениях сохраняются и асимптотика спектра и полнота системы корневых векторов. Если оператор $T$ не близок к самосопряженному, то, как правило, спектрально неустойчив: резольвентная норма $\|(T-\lambda)^{-1}\|$ может быть большой и при $\lambda$, далеких от спектра (см. [3, 5, 9–14] и имеющиеся там ссылки). Поэтому в случае, когда $T$ – не близкий к самосопряженному дифференциальный оператор, для исследования спектра приходится накладывать на коэффициенты соответствующего дифференциального выражения дополнительное (гораздо более жесткое по сравнению с близким к самосопряженному случаем) условие голоморфности в некоторой окрестности соответствующего промежутка [13, 15–20]. Система (1) в случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

где $q$ – достаточно гладкая на отрезке $[0,1]$ функция, подстановкой Лиувилля сводится к оператору Штурма–Лиувилля на некоторой гладкой кривой $\gamma$ (точное определение будет дано ниже в п. 2). В работах [21, 22] одного из авторов показано, что спектр этого оператора локализуется около одного луча тогда и только тогда, когда потенциал допускает мероморфное продолжение в некоторую окрестность $\Omega$ кривой $\gamma$, удовлетворяющее условию тривиальной монодромии, то есть каждое решение уравнения

$$-y'' + qy = \lambda y,\ z \in \Omega, \tag{2}$$

при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ также мероморфно в области $\Omega$. Условие тривиальной монодромии хорошо известно [23]: уравнение (2) имеет тривиальную монодромию в области $\Omega$ тогда и только тогда, когда для любого полюса $a \in \Omega$ функции $q$ найдется ее окрестность $U$, такая, что

$$q(z) = \frac{m(m+1)}{(z-a)^2} + \sum_{k=0}^{m} c_k (z-a)^{2k} + (z-a)^{2m+1} r(z),\ z \in U\backslash\{a\}, \tag{3}$$

где $m \in \mathbb{N}, c_0 \dots, c_m$ – некоторые числа, функция $r$ голоморфна в $U$.

Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^N$ $(N \leq \infty)$ – множество точек $\Omega$, которые (при $N = \infty$) могут скапливаться только к границе $\Omega$. Далее пусть $M = \{m_k \in \mathbb{N},\ k = \overline{1, N}\}$. Обозначим через $TM(\Omega, A, M)$ множество функций, голоморфных в $\Omega \backslash A$ и удовлетворяющих в каждой точке $a_k$ условию (3) с $m = m_k$. То, что при конечном $N$ множество $TM(\Omega, A, M)$ не пусто, следует из результатов цитированной выше работы Дюйстермаата и Грюнбаума [23]: любой потенциал, полученный из произвольной голоморфной в области $\Omega$ функции с помощью конечного числа преобразований Дарбу (см. ниже п. 2.2 и [24]), принадлежит $TM(\Omega, A, M)$ при некоторых конечных $A, M$. В этой же работе показано, что при $\Omega = \mathbb{C}$ класс убывающих на бесконечности потенциалов с тривиальной монодромией совпадает с потенциалами, полученными из потенциала $q$ конечным числом преобразований Дарбу. В работе [25]) этот результат был распространен на класс рациональных потенциалов с квадратичным ростом на бесконечности. Но уже для рациональных потенциалов, растущих на бесконечности как $z^6$, результаты работ [23,25] оказались неверными [26]. Как отмечено в работе [26], задача описания классов $TM(\Omega, A, M)$ вряд ли выполнима. В связи с этим возникает вопрос: при каких $\Omega, A, M$ можно получить описание классов $TM(\Omega, A, M)$?

В предлагаемой статье получено полное описание $TM(\Omega, A, M)$ в случае произвольной односвязной области и произвольных конечных $A, M$. Оказалось, в случае конечных $A, M$ линейное (относительно обычного сложения) пространство $TM(\Omega, A, M)$ имеет конечную размерность по модулю [27, гл. IV, § 14, п. 6] подпространства $TM_0(\Omega, A, M)$ функций, голоморфных в $\Omega$ и имеющих в точках $a_k$ нуль $m_k$-го порядка (Теорема 3). Таким образом, при $N < \infty$ множество $TM(\Omega, A, M)$ допускает полное описание в терминах любого конечного набора функций – решений интерполяционной задачи с кратными узлами в $A$.

