

МРНТИ 27.35.63

Численный алгоритм решения задач электрического зондирования среды с рельефом земной поверхности

Мирғалиқызы Т., Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева,
г. Астана, Республика Казахстан, E-mail: m_t85@mail.ru

Муқанова Б.Г., Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева,
г. Астана, Республика Казахстан, E-mail: mbsha01@gmail.com

На сегодняшний день проблема влияния рельефа земной поверхности на распределение электрического поля является актуальным вопросом в интерпретации электромагнитных полей, изучаемых в электроразведке постоянным током. В работе рассматривается тестирование алгоритма численного решения задачи электрического зондирования среды с рельефом земной поверхности путем моделирования методом интегральных уравнений. Идея метода интегральных уравнений заключается в представлении электрического поля, как суммы первичного поля и поля вторичных зарядов. Контактные границы и поверхность геоэлектрического разреза выступают как вторичные возбудители электрического поля. Задача расчета полей сводится к системе интегральных уравнений на плотности вторичных источников, индуцируемых на поверхностях контакта проводящих сред и на рельефной поверхности среды. Математическое описание этого явления приводит к уравнениям Фредгольма II рода с полярным ядром. Алгоритм расчета протестирован путем сравнения результатов с решениями, приведенными в работах в открытом доступе по учету влияния рельефа, задавая такие же параметры среды. Выполнены сравнения полученными разными подходами конечно-элементных и конечно-разностных методов для учета влияния рельефа в 2D средах. Также выполнены сравнения полученными данными физического моделирования. Можно сказать, что выполненные нами результаты расчетов кривых кажущихся сопротивлений находятся в хорошем согласии с имеющимися исследованиями в этой области.

Ключевые слова: метод интегральных уравнений, численный алгоритм, прямая задача электроразведки, рельеф земной поверхности.

Жер беті бедері бар орта үшін электрлік барлау есебін шешуге арналған сандық алгоритм

Мирғалиқызы Т., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ.,
Қазақстан Республикасы, E-mail: m_t85@mail.ru

Муқанова Б.Г., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ.,
Қазақстан Республикасы, E-mail: mbsha01@gmail.com

Электр өрісінің таралуына жер беті бедерінің әсері тұрақты тоқпен электр барлауы арқылы зерттелетін электромагнитті өрістерді сипаттауда қазыргы уақытта өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Бұл жұмыста интегралдық теңдеулер әдісімен модельдеу жолымен жер беті бедері бар ортаны электрлік зондтау есебін сандық шешудің алгоритмін тестілеу қарастырылады. Интегралды теңдеулер әдісінің идеясы электр өрісін алғашқы өріс пен екіншілік зарядтар өрісінің қосындысы ретінде қарастыру болып табылады. Жанасу шекаралары және геоэлектрлік қима беті электр өрісінің екіншілік қоздырғышы болып табылады. өрістерді есептеу есебі өткізгіш орталар беттері мен бедерлі жер беті шекарасында индукцияланатын екіншілік тоқ көздерінің тығыздығы бойынша құрылатын интегралдық теңдеулер жүйесіне негізделеді. Бұл құбылыстың математикалық сипатталуы полярлық ядросы бар II түрдегі Фредгольм теңдеулеріне алып келеді. Есептеу алгоритмі нәтижелерді жер бедерінің әсерін есепке алу бойынша ашық қол жетімді жұмыстарда келтірілген шешімдермен салыстыру жолымен, ортаның дәл сондай параметрлерін бере отырып, тестілеу өткізілді. 2D орталардағы жер беті бедерінің әсерін есепке алу үшін ақтық-элементтік және ақтық-айырымдық әдістер арқылы, әр түрлі тәсілмен алынған салыстыру орындалды.

Сонымен қатар физикалық модельдеудің алынған мәліметтерімен салыстыру жүргізілді. Біз орындаған жорамал кедергінің қисықтарын есептеулер нәтижелері осы саладағы зерттеулермен жақсы үйлесім табады деп айтуға болады.

Түйін сөздер: интегралдық теңдеулер әдісі, сандық алгоритм, электрлік барлаудың тура есебі, жер беті бедері.

Numerical algorithm for solving of electrical prospecting problems for medium with a surface relief

Mirgalikzy T., L.N. Gumilyov Eurasian national university, Astana, Republic of Kazakhstan,
E-mail: m_t85@mail.ru

Mukanova B.G., L.N. Gumilyov Eurasian national university, Astana, Republic of Kazakhstan,
E-mail: mbsha01@gmail.com

Nowadays the problem of the influence of the ground surface relief on the distribution of the electric field is a pressing issue in the interpretation of electromagnetic fields studied in the direct current electrical prospecting. The paper deals with testing the algorithm for the numerical solution of the problem of electrical sensing of a medium with the ground surface relief by means of modeling using integral equations. The idea of the method of integral equations is to represent the electric field as the sum of the primary field and the field of the secondary charges. The contact boundaries and the surface of the geoelectric section act as a secondary creators of the electric field. The problem of calculating the fields is reduced to the systems of integral equations on the density of secondary sources induced on the contact surfaces of conducting media and on the relief surface of the medium. A mathematical description of this phenomenon leads to Fredholm equations of the second kind with a polar core. The calculation algorithm was tested by comparing the results with the solutions given in the open access works on taking into account the influence of the relief, setting the same environmental parameters. Comparisons are made using the finite-element and finite-difference methods obtained by different approaches to take into account the effect of relief in 2D environments. Comparisons are also made with the physical modeling data obtained. We can say that our results of calculations curves of apparent resistivity are in good agreement with the available research in this area.

Key words: method of integral equations, numerical algorithm, direct problem of electrical prospecting, surface relief.

