1-бөлім Раздел 1 Section 1

Математика Математика Mathematics

МРНТИ 27.29.17, 27.29.23

Исследование абсолютной устойчивости многомерных регулируемых систем. Проблема Айзермана

Айсагалиев С.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77272211573,E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Аязбаева А.М., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия регулируемых систем со многими нелинейностями. Путем неособого преобразования уравнение движения регулируемой системы приводится к специальному виду, что позволяет представить нелинейности как функции от фазовых переменных. Для систем с ограниченными ресурсами получены оценки фазовых переменных и тождеств вдоль решения системы. Найдены оценки несобственных интегралов и сформулированы условия абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы. Рассматривается возможность существования сектора, где проблема Айзермана имеет решение для регулируемых систем с ограниченными ресурсами. Следует отметить, что частотное условие абсолютной устойчивости В.М. Попова для систем со многими нелинейностями не имеет геометрическую интерпретацию, как в случае одномерных, и их проверка является сложной задачей. Поэтому разработка нового метода исследования абсолютной устойчивости регулируемых систем актуальна. Отличительной особенностью предлагаемого метода исследования абсолютной устойчивости от известных методов состоит в том, что условия абсолютной устойчивости получены без привлечения функции Ляпунова и частотной теоремы В.А. Якубовича.

Ключевые слова: Абсолютная устойчивость, неособое преобразование, свойства решений, несобственные интегралы, проблема Айзермана, секторы абсолютной устойчивости.

Көпөлшемді басқарылатын жүйелердің абсолютті орнықтылығын зерттеу. Айзерман есебі

Айсағалиев С.Ә., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Аязбаева А.М., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

Көптеген сызықты емес функциялары бар басқарылатын жүйелердің тепе-теңдік жағдайының абсолютті орнықтылығын зерттеудің жаңа әдісі ұсынылады. Ерекше емес түрлендіру жолымен басқарылатын жүйенің қозғалыс теңдеуі сызықты емес функцияларды фазалық айнымалылардан алынған функциялар түрінде сипаттауға мүмкіндік беретін арнайы түрге келтіріледі. Ресурстары шектеуле жүйелер үшін жүйе шешімі бойында теңдіктер мен фазалық айнымалылардың бағасы алынған. Жүйенің конструктивті параметрлері кеңістігінде абсолютті орнықтылықтың шарттары құрылып және меншіксіз интегралдардың бағалары алынған. Ресурстары шектеулі басқарылатын жүйелер үшін Айзерман есебінің шешімі бар болатындай сектордың бар болуының мүмкіндігі қарастырылады. Көптеген сызықты емес функциялары бар жүйелер үшін В.М. Поповтың абсолютті орнықтылығының жиіліктік шарттарының геометриялық интерпретациясы бірөлшемді жағдай үшін де болмайтынын ескерген жөн және оларды тексеру күрделі есеп болып табылады. Сондықтан басқарылатын жүйелердің абсолютті орнықтылығын зерттеудің жаңа әдісін құру актуалды. Абсолютті орнықтылықты зерттеудің ұсынылған әдісінің басқа белгілі әдістерден басты ерекшелігі абсолютті орнықтылық шарттары В.А. Якубовичтің жиіліктік теоремалары мен Ляпунов функциясын қолданбай-ақ алуға болады.

Түйін сөздер: Абсолютті орнықтылық, ерекше емес түрлендіру, шешімдердің қасиеттері, меншіксіз интегралдар, Айзерман есебі, абсолютті орнықтылықтың секторлары.

Investigation on absolute stability of multidimensional regulated systems. Aizerman problem

Aisagaliev S.A., Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Ayazbayeva A.M., Al-Farabi Kazakh National University, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

A new method for investigating on absolute stability of the equilibrium position of regular systems with many nonlinearities is supposed. The motion equation of the regular system is reduced to a special kind by nonsingular transformation which allows to present the nonlinearities as functions of phase variables. Estimations of the phase variables and identities along solution of the system are obtained for systems with limited resources. Estimations of the improper integrals are found and conditions of the absolute stability in the space of constructive parameters of the system are formulated. Possibility of the sector existence is considered, where Aizerman problem has solution for regular systems with limited resources. It should be noted, that frequency condition of the V.M.Popov absolute stability for systems with many nonlinearities has not any geometrical interpretation, as in the one-dimensional case, and its verify is difficult problem. Therefore development of the new method for investigation on absolute stability of regular systems is topical. Distinctive feature of the supposed method of investigation on absolute stability from known methods is that the conditions of the absolute stability are obtained without using Lyapunov function and frequency theorem of V.A. Yakubovich.
Keywords: Absolute stability, nonsingular transformation, properties of the solutions, improper integrals, Aizerman problem, absolute stability sectors.