В случае, когда $N = \infty$, в общей ситуации получить такое же полное описание множества $TM(\Omega, A, M)$, по-видимому, невозможно. Чтобы получить какую-то информацию о $TM(\Omega, A, M)$, нужно накладывать дополнительные требования на поведение точек $a_k$ вблизи границы $\Omega$. Так, в предположении, что $A$ имеет единственную предельную точку, удается доказать существование достаточно широкого класса функций из $TM(\Omega, A, M)$ (Теорема 4).

## 2 Предварительные сведения

### 2.1 Оператор Штурма–Лиувилля на кривой

Пусть $\gamma$ – кривая с параметризацией $z(x) = x + is(x),\ x \in [0, 1]$, где функция $s$ непрерывно дифференцируема, $s'$ не убывает и $s(0) = s(1) = 0, s'(0) < 0 < s'(1)$. Обозначим $\alpha_0 = \operatorname{arctg} s'(0),\ \alpha_1 = \operatorname{arctg} s'(1)$. Тогда

$$-\pi/2 < \alpha_0 < 0 < \alpha_1 < \pi/2. \tag{4}$$

Пусть функция $y$ абсолютно непрерывна на кривой $\gamma$ (относительно меры $|dz|$). Функцию

$$y'_\gamma(z) := \lim_{\gamma \ni \zeta \to z} \frac{y(\zeta) - y(z)}{\zeta - z},$$

определенную почти всюду на $\gamma$, будем называть *производной вдоль* $\gamma$. Аналогично определяем $y''_\gamma(z)$ и т.д. (в предположении что эти объекты существуют). Всюду далее, если не возникает путаницы, значок $\gamma$ в $y^{(n)}_\gamma$ будем опускать.

**Определение 1** *Пусть $q \in L^1(\gamma)$. Оператором Штурма–Лиувилля на кривой $\gamma$ будем называть оператор $L_\gamma$, действующий в пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу*

$$\begin{aligned} D\left(L_\gamma\right) &= \{y \in L^2(\gamma):\ y' \in AC\left(\gamma\right), -y'' + qy \in L^2(\gamma),\ y(0) = y(1) = 0\}, \\ L_\gamma y &= -y'' + qy,\ y \in D\left(L_\gamma\right). \end{aligned}$$

Точно так же, как в случае $\gamma = [0,1]$ (см., например, [27, § 17, теорема 1]), доказывается, что оператор $L_\gamma$ плотно определен. Отсюда, поскольку спектр $L_\gamma$ дискретен [29, лемма 2], то оператор $L_\gamma$ замкнут. Используя условие (4), интегрированием по частям выражения

$$\int_\gamma (-y''(z) + qy(z))\overline{y(z)}dz$$

легко показать, что

a) оператор $L_\gamma$ – m-секториален [28, гл. V, § 3, п. 10],

b) за исключением конечного числа все собственные значения оператора $L_\gamma$ лежат в угле $-2\alpha_1 < \arg\lambda < -2\alpha_0$.

Приведем менее тривиальные факты о спектре оператора $L_\gamma$. Пусть $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ ($\mathrm{Re}\lambda_k \geq 0$) — собственные значения $L_\gamma$, пронумерованные в порядке возрастания их модулей с учетом их алгебраических кратностей.