1 Введение

Настоящее время характеризуется бурным развитием геофизических методов для решения разнообразных задач поиска и разведки объектов, расположенных в сложной горизонтально-неоднородной вмещающей среде. В частности в последнее время получил развитие и внедрение такой метод как электротомография. Электротомография - это современная методика геофизических исследований методом сопротивлений [1]. Практическая реализация электротомографических исследований потребовало создания специализированных аппаратных систем, а также развитых программных средств для обработки данных и осуществления инверсии.

В задачах вертикального электрического зондирования важное значение имеет расчет влияния условий эксперимента на кривые зондирования, в частности, рельефа зондируемой поверхности. В настоящее время построение геоэлектрического разреза на основе измерений кажущегося сопротивления проводится с помощью программ 2D и 3D инверсии. Эти программы выполняют решение обратной задачи (например, Res2DInv, М.Н.Локе и ZondRes2D, А.Е.Каминский) [2],[3]. В большинстве случаев имеющиеся резкие геоэлектрические границы получаются размытыми, а искажения кривых кажущегося сопротивления, связанные с рельефом поверхности, генерируют

ложные аномалии. В этих условиях двумерная инверсия не является идеальным способом перехода от электрического поля к реальному геоэлектрическому разрезу. Другим источником ошибок является то обстоятельство, что до сих пор не существует программ, которые с высокой точностью количественно учитывают влияние искажений, связанных с рельефом земной поверхности. Обработка данных на основе существующих программ двумерной инверсии показывает, что вблизи отклонений поверхности среды от плоскости образуются фиктивные аномалии геоэлектрического разреза [4].

Задача в условиях сложного рельефа земной поверхности в настоящее время полностью не решена. Имеются лишь отдельные результаты, полученные на физических моделях среды и расчетные данные, полученные в приближении однородного внешнего поля и для узко специальных типов рельефа [5],[6].

Данная работа является продолжением исследований авторов на эту тему [7],[8]. Новизна нашего подхода заключается в том, что моделирование проводится на основе численного решения системы интегральных уравнений. Характерной особенностью разработанных нами алгоритмов является, то, что они позволяют выполнять расчеты для более разнообразных форм рельефов, включая формы, определяемые из натуральных экспериментов.

2 Обзор литературы

В связи с большой важностью проблемы учета влияния рельефа земной поверхности изучение влияния рельефа на данные методов постоянного тока предпринималось достаточно давно. К ним можно отнести работы Запорожец В.М. 1938 [9], Чантуришвили Л.С. 1959 [10], Вешев А.В. 1959, 1980 [11],[5]. В настоящее время основными математическими методами, используемыми на практике при решении прямых и обратных задач, являются сеточные методы (конечных разностей и конечных элементов) [12]-[17]. В рамках этих методов разработано несколько способов учета влияния рельефа [18]-[25].

В методе конечных разностей широко используется алгоритм геометрической трансформации ячеек сетки адаптированной к рельефу земной поверхности [18]. Второй алгоритм в методе конечных разностей основан на триангуляции расчетной области, где элементы сетки формируются путем дополнения диагоналей в прямоугольных клетках, обеспечивая гибкость дизайна модели [19]-[20]. Также и в методе конечных элементов существует ряд алгоритмов учета влияния рельефа земной поверхности [21]-[24]. Один из алгоритмов схожий с первым из описанных для конечных разностей - адаптированная к рельефу трансформация ячеек сетки. Другой алгоритм основан в построении специальной нерегулярной сети в зависимости от формы рельефа [25],[26] и степени неоднородности исследуемой среды.

Все указанные способы расчета основаны на единой общей идее и физическом принципе. Универсальность, гибкость и ряд вычислительных преимуществ сеточных методов определили их широкое распространение во многих сферах применения численного моделирования, и, в том числе, в методах постоянного тока. Однако при задании модели с рельефом в большинстве из них конфигурация ячеек сетки, так или иначе, повторяет конфигурацию рельефа. Это может вносить ошибки в решение как прямых, так и, главное, обратных задач. Поэтому для контроля работы сеточных

методов целесообразно применять другие методы, основанные на других идеях и также позволяющие решать соответствующие прямые задачи метода сопротивления. В рамках настоящей работы был выбран метод интегральных уравнений, имеющий простой физический смысл и хорошо зарекомендовавший себя при проведении моделирования в методе сопротивлений [27]-[32].

3 Материал и методы

Математическая модель и численный алгоритм

Метод интегральных уравнений основан на теории потенциала для решений уравнения Лапласа [33]. Как показано в [7], задача расчета поля постоянного тока в однородной среде с рельефом дневной поверхности сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром со слабой особенностью:

$$q(P) = \iint_{\Gamma} q(M) \frac{\cos\psi_{PM}}{|\vec{PM}|^2} d(M) + F_0(P) \quad (1)$$

Здесь M, P - точки поверхности среды Γ , по которой берется интеграл, $q(P)$ - плотность простого слоя на границе Γ , через которую в дальнейшем рассчитывается потенциал поля, угол ψ_{PM} - угол между направлением нормали к поверхности в точке P и вектором PM , $F_0(P)$ - заданная функция.

Численная реализация метода интегральных уравнений выполнена с использованием метода радиальных базисных функций (RBF) для аппроксимации произвольного рельефа поверхности и адаптивной сетки с учетом геометрии измерительной установки [34].

Далее описывается пошаговый алгоритм численного решения интегральных уравнений с использованием метода RBF.

1 Описание модели среды.

Описывается исследуемая среда: длина измерительной линий, количество и высоты приемных электродов относительно питающего электрода, длина приемной линии, сила тока питающего электрода.

2 Составление и выбор функции RBF аппроксимирующей рельеф дневной поверхности:

- Для заданного набора точек плоскости Oxy $\{x_i\}$ ($i = \overline{1, n}$) и соответствующих значений $\{f_i\}_{i=1}^n$ строится интерполирующая функция $s(x, y)$ двух переменных.

- Определение радиальной базисной функции. Выполняется выбор подходящей радиальной функций, подбирая требуемую гладкость формы поверхности для решения задачи [34].