1 Введение

Рассматривается уравнение движения регулируемых систем следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A, $|x_0| < \infty$, $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m))$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

Функция

$$\begin{gathered}\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) | 0 \leq \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \leq \\ \leq \mu_{0i}\sigma_i^2, \ \forall\sigma_i, \ \sigma_i \in R^1, \ \varphi(0) = 0, \ \ |\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*, \ \forall\sigma, \ \sigma \in R^m, \ 0 < \varphi_* < \infty\},\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m}) > 0$ – диагональная матрица порядка $m \times m$, $|\cdot|$ – евклидова норма, $\varphi_* = const > 0$, $(*)$ – знак транспонирования. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами и для таких систем вектор функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (2).

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Если матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $x_* = 0$.

Заметим, что положению равновесия соответствует тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2). В статье, исследуется асимптотическая устойчивость в целом невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ при любом $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Полагаем, что при достаточно малой окрестности точки $\sigma = \sigma_* = 0$, функцию $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ можно аппроксимировать линейной функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $0 <$

$\mu_i \le \mu_{0i}$, $i = \overline{1,m}$. Следовательно, при $|\sigma| < \delta$, $\delta > 0$ – достаточно малое число, уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x, \;\; x(0) = x_0, \;\; |x_0| < \infty, \;\; t \in I,$$

где $A_1(\mu) = A + B\mu S$, $0 < \mu_i \le \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $\overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – предельное значение, μ_i, $i = \overline{1,m}$ определяемое из гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$.

Если матрица $A_1(\mu)$, $0 < \mu_i \le \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – гурвицева, то существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $|x(t)| < \varepsilon_1$ при $|x_0| < \delta_1$, более того, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Таким образом, когда матрица $A_1(\mu)$, где $0 < \mu_i \le \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – гурвицева, то тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$.

Определение 1 *Тривиальное решение* $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ *системы* (1), (2) *называется абсолютно устойчивым, если: 1) матрицы* A, $A_1(\mu)$ *– гурвицевы, где* $0 < \mu_i \le \mu_{0i} < \overline{\mu}_{0i}$, $\mu = diag(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})$; *2) для всех* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *– решение дифференциального уравнения* (1) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0$, $|x_0| < \infty$.

Иными словами, тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если оно асимптотически устойчиво в целом для любого $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Определение 2 *Условиями абсолютной устойчивости системы* (1), (2) *называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы* (A, B, S, μ_0), *при выполнении которых положение равновесия* $x_* = 0$ *абсолютно устойчиво.*

Задача 1 *Найти условие абсолютной устойчивости положения равновесия системы* (1), (2).

Функция $\sigma(t) = Sx(t)$, $t \in I$ является управлением сформированное по принципу обратной связи, а матрица S порядка $m \times n$ называется матрицей обратной связи. Проблема Айзермана состоит в том, что как выбрать матрицу обратной связи S, чтобы из асимптотической устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ линейной системы $\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x$ для любого μ, $0 \le \mu \le \overline{\mu}_0 - \varepsilon$, $\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ следует абсолютная устойчивость тривиального решения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2), где $\overline{\mu}_0$ – предельное значение гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$, $\varepsilon_i >$ – сколь угодно малые числа.

Определение 3 *Будем считать, что в секторе* $[0, \mu_0]$ *проблема Айзермана имеет решение, если: 1) существует матрица обратной связи* S *такая, что* $\mu_0 = \overline{\mu}_0 - \varepsilon$, *где* $\overline{\mu}_0$ *– предельное значение гурвицевости матрицы* $A_1(\mu)$, $\varepsilon > 0$ *– сколь угодно малое число; 2) для любого* $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $0 \le \mu \le \mu_0 \le \overline{\mu}_0 - \varepsilon$ *– решение системы* (1) *асимптотически устойчиво; 3) для любого* $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_0$ *тривиальное решение системы* (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Задача 2 *Найти сектор* $[0, \mu_0]$, *где проблема Айзермана имеет решение.*