**Теорема 1 ( [29])** *Если существует*

$$\lim_{k\to\infty} \arg(\lambda_k) = \alpha,$$

*то $\alpha = 0$ и справедлива асимптотическая формула*

$$\lambda_k \sim \pi k, \quad k \to \infty;$$

**Определение 2** *Пусть $n(r,\zeta,\theta)$ — число $\lambda_k$ в секторе $\{\mu : |\mu| < r, \zeta < \arg\mu < \theta\}$. Будем говорить, что спектр оператора $L_\gamma$ локализован около луча $\arg\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда функция*

$$\Delta(\theta) = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r, -\pi/2, \theta)}{r}$$

*имеет вид*

$$\Delta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in (-\pi/2, 0), \\ 1/\pi, & \theta \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

**Теорема 2 ( [22])** *Пусть функция $q$ суммируема на $\gamma$. Тогда для того, чтобы спектр оператора $L_\gamma$ был локализован около луча $\arg\lambda = 0$ необходимо и достаточно, чтобы*

(i) *функция $q$ допускала мероморфное продолжение с кривой $\gamma$ в область $\Omega$,*

(ii) *каждый полюс $q$ удовлетворял условию тривиальной монодромии (3).*

### 2.2 Преобразование Дарбу

Рассмотрим дифференциальное выражение $L_0 = -\partial^2 + q_0$, где $\partial = d/dz$, функция $q_0$ голоморфна в односвязной области $\Omega$. Если $f$ — некоторое решение уравнения Риккати $f' + f^2 = q_0 - \lambda_0$ при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, то выражение $L_0$ допускает факторизацию: $L_0 = Q^*Q + \lambda_0$, где $Q = -\partial + f,\ Q^* = \partial + f$. Положим $L_1 := QQ^* = -\partial^2 + q_1$, где

$$q_1 = q_0 - 2f' - \lambda_0. \tag{5}$$

Если $f = \varphi_0'/\varphi_0$, то $Q\varphi_0 = 0$, следовательно, $L_0\varphi = \lambda_0\varphi$. Выражение $L_1$ и соответствующий потенциал $D(q_0) := q_1 = q_0 - 2(\ln\varphi)'' - \lambda_0$ называют *преобразованием Дарбу* [24] выражения $L_0$ (соответственно потенциала $q_0$) на уровне $\varphi_0$. Поскольку для любого (голоморфного в $\Omega$) решения $\psi$ уравнения $L_0\psi = \mu\psi$ (мероморфная в $\Omega$) функция $\chi = Q\psi$ является решением уравнения $L_1 u = (\mu - \lambda_0)u$, то потенциал $q_1$ имеет тривиальную монодромию в $\Omega$. Ясно, что то же самое верно и для $D_n(q_0)$ — результата $n$ итераций преобразований Дарбу на некоторых уровнях $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$.

## 3 Построение потенциалов с тривиальной монодромией

### 3.1 Случай $N < \infty$

**Теорема 3** *Пусть $A = \{a_1, \dots, a_N\}, M = \{m_1, \dots, m_N\}$. Функция $q \in TM(\Omega, A, M)$ тогда и только тогда, когда для $q$ справедливо представление*

$$q(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k(m_k+1)}{(z-a_k)^2} + P_0(z) + P_1(z)r(z), \tag{6}$$

*где*

$$P_1(z) = \prod_{i=1}^{N} (z-a_i)^{2m_i}, \tag{7}$$

$$P_0(z) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_i} c_{ij}p_{ij}(z), \tag{8}$$

$$c_{ij} = \sum_{\nu\neq i, 1\le\nu\le N} \frac{(2j+1)!m_\nu(m_\nu+1)}{(a_i-a_\nu)^{2j+3}}. \tag{9}$$

*Здесь $r$ – произвольная функция, голоморфная в области $\Omega$, $p_{ij}$ – многочлены, удовлетворяющие условиям интерполяции*

$$p_{ij}^{(2s-1)}(a_k) = \delta_{ki}\delta_{sj},\ k, i = \overline{1, m}, s, j = \overline{1, m_k}, \tag{10}$$

*$\delta_{ij}$ – символы Кронекера.*

*Доказательство.* Пусть $A = \{a_k\}_1^N, M = \{m_k\}_1^N$. Согласно (3) функция $q \in TM(\Omega, A, M)$ тогда и только тогда, когда

$$q(z) = \tilde{q} + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k(m_k+1)}{(z-z_k)^2}, \tag{11}$$