- Строится матрица по формуле $A_{i,j} = \phi(\|x_i - x_j\|)$, ($i, j = \overline{1, n}$).

- Методом LU -разложения с выбором главного элемента решается система $A\lambda = f$. Коэффициенты λ_i составляют вектор решения. Чтобы вычислить значение интерполируемой функции в точке (x, y) используется формула $s(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|(x, y) - x_i\|)$, где ϕ - радиальные функции.

3 Построение адаптивной сетки, с учетом геометрии измерительной установки.

Строится сетка с триангуляцией для разбиения границы на ячейки, аппроксимирующие вторичные источники тока с учетом особенностей нашей сетки – послойное расположение треугольников и логарифмическое расширение сетки при удалении от оси расчетной области. Для расчета кажущегося сопротивления и потенциала поля в качестве расчетной области используется область в форме овала. Овал образуется двумя полукругами и прямоугольником между ними. Ось, соединяющая центры окружностей, соответствует положению измерительной линии, одна из центров окружностей - положению питающего электрода. Определяются параметры каждой ячейки: номер узла, координаты геометрического центра, площадь:

- Верхняя и нижняя части овала делятся на заданное количество слоев (например на N) по правилу концентрических полуокружностей (полуовалов) радиуса $r_i = \exp(i * hs - 1) / \alpha$, i - номер концентрического полуовала, $hs = \ln(1 + a * \alpha) / N$ - шаг сетки по радиусу в логарифмических преобразованных координатах, α - коэффициент неравномерности сетки. Каждый слой разбивается на треугольники, начиная с первого слоя.

- Каждый слой разбивается на треугольники, начиная с первого слоя. Определяется массив $uz(i, j)$, где $i = 0, \dots, N$ - номер слоя, на верхней границе которого лежит узел, j - номер узла на этом слое. Массиву узлов по координатно присваиваются значения. После выполняется триангуляция: заводится динамический массив tr типа «треугольник» для верхней части овала и $tr1$ - для нижней части овала, которые в качестве вершины треугольника содержат номера узлов, образующих эту вершину.

- Вычисление площади ячеек проводилось по формулам аналитической геометрии, на основе определителя построенного по декартовым координатам узлов ячеек.

4 Составление матрицы коэффициентов взаимного влияния.

5 Решение системы линейных алгебраических уравнений и определение плотности вторичных источников тока.

6 Расчет потенциалов на поверхности.

7 Расчет функций кажущегося сопротивления вдоль поверхности.

4 Результаты и обсуждение

Выполнено тестирование численных результатов путем сравнения их с результатами приведенными в работах по учету влияния рельефа, задавая такие же параметры среды.

В трудах Erhan Erdogan и Ismail Demirci (2008, 2012 гг.) для учета влияния рельефа в 2D средах описываются разные подходы использования конечно-элементных (FE) и конечно-разностных (FD) методов [19], [20]. В отличие от других исследователей, которые также используют прямое решение FD, они использовали треугольные элементы, которые формируются путем дополнения диагоналей в прямоугольных клетках, обеспечивая гибкость дизайна модели, который обычно доступен только при использовании метода FE. Авторы добавляют рельеф в прямую задачу, с использованием трех подходов, основанных на методе FE:

1 Присвоили значения с высоким удельным сопротивлением (представляющий часть воздуха) ко всем треугольным элементам, которые представляют собой клетки границы воздух/земля. Этот FE полный воздушный (full-air) подход (рисунок 1а) представляет собой рельефную границу в лестничной форме.

2 Используя преимущество, полученное путем применения треугольных элементов, моделировали рельефную границу там, где она пересекала прямоугольные ячейки и присвоили значения с высоким удельным сопротивлением к треугольным элементам на границе ячеек воздуха/земля. Это половинно воздушный (half-air) подход FE представляет собой более плавный и точный рельефный край (рисунок 1b).

3 Равномерно искривляли FE сетки по отношению к геометрии поверхности, чтобы имитировать эффект рельефа (Holcombe и Jiracek, 1984; Loke, 2000). Такой подход называется FE искривление сетки (FE distorted - mesh) (рисунок 1c).

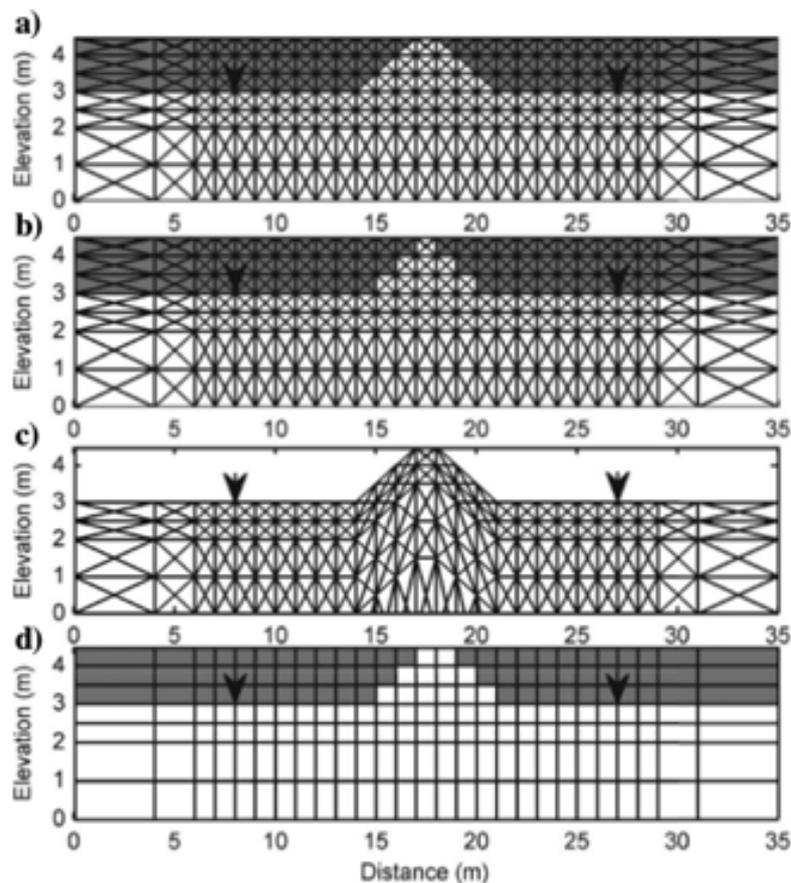


Рисунок 1: Схема 2D моделирования сетки, которые включают рельеф: (a) FE full-air, (b) FE half-air и FD half-air, (c) FE distorted-mesh, и (d) FD full-air