2 Обзор литературы

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критическом случаях посвящено много работ. Среди них следует отметить монографии (Айзерман, 1963), (Лурье, 1951), (Попов, 1970), (Гелиг, 1978). Существует два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье (Лурье, 1951) и метод В.М. Попова (Попов, 1970). Связь между этими методами установлена в работах В.А. Якубовича и его учеников (Гелиг, 1978). Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей" . В конечном счете метод А.И. Лурье приводит к проверке разрешимости матричных неравенств. Естественно, довольно сложно применить такой подход для решения прикладных задач из-за неопределенности выбора произвольных постоянных в условиях абсолютной устойчивости.

Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси (Айсагалиев, 1969 : 38-48), (Айсагалиев, 1970 : 83-94).

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему (Айзерман М.А., 1949 : 186-188): пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1)/0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0\sigma^2,\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Айзермана была решена для систем второго порядка И.Г. Малкиным, Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема (Kalman, 1957 : 553-556): Пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu x$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1)/0 \leq \dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_0,\ \ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Калмана имеет положительные решение при $n = 2$.

Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая $n > 2$. В работе (Брагин, 2011 : 3-36) предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

В работах (Айсагалиев, 1994 : 748-757), (Айсагалиев, 2000), (Айсагалиев, 2012), (Aisagaliev, 2013 : 159-175) приведены результаты новых исследований абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований для систем со многими нелинейностями.

Постановка задачи и оценки несобственных интегралов приведены в (Айсагалиев, 2017 : 3-20). Ниже приведены продолжение исследований из (Айсагалиев, 2017 : 3-20).

3 Материал и методы

Статья посвящена решению актуальных проблем многомерных нелинейных регулируемых систем. Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику нелинейных регулируемых систем, правая часть которых содержит нелинейные функции из заданного множества. Такая неопределенность правой части порождает неединственность решения, что приводит к необходимости исследования групповых свойств решений системы. Одним из таких свойств является абсолютная устойчивость тривиального решения, т.е. свойств, при котором все решения, исходящие из любой начальной точки при любых нелинейных функциях из заданного множества, стремятся с течением времени к положению равновесия.

Предлагается совершенно новый метод исследования абсолютной устойчивости многомерных нелинейных регулируемых систем без привлечения каких-либо функций Ляпунова и частотных теорем, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

3.1 Вспомогательные леммы

Как следует из теоремы 3 приведенной в работе (Айсагалиев, 2017 : 3-20) несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_1 = \int\limits_0^\infty \varphi^*(\sigma(t))\tau_1\dot\sigma(t)dt = \int\limits_0^\infty [\dot Y_1^*(t)\tau_1 D_1 \dot Y_1(t) + \dot Y_1^*(t) L_1 Y_1(t) + \\ +\dot Y_1^*(t) M Y_2(t) + W_{11}(y(t))]dt = \sum_{i=1}^m \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i} d\sigma_i = \bar c_1 < \infty, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$L_i = \tau_1 D_2 C_3 - D_1^*\tau_1 C_1, \quad M_1 = \tau_1 D_2 C_4 - D_1^*\tau_1 C_2, \quad \tau_1 = diag(\tau_1 1, \dots, \tau_{1m}),$$

$$\varphi(\sigma(t)) = \dot Y_1(t) - C_1 Y_1(t) - C_2 Y_2(t), \quad \sigma(t) = D_1 Y_1(t) + D_2 Y_2(t),$$

$$\dot Y_1(t) = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) + \varphi(\sigma(t)), \quad \dot Y_2(t) = C_2 Y_1(t) + C_4 Y_2(t),$$

$$Y_1(t) = (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad Y_2(t) = (y_{m+1}(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in I = [0, \infty),$$

$$\begin{aligned} W_{11}(y) = Y_1^*(t)[-C_1^*\tau_1 D_2 C_3]Y_1(t) + Y_1^*(t)[-C_3^* D_2^*\tau_1 C_2 - C_1^*\tau_1 D_2 C_4]Y_2(t) + \\ +Y_2^*(t)[-C_3^*\tau_1 D_2 C_4]Y_2(t), \quad t \in I, \quad y = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n) = (Y_1(t), Y_2(t)). \end{aligned}$$