где функция $\tilde{q}$ голоморфна в области $\Omega$ и должна удовлетворять условиям

$$\tilde{q}^{(2j-1)}(a_i) \;=\; c_{ij}, i=\overline{1,N}, j=\overline{1,m_i}. \tag{12}$$

Легко проверить, что равенства (3) и (11) равносильны равенствам (6) – (9), где $p_{ij}$ – голоморфные в области $\Omega$ функции, удовлетворяющие условиям (10). Покажем, что их можно взять в виде многочленов:

$$p_{ij} \;=\; \frac{(z-a_i)^{2j-1}}{(2j-1)!}\psi_i\chi_{ij}, \tag{13}$$

$$\psi_i \;=\; \frac{\prod\limits_{k\neq i}(z-a_k)^{2m_k}}{\prod\limits_{k\neq i}(a_i-a_k)^{2m_k}}, \tag{14}$$

$$\chi_{ij} \;=\; 1+\sum_{\nu=1}^{m_i-j} b_{ij\nu}\frac{(z-a_i)^{2\nu}}{(2\nu)!}, \tag{15}$$

где $b_{ij\nu}(i,j = \overline{1,N}, \nu = \overline{1,m_i-j}$ – некоторые числа. Независимо от этих чисел условия (10) при всех $i,k,j,s$, кроме $k=i, s=\overline{j+1,m_i}$, выполняются. Подставляя выражения (13) – (15) в (10) при каждом $i=\overline{1,N}, j=\overline{1,m_i}$, получим систему уравнений для чисел $b_{ij\nu}(\nu=\overline{1,m_i-j})$

$$\begin{array}{rcl}
 & b_{ij1} = & -\psi_i''(a_i), \\
b_{ij2} + & d_{ij2,m_i-j}b_{ij1} = & -\psi_i^{(4)}(a_i), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
b_{ij,m_i-j} + d_{ij,m_i-j,2}b_{ij,m_i-j-1} + \cdots + & d_{ij,m_i-j,m_i-j}b_{ij1} = & -\psi_i^{(2(m_i-j))}(a_i),
\end{array}$$

где

$$d_{ij\mu\nu}=\frac{(2\mu)!}{(2\nu)!(2(\mu-\nu)!}\psi^{(2\nu)}(a_i).$$

Эта система разрешима (ее матрица треугольная с определителем 1), откуда и следует утверждение теоремы.

### 3.2 Случай $n=\infty$

Пусть $A=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, M=\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и пусть $A$ имеет 1 предельную точку на границе области $\Omega$. Без ограничения общности можно считать, что эта точка 0. Далее, поскольку в области $\Omega'=\Omega\backslash\{|z|<\varepsilon\}$ функция $q$ имеет конечное число полюсов, то вид функции $q$ в $\Omega'$ описывается теоремой 3. Поэтому интерес представляет вид $q$ вблизи 0, следовательно, можно считать, что $\Omega=\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Пусть $a_k$ пронумерованы в порядке убывания модулей. Тогда при каждом $N\in\mathbb{N}$ имеет место формула вида (11), где $\tilde{q}=q_N$ голоморфна вне круга $\{|z|<|a_{N+1}\}$. Конечно, такое представление никакой информации о структуре функции $q$ не дает. Более того, отсюда вовсе не следует существование функции, удовлетворяющей условию тривиальной монодромии в бесконечном числе полюсов. Справедлива

**Теорема 4** *Для произвольной последовательности натуральных чисел* $\{m_k\}_1^\infty$ *и набора чисел* $\nu_{ij}(i = 1,2,\dots \quad j = -2,-1,\dots,m_i-1)$ *существует функция* $q$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

(a) $q$ *голоморфна в области* $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0,a_1,a_2,\dots\}$*;*