Сетка FD состоит из прямоугольных ячеек и не может быть реорганизован; рельеф можно моделировать только с помощью ячеек поверхностных сопротивлений, которые представляют воздействие воздуха в методе FD. Первый подход, который они использовали для имитации рельефа, присвоили значения с высоким удельным сопротивлением ко всем прямоугольным ячейкам на границе воздух-земля и назвали его FD полный воздушный (full - air) подход (рисунок 1d). После этого использовали формулировку Вивера (Weaver 1994) и разделили прямоугольные ячейки в треугольные элементы (рисунок 2), используя ту же сетку, что и в методе FE на рисунок 1b и назвали

его FD половинно воздушный (half - air) подход.

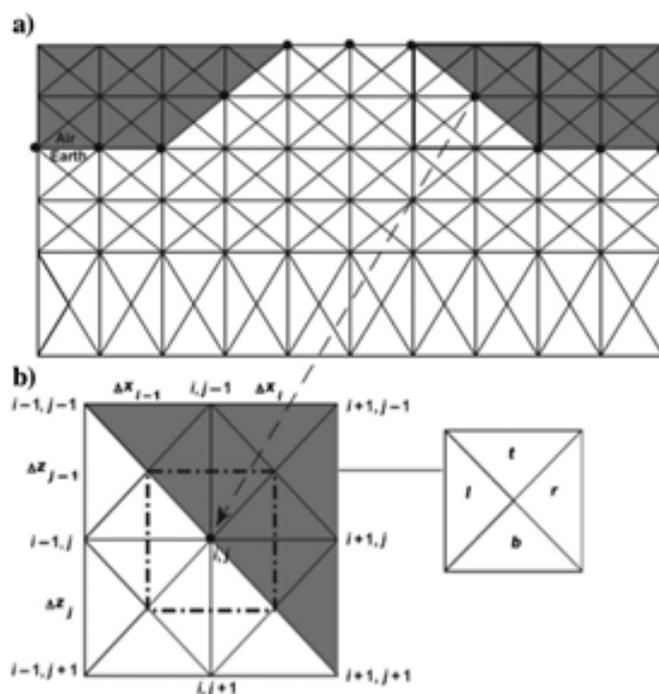


Рисунок 2: (a) FD half-air сетка. Каждая ячейка подразделяется на четыре элемента триангуляции. (b) Дискретизация ячеек FD триангуляции между интерфейсом воздух-земля

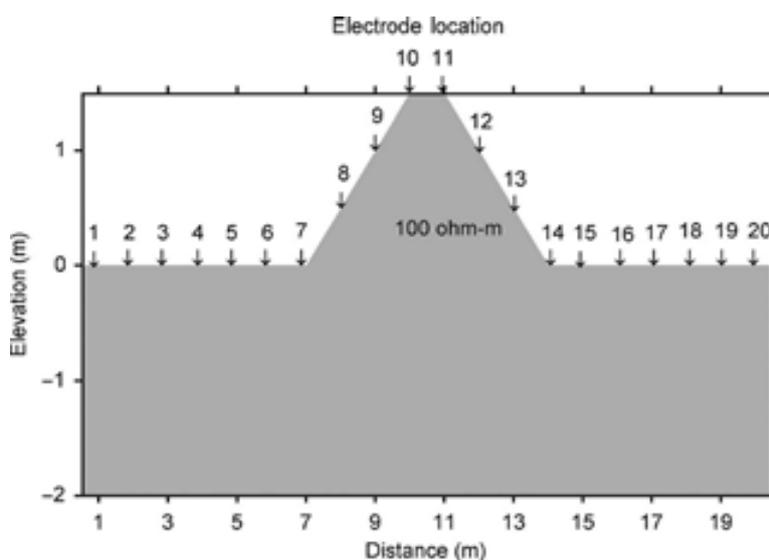


Рисунок 3: Однородная модель холма с углом уклона, равным 30°

В работе приводятся результаты моделирования на рельефной поверхности для

однородной среды с удельным сопротивлением 100 Ом.м. Рельеф поверхности - на 30° отклоненный холм (рисунок 3). Результаты моделирования для установки Веннер-Шлюмберже для всех подходов приведены на рисунке 4. Во всех решениях в центральном районе можно увидеть аномалию низкого кажущегося сопротивления в нижней области холма.