Лемма 1 *Пусть выполнены условия леммы 3 из (Айсагалиев, 2017 : 3-20). Тогда несобственный интеграл*

$$I_1 = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t)\tau_1 D_1 \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) L_1 Y_1(t) + W_1(y(t))]dt + l_1 = \bar{c}_1 < \infty, \tag{4}$$

где

$$l_1 = Y_1^*(t) M_1 Y_2(t)\Big|_0^\infty, \quad |l_1| < \infty, \tag{5}$$

$$W_1(y) = W_{11}(y) - Y_1^*(t) M_1 [C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)], \ \ t \in I. \tag{6}$$

Доказательство. Произведение

$$\dot{Y}_1^*(t) M_1 Y_2(t) = \frac{d}{dt}[Y_1^*(t) M_1 Y_2(t)] - Y_1^*(t) M_1 \dot{Y}_2^*(t), \ \ t \in I,$$

где $\dot{Y}_2(t) = C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)$, $t \in I$. Теперь несобственный интеграл (3) запишется в виде (4), где

$$l_1 = Y_1^*(t) M_1 Y_2(t)\Big|_0^\infty, \quad |l_1| < \infty,$$

в силу ограниченности функции $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $t \in I$. Лемма доказана.

Как показано в (Айсагалиев, 2017 : 3-20) из теоремы 4 следует, что несобственный интеграл

$$I_2 = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t)\tau_2 \mu_0^{-1} \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) L_2 Y_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) M_2 Y_2(t) + W_{21}(y)]dt \le 0, \tag{7}$$

где $L_2 = -2\tau_2\mu_0^{-1}C_1 - \tau_2 D_1$, $M_2 = -2\tau_2\mu_0^{-1}C_2 - \tau_2 D_2$, $W_{21}(y) = W_{21}(Y_1, Y_2) = Y_1^*(C_1^*\tau_2\mu_0^{-1}\times$ $\times C_1 + C_1^*\tau_2 D_1)Y_1 + Y_1^*(2C_1^*\tau_2\mu_0^{-1}C_2 + D_1^*\tau_2 C_2 + C_1^*\tau_2 D_2)Y_2 + Y_2^*(C_2^*\tau_2\mu_0^{-1}C_2 + C_2^*\tau_2 D_2)Y_2$, $Y_1 = Y_1(t)$, $Y_2 = Y_2(t)$, $t \in I$.

Лемма 2 *Пусть выполнены условия леммы 4 из (Айсагалиев, 2017 : 3-20). Тогда несобственный интеграл*

$$I_2 = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t)\tau_2 \mu_0^{-1} \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) L_2 Y_1(t) + W_2(y(t))]dt + l_2 \le 0, \tag{8}$$

где

$$l_2 = Y_1^*(t) M_1 Y_2(t)\Big|_0^\infty, \quad |l_2| < \infty, \tag{9}$$

$$W_2(y) = W_{21}(y) - Y_1^*(t) M_2 [C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)], \ \ t \in I. \tag{10}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия леммы 6 из (Айсагалиев, 2017 : 3-20). Тогда несобственный интеграл*

$$I_3 = -\int\limits_0^\infty [\alpha\dot{Y}_1(t) + \beta Y_1(t) + \gamma Y_2(t)]^*[\alpha\dot{Y}_1(t) + \beta Y_1(t) + \gamma Y_2(t)]dt = \\ = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t)(-\alpha^*\alpha)\dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t)L_3^*Y_1(t) + W_3(y(t))]dt + l_3 \le 0, \quad |l_3| < \infty; \tag{11}$$

где

$$l_3 = Y_1^*(t)M_3Y_2(t)\Big|_0^\infty, \quad |l_3| < \infty, \quad M_3 = -2\alpha^*\gamma, \tag{12}$$

$$W_3(y) = -Y_1^*(t)\beta^*\beta Y_1(t) - 2Y_1^*(t)\beta^*\gamma Y_2(t) - Y_2^*(t)\gamma^*\gamma Y_2(t) - \\ Y_1^*(t)(-2\alpha^*\gamma)[C_3Y_1(t) + C_4Y_2(t)], \quad t \in I, \tag{13}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in R^m, \ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in R^m, \ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in R^{n-m}, \ L_3 = -2\alpha^*\beta.$$

Как следует из леммы 7 (см. (Айсагалиев, 2017 : 3-20)) несобственный интеграл

$$I_4 = \int\limits_0^\infty W_4(y(t))dt = \frac{1}{2}Y_2^*(t)\Gamma Y_2(t)\Big|_0^\infty < \infty, \tag{14}$$

где

$$W_4(y) = Y_2(t)\Gamma C_3Y_1(t) + Y_2(t)\Gamma C_4Y_2(t), \quad t \in I, \tag{15}$$

$\Gamma = \Gamma^*$ – матрица порядка $(n-m) \times (n-m)$.