(b) $\forall\, i \in \mathbb{N}$*:*

$$q(z) = \sum_{s=-2}^{m_i-1} \nu_{is}(z-a_i)^s + O\left((z-a_i)^{m_i}\right), \quad z \to a_i. \tag{16}$$

*Доказательство.* Рассмотрим каноническое произведение

$$\begin{aligned} F(z) &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z_k}{z}\right)^{m_k} e^{P_k(z)},\ z \neq 0, \\ P_k(z) &= m_k\sum_{i=1}^{n_k}\frac{1}{i}\left(\frac{z_k}{z}\right)^i, \end{aligned}$$

где числа $n_k$ выбраны таким образом, чтобы бесконечное произведение сходилось равномерно в любом кольце $G_r = \{|z| \geq r > 0\}$. Ясно, что такой выбор существует. Например, можно взять $n_k = k$.

Очевидно, функция $F$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Вблизи $a_i$ функция $F$ имеет разложение:

$$F(z) = (z-a_i)^{m_i}\frac{b_i}{a_i^{m_i}}\left[1 + f_{i1}(z-a_i) + \dots + f_{i,m_i+1} + O\left((z-a_i)^{m_i+2}\right)\right], z \to a_i, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} b_i &= \prod_{k\neq i}\left(1-\frac{a_k}{a_i}\right)^{m_k} e^{P_k(a_i)},\ f_{ik} = \frac{f_i^{(k)}(a_i)}{k!}, \\ f_i(z) &= \frac{a_i^{m_i}}{b_i}\prod_{k\neq i}\left(1-\frac{z_k}{z}\right)^{m_k} e^{P_k(a_i)}. \end{aligned}$$

Функцию $q$ будем искать в виде

$$q(z) = F(z)U(z),$$

где

$$U(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{z_j^{m_j}}{b_j}\left(\frac{U_{j0}}{(z-z_j)^{m_j+2}} + \dots + \frac{U_{j,m_j+1}}{z-z_j} - Q_j(z)\right), \tag{18}$$

$Q_j(z)$ – многочлены относительно $\dfrac{1}{z}$, обеспечивающие сходимость ряда (18) в области $\Omega$.

Из (17) и (18) следует, что функция $q$ удовлетворяет условию (b) тогда и только тогда, когда числа $U_{i0}, \ldots, U_{i,m_i+1}$ – решения (треугольной) системы уравнений:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & U_{i0} & = & \nu_{i0}, \\ & & U_{i1} & + & f_{i2}U_{i0} & = & \nu_{i_1}, \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ U_{i,m_i+1} & + & f_{i1}U_{im_i} & + & \ldots \; +f_{im_i+1}U_{i0} & = & \nu_{im_i+1}, \end{array} \tag{19}$$

Решая систему (19), найдём $U_{ik},\ k = \overline{0,\ m_i+1}$.

Укажем теперь выбор $Q_j(z)$. Зафиксируем $r > 0$ и выберем $J_r \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|a_j| < \dfrac{r}{2}$ при $j \geq J_r$. Функция

$$U_j(z) = \sum_{k=0}^{m_j+1} \frac{U_{jk}}{(z-a_j)^{m_j+2-k}}$$

голоморфна в области $|z| > |a_j|$. Поэтому

$$U_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} u_{js} z^{-s},\ \ |z| > |a_j|. \tag{20}$$

В силу выбора $J_r$, при любом $j \geq J_r$ ряд (20) равномерно сходится в области $G_r = \{|z| \geq r\}$. Следовательно, для каждого $j \geq J_r$ найдётся натуральное число $n_j$, такое, что

$$\left| U_j(z) - \sum_{s=0}^{n_j} u_{js} z^{-s} \right| < \varepsilon_j \frac{|b_j|}{|a_j|^{m_j}}, \qquad z \in G_r, \tag{21}$$

где числа $\varepsilon_j$ выбраны так, что ряд $\sum \varepsilon_j$ сходится. Положим

$$Q_j(z) = \sum_{s=0}^{n_j} u_{js} z^{-s}.$$

Тогда ряд

$$W_r(z) = \sum_{j=J_r}^{\infty} \frac{z_j^{m_j}}{b_j} \left(U_j(z) - Q_j(z)\right)$$

сходится равномерно в области $G_r$. Теорема доказана.