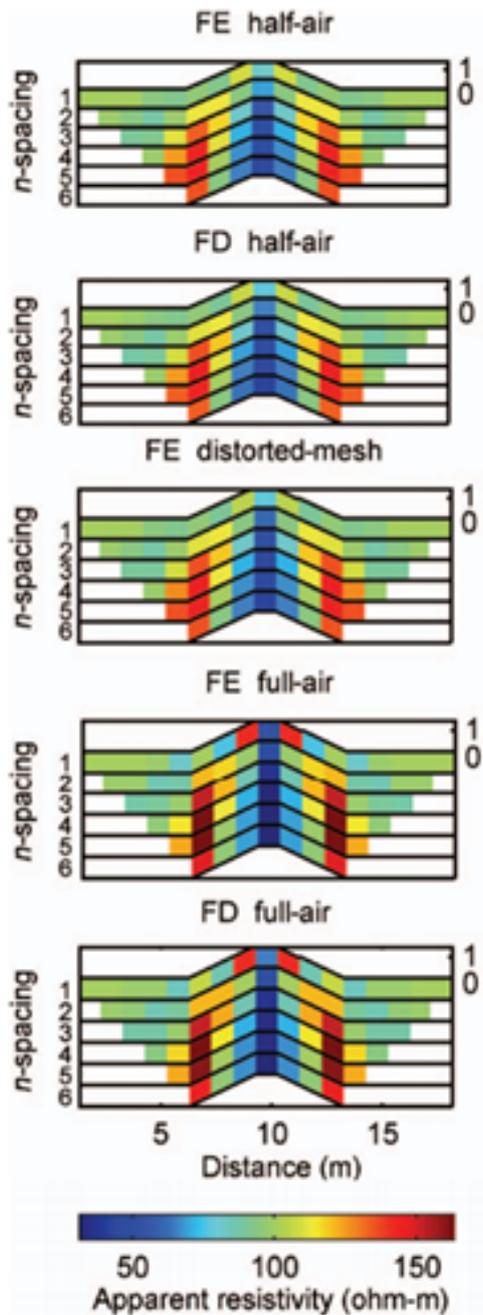


Рисунок 4: Псевдоразрез кажущегося сопротивления однородной модели холма, с углом уклона 30°

Результаты полученные нашим методом для описанной модели представлены на рисунке 5. По мере приближения к угловой точке наблюдается повышение и резкое увеличение значения кажущегося сопротивления, а вершина отмечается минимумом кажущегося сопротивления. Затем в окрестности следующей угловой точки также наблюдается повышение ρ_k . В дальнейшем происходит плавное уменьшение и приближение к удельному сопротивлению среды. Такое поведение кажущегося сопротивления можно увидеть на каждой картинке полученных разными подходами методов FE и FD.

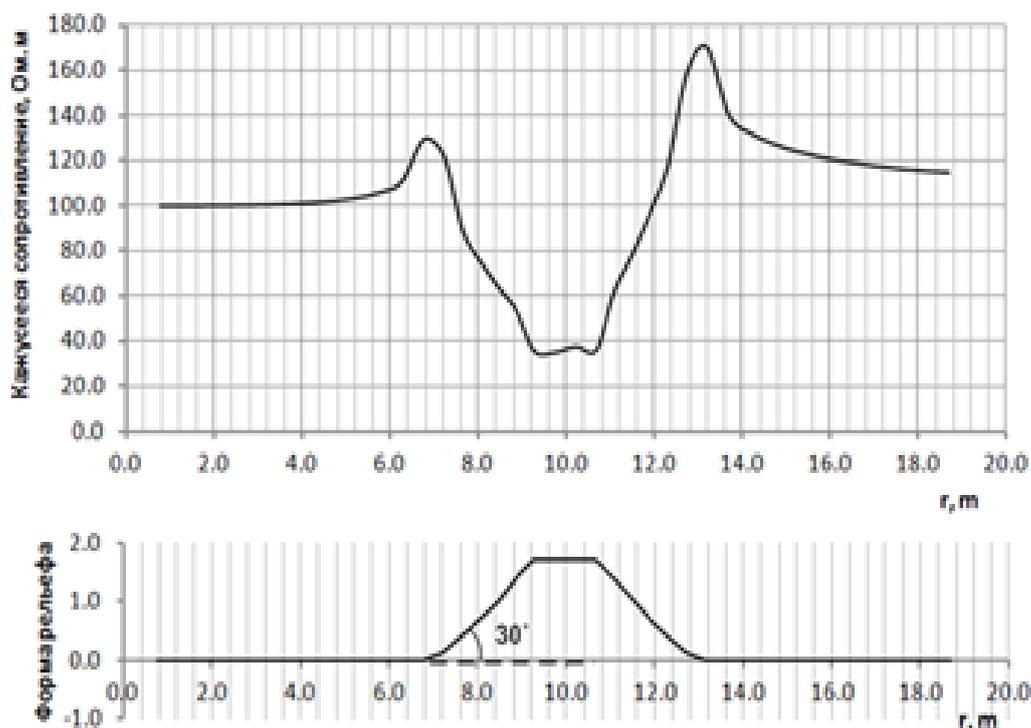


Рисунок 5: Кажущиеся сопротивления, полученные методом интегральных уравнений и форма рельефа для однородной модели холма, угол наклона 30°

Такие результаты встречаются также в работах R.C. Fox, G.W. Hohmann 1978, I.Tsourlos, E.Szymanski и др. 1999, QIANG Jian-Ke и др. 2007, Sedat Yilmaz, Nart Coşkun 2011, Sebastien Penz и др. 2013.

Дополнительное сравнение результатов программы выполнено полученными данными физического моделирования, представленных в работе Вешева А.В. [11]. Например, на рисунке 6, скопированном со статьи Вешева А.В. построены кажущиеся сопротивления для разных параметров установки для однородной модели полусферической выемки. На рисунке 7 построен график кажущегося сопротивления, полученный применяемым нами методом интегральных уравнений для данной модели. Можно сказать, результаты практически совпадают, имеющиеся незначительные отклонения, связаны с разными геометрическими параметрами установки.