3.2 Абсолютная устойчивость

На основе результатов изложенных в (Айсагалиев, 2017 : 3-20) об оценке несобственных интегралов, а также леммы 1 – 3 приведенных выше могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Теорема 1 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрицы* A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \mu_0 < \overline{\mu_0}$ *– гурвицевы, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, *и пусть, кроме того:*

1) диагональные матрицы $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m})$, $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) > 0$ *порядков* $m \times m$, $m \times m$ *соответственно, матрица* $\Gamma = \Gamma^*$ *порядка* $(n-m) \times (n-m)$, *и векторы* $\alpha \in R^m$, $\beta \in R^m$, $\gamma \in R^{n-m}$ *такие, что*

$$\frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^*\tau_1) + \tau_2\mu_0^{-1} - \alpha^*\alpha \ge 0, \quad L = L_1 + L_2 + L_3 = L^*; \tag{16}$$

2) квадратичная форма $T(y) = \dfrac{1}{2}[W(y) + W^*(y)] > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $y \neq 0$, $T(0) = 0$, *где* $W(y) = \sum\limits_{i=1}^{4} W_i(y)$, $W_i(y)$, $i = \overline{1,4}$ *определяются формулами* (6), (10), (13), (15).

Тогда положение равновесия системы (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Доказательство. Как следует из формул (4), (7), (11), (14) несобственные интегралы $I_1 = \bar{c}_1 < \infty$, $I_2 \leq 0$, $I_3 \leq 0$, $I_4 < \infty$. Тогда несобственный интеграл

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \int\limits_0^\infty \{\dot{Y}_1^*(t)[\frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) + \tau_2 \mu_0^{-1} - \alpha^* \alpha]\dot{Y}_1^*(t) + \\ + \dot{Y}_1^*(L_1 + L_2 + L_3)Y_1(t) + \sum_{i=1}^{4} W_i(y(t))\}dt + l_1 + l_2 + l_3 \leq \bar{c}_1 + l_4 < \infty, \tag{17}$$

где $|\bar{c}_1| < \infty$, $l_4 = \dfrac{1}{2} Y_2^*(t) \Gamma Y_2(t)\Big|_0^\infty < \infty$, $|l_1| < \infty$, $|l_2| < \infty$, $|l_3| < \infty$.

Из (17), с учетом (16), получим

$$\int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t) L Y_1(t) + \sum_{i=1}^{4} W_i(y)]dt \leq \bar{c}_1 + l_4 - l_1 - l_2 - l_3 \leq \\ \leq |\bar{c}_1| + |l_4| + |l_1| + |l_2| + |l_3| < \infty. \tag{18}$$

По условию теоремы матрица $L = L^*$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty \dot{Y}_1^*(t) L Y_1(t) dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[Y_1^*(t) L Y_1(t)]dt = l_5 =$$

$$= \frac{1}{2} Y_1^*(t) L Y_1(t)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2} Y_1^*(\infty) L Y_1(\infty) - \frac{1}{2} Y_1^*(0) L Y_1(0) < \infty,$$

в силу ограниченности функции $Y_1(t)$, $t \in I$. Теперь из (18) следует, что

$$\int\limits_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{4} W_i(y(t))\right] dt \leq |\bar{c}_1| + |l_1| + |l_2| + |l_3| + |l_4| + |l_5| < \infty. \tag{19}$$

Как следует из формул (6), (10), (18), (15) функция

$$W(y) = \sum_{i=1}^{4} W_i(y) = Y_1^* \Lambda_1 Y_1 + Y_1^* \Lambda_2 Y_2 + Y_2^* \Lambda_3 Y_2 = y^* \Lambda y,$$