## 4 Заключение

Рассмотрена задача описания класса потенциалов, мероморфных в односвязной области $\Omega$, удовлетворяющих условию тривиальной монодромии в области $\Omega$. Если $A = \{a_k \in \Omega,\ \ k = \overline{1,N}\}, M = \{m_k \in \mathbb{N},\ \ k = \overline{1,N}\}$ $(N \in \mathbb{N})$, то $TM(\Omega, A, M)$ – линейное (относительно обычного сложения) пространство потенциалов с множеством полюсов $A$, удовлетворяющих условию (3) в каждой точке $a_k$ с $m = m_k$, имеет конечную размерность по модулю подпространства $TM_0(\Omega, A)$ функций, голоморфных в $\Omega$ и имеющих в точках нули кратности $m_k$. Тем самым при конечном $A$ получено полное описание $TM(\Omega, A, M)$ в терминах любого конечного набора функций – решений интерполяционной задачи с кратными узлами в точках множества $A$. Полученный результат обобщает известные результаты Дюйстермаата, Грюнбаума [23], Обломкова [25] и Гиббонса, Веселова [?] о классах потенциалов с тривиальной монодромией на всей плоскости, исчезающих на бесконечности или имеющих степенной рост на бесконечности. В случае, когда множество $A$ счетно и имеет единственную предельную точку, построен достаточно широкий класс функций, удовлетворяющих условию тривиальной монодромии.

## 5 Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00002).

## References

[1] Lidskii, V.B., and Sadovnichii, V.A. "Regularized sums of zeros of a class of entire functions."*Funct. Anal. Its. Appl.* 1, no. 2 (1967): 133-139. https://doi.org/10.1007/BF01076085

[2] Lidskii, V.B., and Sadovnichii, V.A. "Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions." *Mathematics of the USSR-Sbornik* 4, no. 4 (1968): 519-527. https://doi.org/10.1070/SM1968v004n04ABEH002812

[3] Davies, E. Brian. "Eigenvalues of an elliptic system." *Math. Zeitschrift* 243 (2003): 719-743. https://doi.org/10.1007/s00209-002-0464-0

[4] Ishkin, Kh.K. "On localization of the spectrum of the problem with complex weight." *J. Math. Sci.* 150, no. 6 (2008): 2488-2499. https://doi.org/10.1007/s10958-008-0147-4

[5] Ishkin, Kh.K. "On the Birkhoff–Tamarkin–Langer Conditions and a Conjecture of Davies." *Doklady Mathematics* 91, no. 3 (2015): 259–262. https://doi.org/10.1134/S1064562415020040

[6] Birkhoff, George D. "On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential operations contain a parameter." *Trans. Amer. Math. Soc.* 9 (1908): 219-231. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1908-1500810-1

[7] Tamarkin, J. "Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of arbitrary function in the series of fundamental functions." *Mathematische Zeitschrift* 27, no. 1 (1928): 1-54. https://doi.org/10.1007/BF01171084

[8] Keldysh, M.V. "On the eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-self-adjoint equations." *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 77, no. 1 (1951): 11–14.

[9] Aslanyan, Anna, and Davies, E.Brian. "Spectral instability for some Schrodinger operators." *Numer. Math.* 72 (2000): 525-552. https://doi.org/10.1007/s002110000149

[10] Davies, E.Brian. "Wild spectral behaviour on anharmonic oscillators." *Bull. London Math. Soc.* 32, no. 4 (2000): 432-438. https://doi.org/ 10.1112/S0024609300007050

[11] Davies, E.Brian. "Non-self-adjoint differential operators." *Bull. London Math.Soc.* 34, no. 34 (2002): 513-532. https://doi.org/10.1112/S0024609302001248