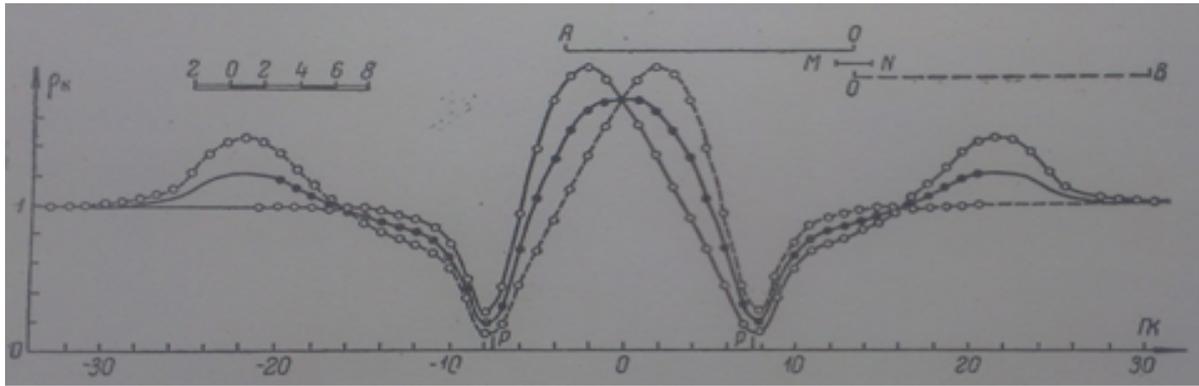


Рисунок 6: Результаты физического моделирования Вешева А.В. для модели полусферической выемки

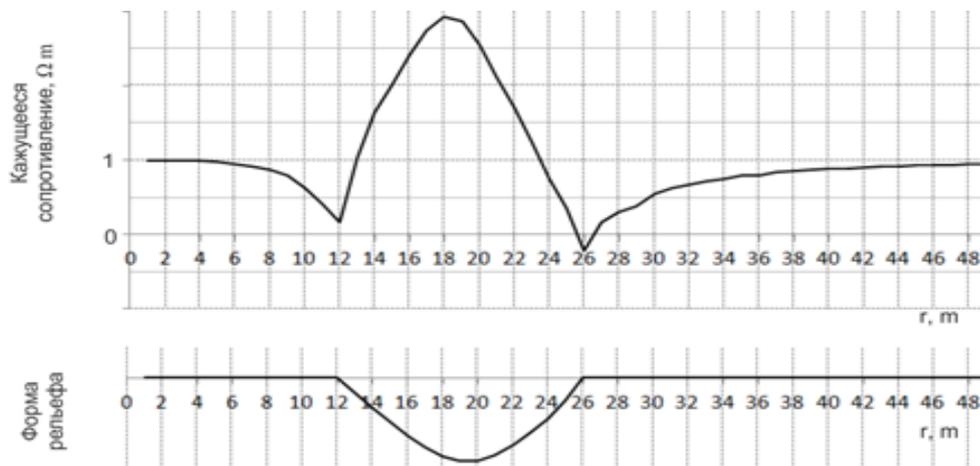


Рисунок 7: Результаты, полученные методом интегральных уравнений для однородной модели полусферической выемки

5 Заключение

Разработан численный алгоритм решения задач электрического зондирования, который позволил построить функцию кажущегося сопротивления, с учетом основных закономерностей формирования электрического поля, связанных с влиянием рельефа. Выполнено тестирование численных результатов, сравнивая с результатами, приведенными в работах в открытом доступе по учету влияния рельефа, задавая такие же параметры среды. Выполнены сравнения полученными разными подходами конечно-элементных и конечно-разностных методов для учета влияния рельефа в 2D средах для заданной модели с рельефной поверхностью. Также выполнены сравнения полученными данными физического моделирования, представленных в работе Вешева А.В. Можно сказать, что результаты совпадают, но есть незначительные отклонения, связанные с разными параметрами геометрической установки. Выполненные нами

результаты расчетов кривых кажущихся сопротивлений находятся в хорошем согласии с имеющимися исследованиями в этой области. Однако, разработанные нами программы позволяют выполнять расчеты для более разнообразных форм рельефов, включая также формы, определяемые из натуральных экспериментов. Дальнейшие исследования будут связаны с расчетом эффекта влияния рельефа, взятого из натуральных экспериментов и для усложненных моделей сред. Конечная цель данного исследования – это задача исключения из результатов интерпретации ложных аномалий, связанных с рельефом.

Список литературы

- [1] Шевнин В.А. Электроразведка: Пособие по электроразведочной практике для студентов геофизических специальностей. – М.: МГУ, 2013. – Том II. – 124 с.
- [2] Loke M.H., Barker R.D. Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion // Geophysical Prospecting. – 1996. – Vol. 44. – P. 499-523.
- [3] Gunther T., Rucker C. Boundless Electrical Resistivity Tomography // BERT 2 - the user tutorial. – 2013. – Ver. 2.0.
- [4] Баранчук К.И., Миргалыкызы Т., Модин И.Н., Муканова Б.Г. Физическое моделирование электрической томографии на поверхности со сложным рельефом // Инженерные изыскания. – Москва, 2017. – №11. – С.56-65.
- [5] Вешев А.В. Электропрофилирование на постоянном и переменном токе. – Л.: Недра, 1980. – 2-е изд.
- [6] Бобачев А.А. Решение прямых и обратных задач электроразведки методом сопротивлений для сложно-построенных сред: Диссертация на соискание ученой степени физико-математических наук. – Москва, 2003. – 95 с.
- [7] Mirgalikyzy T., Mukanova B., Modin I. Method of Integral Equations for the Problem of Electrical Tomography in a Medium with Ground Surface Relief // Journal of Applied Mathematic. – Volume 2015.
- [8] Balgaisha Mukanova, Tolqyn Mirgalikyzy and Dilyara Rakisheva Modelling the Influence of Ground Surface Relief on Electric Sounding Curves Using the Integral Equations Method // Mathematical Problems in Engineering. – Volume 2017.
- [9] Запорожец В.М. Влияние рельефа на результаты замеров сопротивления (по работам С. Г. Комарова и Л.П. Горбенко) // Элкгр. – 1938. – № 4(12).
- [10] Чантуришвили Л.С. О количественном учете влияния рельефа для некоторых случаев разведки постоянным током // Труды Института геофизики. – Тбилиси, 1955. – Т. 14. – С. 199-209.
- [11] Вешев А.В. Влияние рельефа на результаты работ комбинированным электропрофилированием // Ученые записки ЛГУ. – 1959. – №278.
- [12] Loke M.H., Barker R.D. Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudo sections using a quasi-Newton method // Geophysical Prospecting. – 1996. – Vol. 44, no. 1. – P. 131-152.
- [13] Coggon J.H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method // Geophysics. – 1971. – Vol. 36, no. 1. – P. 132-155.
- [14] Mufti I.R. Finite-difference modeling for arbitrary-shaped two dimensional structures // Geophysics. – 1976. – Vol. 41, no. 1. – P. 62-78.
- [15] Pelton W.H., Rijo L., Swift C.M. Inversion of two dimensional resistivity and Induced Polarization data // Geophysics. – 1978. – Vol. 43, no. 4. – P. 788-803.
- [16] Dey A., Morrison H.F. Resistivity modeling for arbitrary shaped two-dimensional structures // Geophysical Prospecting. – 1979. – Vol. 27, no. 1. – P. 106-136.
- [17] Loke M.H., Barker R.D. Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections // Geophysics. – 1995. – Vol. 60, no. 6. – P. 1682-1690.
- [18] Loke M.H. Topographic modelling in resistivity imaging inversion // Extended Abstracts of 62nd EAGE Conference and Technical Exhibition. – Glasgow, Scotland, 2000.