где

$$\Lambda_1 = -C_1^* \tau_1 D_2 C_3 - M_1 C_3 + C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_1 + C_1^* \tau_2 D_1 - M_2 C_3 - \beta^* \beta + 2\alpha^* \gamma C_3;$$

$$\Lambda_2 = -C_3^* D_2^* \tau_1 C_2 - C_1^* \tau_1 D_2 C_4 - M_1 C_4 + 2C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2 +$$

$$+ D_1^* \tau_2 C_2 + C_1^* \tau_2 C_2 + C_1^* \tau_2 D_2 - M_2 C_4 - 2\beta^* \gamma + 2\alpha^* \gamma C_4 + C_3^* \Gamma;$$

$$\Lambda_3 = -C_3 \tau_1 D_2 C_4 + C_2^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2 + C_2^* \tau_2 D_2 - \gamma^* \gamma + \Gamma C_4;$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \frac{1}{2}\Lambda_2 \\ \frac{1}{2}\Lambda_2^* & \Lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда несобственный интеграл (19) запишется в виде

$$\int\limits_0^\infty W(y)dt = \int\limits_0^\infty y^*(t)\Lambda y(t)dt = \int\limits_0^\infty \frac{1}{2}[W(y) + W^*(y)]dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty T(y(t))dt = \int\limits_0^\infty y^*(t)[\frac{1}{2}\Lambda + \frac{1}{2}\Lambda^*]y(t)dt < \infty.$$

По условию теоремы $T(y) = y^*(\frac{1}{2}\Lambda + \frac{1}{2}\Lambda^*)y > 0$, $y \neq 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $T(0) = 0$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2 из (Айсагалиев, 2017 : 3-20), где $|y(t)| \leq c_2$, $|\dot{y}_3| \leq c_3, \forall t, t \in I$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Поскольку $x(t) = K^{-1}y(t), t \in I$, по $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Итак, выполнены все условия приведенные в определении 1 об абсолютной устойчивости тривиального решения системы (1), (2). Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрицы* A, $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \overline{\mu_0}$ *– гурвицевы, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, *и пусть, кроме того:*

1) существует матрица $\omega = \omega^* > 0$ *порядка* $m \times m$, *такая, что* $\pi - \xi\omega^{-1}\xi^* \geq 0$, *где* $\pi = \frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) + \tau_2 \mu_0^{-1} - \alpha^* \alpha$, $\xi = \frac{1}{2}(-L_1 + L_2 + L_3)$;

2) квадратичная форма $T_1(y) = T(y) - Y_1^* \omega Y_1 > 0$, $\forall y$, $y \neq 0$, $y \in R^n$, $T_1(0) = 0$, $Y_1 = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Доказательство. Как следует из формулы (17)

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \int\limits_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t)\pi \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t)\xi Y_1(t) + Y_1^* \xi^* \dot{Y}_1 + Y_1^* \omega Y_1]dt +$$

$$+ \int\limits_0^\infty [T(y) - Y_1^* \omega Y_1]dt + l_1 + l_2 + l_3 \leq= \bar{c}_1 + l_4 < \infty,$$

где $Y_1 = Y_1(t)$, $t \in I$, $|l_i| < \infty$, $i = \overline{1,4}$, $|\bar{c}_1| < \infty$.

Так как

$$\dot{Y}_1^*\pi\dot{Y}_1 + \dot{Y}_1^*\xi Y_1 + Y_1^*\xi^*\dot{Y}_1 + Y_1^*\omega Y_1 = \dot{Y}_1^*[\pi - \xi\omega^{-1}\xi]\dot{Y}_1 + \\ +[Y_1 + \omega^{-1}\xi^*\dot{Y}_1]^*\omega[Y + \omega^{-1}\xi^*\dot{Y}_1] \geq 0,$$

то

$$\int_0^\infty [T(y(t)) - Y_1^*(t)\omega Y_1(t)]dt + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 < \infty.$$

Тогда

$$\int_0^\infty T_1(y(t))dt < \int_0^\infty [T(y(t)) - Y_1^*(t)\omega Y_1(t)]dt < \infty. \tag{20}$$

По условию теоремы $T_1(y) > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $T_1(0) = 0$, следовательно, как следует из (20) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = K^{-1} \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Теорема доказана.