[12] Hager, M. "Instabilite spectrale semiclassique d'operateurs." *Annales Henry Poincare* 7, no. 6 (2002): 1035-1064. https://doi.org/10.1007/s00023-006-0275-7

[13] Ishkin, Kh.K. "On the spectral instability of the Sturm–Liouville operator with a complex potential." *Differential equations* 45, no. 4 (2009): 494-509. https://doi.org/10.1134/S001226610904003X

[14] Ishkin, Kh.K. "A localization criterion for the eigenvalues of a spectrally unstable operator." *Doklady Mathematics* 80, no. 3 (2009): 829-832. https://doi.org/10.1134/S106456240906012X

[15] Davies, E.Brian. "Pseudo-spectra, the harmonic oscillator and complex resonances." *Proc. R. Soc. Lond.* 455 (1999): 585-599. https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0325

[16] Ishkin, Kh.K. "Conditions for localization of the limit spectrum of a model operator associated with the Orr– Sommerfeld equation." *Doklady Mathematics* 86, no. 1 (2012): 549-552. https://doi.org/10.1134/S1064562412040357

[17] Nedelec, L. "Pertubations of non-self-adjoint Sturm–Lioville problems with applications to harmonic oscillator." *Methodes and applications of analysis* 13, no. 1 (2006): 123-148. https://doi.org/10.4310/MAA.2006.v13.n1.a7

[18] Ishkin, Kh.K. "On analytic properties of Weyl function of Sturm–Liouville operator with a decaying complex potential." *Ufa mathematical journal* 5, no. 1 (2013): 36-55. https://doi.org/10.13108/2013-5-1-36

[19] Ishkin, Kh.K., and Rezbayev, A.V. "On the conditions for the existence of triangular transformation operator for a binomial differential equations." International Conference "Functional Analysis in Interdisciplinary Applications" (FAIA 2017), AIP Conference Proceedings (Astana, Okt. 02-05, 2017), 1880, eds. T. Kal'menov, M. Sadybekov, American Institute of Physics, Melville, NY, 2017, 060006. https://doi.org/10.1134/S1064562418020175

[20] Ishkin, Kh.K. "Conditions of Spectrum Localization for Operators not Close to Self-Adjoint Operators." *Doklady Mathematics* 97, no. 2, (2018): 170-173. https://doi.org/10.1134/S1064562418020175

[21] Ishkin, Kh.K. "On a Trivial Monodromy Criterion for the Sturm–Liouville equation." *Math. Notes* 94, no. 4 (2013): 508-523. https://doi.org/10.1134/S0001434613090216

[22] Ishkin, Kh.K. "A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve." *St. Petersburg Math. J.* 28, no. 1, (2017): 37-63. https://doi.org/10.1090/spmj/1438

[23] Duistermaat, J.J., and Grünbaum, F.A. "Differential equations in the spectral parameter." *Commun. Math. Phys.* 103 (1986): 177-240. https://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104114705

[24] Darboux,G. "Sur une proposition relative aux équations linéaires." *C. R. Acad. Sci. Paris* 94 (1882):1456-1459. https://arxiv.org:physics/9908003.

[25] Oblomkov, A.A. "Monodromy-free Schrödinger operators with quadratically increasing potentials."*Theor Math Phys* 121, no. 3 (1999): 1574-1584. https://doi.org/10.1007/BF02557204

[26] Gibbons,J., Veselov, A.P. "On the rational monodromy-free potentials with sextic growth." *J. Math. Phys.* 50, no 1 (2009): 013513. https://doi.org/10.1063/1.3001604

[27] Naimark, M.A. *Linear differential operators.* 2nd ed., revised and augmented, Nauka, Moscow, 1969; English transl., Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1968.

[28] Kato, Tosio. *Pertubation theory for linear operators.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. 1966.

[29] Ishkin, Kh.K. "Necessary Conditions for the Localization of the Spectrum of the Sturm–Liouville Problem on a Curve." *Math. Notes* 76, no. 1 (2005): 64-75. https://doi.org/10.1007/s11006-005-0100-5