- [19] *Erdogan E., Demirci I., Candasayar M.E.* Incorporating topography into 2D resistivity modeling using finite-element and finite-difference approaches // *Geophysics*. – 2008. – vol. 73. – no. 3. – P. 135-142.
- [20] *Demirci I., Erdogan E., Candasayar M.E.* Two-dimensional inversion of direct current resistivity data incorporating topography by using finite difference techniques with triangle cells: Investigation of Kera fault zone in western Crete // *Geophysics*. – 2012. – Vol. 77, no. 1. – P. 67-75.
- [21] *Penz S., Chauris H., Donno D., Mehl C.* Resistivity modeling with topography // *Geophys. J. Int.* – 2013. – Vol. 194, no. 3. – P. 1486-1497.
- [22] *Fox R.C., Hohmann G.W., Killpack T.J., Rijo L.* Topographic effects in resistivity and induced-polarization surveys // *Geophysics*. – 1980. – Vol. 45, no. 1. – P. 75-93.
- [23] *Tsourlos P.I., Szymanski J.E., Tsokas G.N.* The effect of topography on commonly used resistivity arrays // *Geophysics*. – 1999. – Vol. 64, no. 5. – P. 1357-1363.
- [24] *Plattner A.D.* Adaptive wavelet methods for geoelectric modeling and inversion: Dissertation. - Basel, 2011.
- [25] *Gunther T., Rucker C., Spitzer K.* Three-dimensional modelling and inversion of dc resistivity data incorporating topography - I. Modelling // *Geophys. J. Int.* – 2006. – Vol. 166. – P. 495-505.
- [26] *Gunther T., Rucker C.* Boundless Electrical Resistivity Tomography // BERT 2 - the user tutorial. – 2013. – Ver. 2.0.
- [27] *Альпин Л.М.* Источники поля в теории электрической разведки // *Прикладная геофизика*. – М.,1947. - Вып. 3. – С. 56-200.
- [28] *Dieter K., Paterson N.R and Grant F.S.* KP and resistivity type awes for three- dimensional bodies // *Geophysics*. - 1969. - 34. - P. 615-632.
- [29] *Hohmann G.W.* Three dimensional induced polarization and electromagnetic modeling // *Geophysics*. - 1975. - 40. - P. 309-324.
- [30] *Eloranta E.* A method for calculation mise-a-la-masse anomalies in the case of high conductivity contrast by the integral equation technique // *Geoexploration*. - 1984. - 22. - P. 77-88.
- [31] *Schenkel C.J.* The Electrical Resistivity Method in Cased Boreholes: Phodissertation. Published as report LBL-31139 / Lawrence Berkeley National Laboratory. - Berkeley, California, 1991.
- [32] *Orunkhanov M., Mukanova B.* The integral equations method in problems of electrical sounding // In book: *Advances in High Performance Computing and Computational Sciences*, Springer-Berlin-Heidelberg. – 2006. – P.15-21.
- [33] *Орунханов М.К., Муканова Б.Г., Сарбасова Б.К.* Численная реализация метода потенциалов в задаче зондирования над наклонным пластом // *Вычислительные технологии, Специальный выпуск: труды Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям*. – Новосибирск, 2004. – Т. 9. – С.45-48.
- [34] *Ракишева Д.С., Миргаликызы Т., Муканова Б.Г.* Аппроксимация поверхности рельефа дневной поверхности методом RBF // *Вестник Национальной академии наук Республики Казахстан*. - 2017. - Vol. 1, Number 365. - С.210-215.

References

- [1] *Shevvin V.A.* "Elektrorazvedka. Posobie po ehlektrozazvedochnoj praktike dlya studentov geofizicheskikh spetsial'nostej [Electrical prospecting. Manual on electrical exploration practice for students of geophysical specialties] Moscow, (2013), 124.
- [2] *Loke M.H., Barker R.D.* "Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion." *Geophysical Prospecting* 44 (1996): 499-523.
- [3] *Gunther T., Rucker C.* Boundless Electrical Resistivity Tomography. BERT 2 - the user tutorial(2013).
- [4] *Baranchuk K.I., Mirgalikyzy T., Modin I.N., Mukanova B.G.* "Fizicheskoe modelirovanie ehlektricheskoy tomografii na poverkhnosti so slozhnym rel'efom [Physical modeling of electrical tomography on the surface with a complex relief]." *Engineering Surveys* 11 (2017): 56-65.