3.3 Проблема Айзермана

Возникает вопрос: можно ли выделить класс многомерных нелинейных регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение, не прибегая к проверке условия абсолютной устойчивости из теоремы 1.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия лемм 1, 3, матрицы A, $A+B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \overline{\mu_0}$ – гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того:*

1) диагональная матрица $\tau_1 = diag(\tau_1 1, \ldots, \tau_{1m})$, матрица $\Gamma - \Gamma^*$ порядка $(n-m) \times (n-m)$ и векторы $\alpha \in R^m$, $\beta \in R^m$, $\gamma \in R^{n-m}$ такие, что

$$\frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^*\tau_1) - \alpha^*\alpha \geq 0, \quad \overline{L} = L_1 + L_3 = \overline{L}^*; \tag{21}$$

2) квадратичная форма $T_2(y) = \dfrac{1}{2}[\overline{W}(y) + \overline{W}^*_(y)] > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $y \neq 0$, $T_2(0) = 0$, где $\overline{W}(y) = W_1(y) + W_3(y) + W_4(y)$.

Тогда в секторе $[0, \mu_0]$, $\mu_0 = \overline{\mu}_0 - \varepsilon$, $\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ – сколь угодно малые числа, проблема Айзермана имеет решение.

Доказательство. Как следует из формул (4), (11), (14) несобственный интеграл

$$I_1 + I_3 + I_4 = \int_0^\infty [\dot{Y}_1^*[\frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^*\tau_1) - \alpha^*\alpha]\dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t)(L_1 + L_3)Y_1(t) + \\ +W_1(y) + W_3(y) + W_4(y) + l_1 + l_3 \leq \bar{c}_1 + l_4 < \infty.$$

Отсюда с учетом (21), имеем

$$\int_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t)\overline{L}Y_1(t) + \overline{W}(y(t))]dt < \infty. \tag{22}$$

По условию теоремы матрица $\overline{L} = \overline{L}^*$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty \dot{Y}_1^*(t)\overline{L}Y_1(t)dt = l_6 = \frac{1}{2}Y_1^*(t)\overline{L}Y_1(t)\Big|_0^\infty < \infty.$$

Теперь соотношение (22) запишется в виде

$$\int\limits_0^\infty T_2(y(t))dt \leq |\bar{c}_1| + |l_4| + |l_1| + |l_3| + |l_6| < \infty.$$

По условию теоремы $T_2(y) > 0$, $y \neq 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $T_2(0) = 0$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = K^{-1}\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Матрица $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m}) = \overline{\mu}_0 - \varepsilon$ определяется из условия гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$. Теорема доказана.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия лемм 1, 3, матрицы* A, $A+B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \overline{\mu_0}$ *– гурвицевы, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, *и пусть, кроме того:*

1) существует матрица $\omega_1 = \omega_1^* > 0$ *порядка* $m \times m$, *такая, что* $\pi_1 - \xi_1\omega_1^{-1}\xi^* \geq 0$, *где* $\pi_1 = \dfrac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^*\tau_1) - \alpha^*\alpha$, $\xi = \dfrac{1}{2}(L_1 + L_3)$;

2) квадратичная форма $T_3(y) = T_2(y) - Y_1^*\omega_1 Y_1 > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $y \neq 0$, $T_3(0) = 0$.

Тогда в секторе $[0, \mu_0]$, $\mu_0 = \overline{\mu}_0 - \varepsilon$, $\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ *– сколь угодно малые числа, проблема Айзермана имеет решение.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Заметим, что: 1) матрица $S = DK$, $D = (D_1, D_2)$, следовательно, матрица D является матрицей обратной связи, $D = SK^{-1}$; 2) Если $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\pi = 0$, то условие (21) запишется в виде $\dfrac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^*\tau_1) \geq 0$, $\overline{L} = L_1 = \tau_1 D_2 C_3 - D_1^*\tau_1 C_1 = L_1^*$. Следовательно, путем выбора матрицей обратной связи $D = (D_1, D_2)$ обеспечивается выполнения условия (21); 3) теоремы 3, 4 следуют из теорем 1, 2 при $\tau_2 = 0$.