- [5] *Veshev A.V.* "Elektroprofilirovanie na postoyannom i peremennom toke [Electrical profiling on direct and alternating current]."2 (1980).
- [6] *Bobachev A.A.* "Reshenie pryamykh i obratnykh zadach elektrorazvedki metodom soprotivlenij dlya slozhno-postroennykh sred [The solution of direct and inverse problems of electrical prospecting by the method of resistance for complex-built environments]"(Thesis for the degree of physical and mathematical sciences, MSU, 2003).
- [7] *Mirgalikyzy T., Mukanova B., Modin I.* "Method of Integral Equations for the Problem of Electrical Tomography in a Medium with Ground Surface Relief."Journal of Applied Mathematic(2015).
- [8] *Balgaisha Mukanova, Tolkyz Mirgalikyzy and Dilyara Rakisheva* "Modelling the Influence of Ground Surface Relief on Electric Sounding Curves Using the Integral Equations Method."Mathematical Problems in Engineering (2017).
- [9] *Zaporozhets V.M.* "Vliyanie rel'efa na rezul'taty zamerov soprotivleniya (po rabotam S. G. Komarova i L.P. Gorbenko) [The influence of the relief on the results of resistance measurements]."Elkgr 4 (12)(1938).
- [10] *Chanturishvili L.S.* "O kolichestvennom uchete vliyaniya rel'efa dlya nekotorykh sluchaev razvedki postoyannym tokom [On the quantitative account of the influence of the relief for some cases of direct current intelligence]."Proceedings of the Institute of Geophysics 14(1955): 199-209.
- [11] *Veshev A.V.* "Vliyanie rel'efa na rezul'taty rabot kombinirovannym ehlektroprofilirovaniem [Influence of relief on the results of work by combined electric profiling]."Scientific notes of Leningrad State University 278 (1959).
- [12] *Loke M.H., Barker R.D.* "Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudo sections using a quasi-Newton method."Geophysical Prospecting 44(1)(1996): 131-152.
- [13] *Coggon J.H.* "Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method."Geophysics 36(1) 1971: 132-155.
- [14] *Mufti I.R.* "Finite-difference modeling for arbitrary-shaped two dimensional structures."Geophysics 41(1)(1976): 62-78.
- [15] *Pelton W.H., Rijo L., Swift C.M.* "Inversion of two dimensional resistivity and Induced Polarization data."Geophysics 43(4) (1978): 788-803.
- [16] *Dey A., Morrison H.F.* "Resistivity modeling for arbitrary shaped two-dimensional structures."Geophysical Prospecting 27(1) (1979): 106-136.
- [17] *Loke M.H., Barker R.D.* "Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections."Geophysics 60(6) (1995): 1682-1690.
- [18] *Loke M.H.* "Topographic modelling in resistivity imaging inversion."62nd EAGE Conference and Technical Exhibition, Extended Abstracts (2000).
- [19] *Erdogan E., Demirci I., Candasayar M.E.* "Incorporating topography into 2D resistivity modeling using finite-element and finite-difference approaches."Geophysics 73(3) (2008): 135-142.
- [20] *Demirci I., Erdogan E., Candasayar M.E.* "Two-dimensional inversion of direct current resistivity data incorporating topography by using finite difference techniques with triangle cells: Investigation of Kera fault zone in western Crete."Geophysics 77(1) (2012): 67-75.
- [21] *Penz S., Chauris H., Donno D., Mehl C.* "Resistivity modeling with topography."Geophys. J. Int. 194(3) (2013): 1486-1497.
- [22] *Fox R.C., Hohmann G.W., Killpack T.J., Rijo L.* "Topographic effects in resistivity and induced-polarization surveys."Geophysics 45(1) (1980): 75-93.
- [23] *Tsourlos P.I., Szymanski J.E., Tsokas G.N.* "The effect of topography on commonly used resistivity arrays."Geophysics 64(5) (1999): 1357-1363.
- [24] *Plattner A.D.* "Adaptive wavelet methods for geoelectric modeling and inversion"(Dissertation, 2011).
- [25] *Gunther T., Rucker C., Spitzer K.* "Three-dimensional modelling and inversion of dc resistivity data incorporating topography - I. Modellingn."Geophys. J. Int. 166 (2006): 495-505.
- [26] *Gunther T., Rucker C.* "Boundless Electrical Resistivity Tomography."BERT 2 - the user tutorial (2013).
- [27] *Alpin L.M.* "Istochniki polya v teorii ehlektricheskoy razvedki [Sources of field in the theory of electrical intelligence]."Applied Geophysics 3 (1947): 56-200.

- [28] *Dieter K., Paterson N.R and Grant F.S.* "KP and resistivity type awes for three-dimensional bodies." *Geophysics* 34 (1969): 615-632.
- [29] *Hohmann G.W.* "Three dimensional induced polarization and electromagnetic modeling." *Geophysics* 40 (1975): 309-324.
- [30] *Eloranta E.* "A method for calculation mise-a-la-masse anomalies in the case of high conductivity contrast by the integral equation technique." *Geoexploration* 22 (1984): 77-88.
- [31] *Schenkel C.J.* "The Electrical Resistivity Method in Cased Boreholes" (Phodissertation, University of California, 1991).
- [32] *Orunkhanov M., Mukanova B.* "The integral equations method in problems of electrical sounding." *Advances in High Performance Computing and Computational Sciences* (2006): P.15-21.
- [33] *Orunkhanov M.K., Mukanova B.G., Sarbasova B.K.* "CHislennaya realizatsiya metoda potensialov v zadache zondirovaniya nad naklonnym plastom [Numerical implementation of the method of potentials in the problem of probing over an inclined stratum]." *Special Issue Proceedings of the Meeting of the Russian-Kazakhstan working group on computational and information technologies* 9 (2004): 45-48.
- [34] *Rakisheva D. S., Mirgalikyzy T., Mukanova B. G.* "Approksimatsiya poverkhnosti rel'efa dnevnoj poverkhnosti metodom RBF [Approximation of the surface relief of the day surface by the RBF method]." *Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan* 1(365) (2017): 210-215.