4 Решение модельной задачи

Уравнения регулируемой системы имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - \varphi_2(\sigma_2), \;\; \dot{x}_2 = -2x_1 - 1,03x_2 - 0,03x_3 - 0,75\varphi_1(\sigma_1), \\ \dot{x}_3 = -0,01x_2 - 1,01x_3 - 0,25\varphi_1(\sigma_1) + \varphi_2(\sigma_2), \;\; \sigma_1 = x_2 + x_3, \;\; \sigma_2 = -x_1 + x_2 - x_3, \end{gathered} \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \varphi_2(\sigma_2)) \in C(R^2, R^2)/0 \leq \varphi_1(\sigma_1)\sigma_1 \leq \mu_{01}\sigma_1^2, \\ 0 \leq \varphi_2(\sigma_2)\sigma_2 \leq \mu_{02}\sigma_2^2, \;\; \sigma_1 \in R^1, \;\; \sigma_2 \in R^1, \;\; \varphi(0) = 0, \;\; |\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*, \\ \forall\sigma, \;\; \sigma \in R^2, \;\; 0 < \varphi_* < \infty, \;\; \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)\}. \end{gathered} \tag{24}$$

В векторной форме уравнение (23) запишется так

$$\dot{x} = Ax + B_1\varphi_1(\sigma_1) + B_2\varphi_2(\sigma_2), \;\; \sigma_1 = S_1 x, \;\; \sigma_2 = S_2 x, \tag{25}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1,03 & -0,03 \\ 0 & -0,01 & -1,01 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1, & 1, & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Неособое преобразование. Выберем вектор $\theta_1^* = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13})$ так, чтобы $\theta_1^* B_1 = 1$, $\theta_1^* B_2 = 0$. Вектор $\theta_1^* = (1; -5/3; 1)$. Аналогично, определим вектор $\theta_2^* = (\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23})$ из условия $\theta_2^* B_1 = 0$, $\theta_2^* B_2 = 1$. Вектор $\theta_2^* = (0; -1/3; 1)$. Наконец, вектор $\theta_3^* = (\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33})$ выберем так, чтобы $\theta_3^* B_1 = 0$, $\theta_3^* B_2 = 0$. Вектор $\theta_3^* = (1; -1/3; 1)$. Определитель

$$\Gamma(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{vmatrix} <\theta_1, \theta_1> & <\theta_1, \theta_2> & <\theta_1, \theta_3> \\ <\theta_2 \theta_1> & <\theta_2, \theta_2> & <\theta_2, \theta_3> \\ <\theta_3, \theta_1> & <\theta_3, \theta_2> & <\theta_3, \theta_3> \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 43/9 & 14/9 & 23/9 \\ 14/9 & 10/9 & 10/9 \\ 23/9 & 10/9 & 19/9 \end{vmatrix} = \frac{16}{9} > 0.$$

Следовательно, векторы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ линейно независимы.

Так как векторы $\theta_1^* A = (13/3; 8,12/3, -0,96)$, $\theta_2^* A = (2/3; 1/3, -1)$, $\theta_3^* A = (5/3; 4/3, -1)$, то

$$\theta_1^* A = -\frac{5,37}{3}\theta_1^* - \frac{15,88}{3}\theta_2^* + \frac{18,37}{3}\theta_3^*;$$

$$\theta_1^* A x = -\frac{5,37}{3}y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3;$$

где $y_1 = \theta_1^* x$, $y_2^* = \theta_2 x$, $y_3 = \theta_3^* x$. Следовательно,

$$\dot{y}_1 = -\frac{5,37}{3}y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3 + \varphi_1(\sigma_1).$$

Аналогичным путем, находим

$$\theta_2^* A = 0 \cdot \theta_1^* - \frac{5}{3}\theta_2^* + \frac{2}{3}\theta_3^*,$$

$$\theta_2^* A x = -\frac{5}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \quad \dot{y}_2 = -\frac{5}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \varphi_2(\sigma_2);$$

$$\theta_3^* A x = -\frac{3}{4}\theta_1^* - \frac{8}{3}\theta_2^* + \frac{29}{12}\theta_3^*, \quad \theta_3^* A x = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{8}{3}y_2 + \frac{29}{12}y_3,$$

$$\dot{y}_3 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{8}{3}y_2 + \frac{29}{13}y_3.$$

Так как $S_1 = (0,1,1) = -1 \cdot \theta_1^* + 1 \cdot \theta_2^* + 1 \cdot \theta_3^*$, то $\sigma_1 = S_1 x = -y_1 + y_2 + y_3$, $S_2 = (-1,1,-1) = -\frac{1}{2}\theta_1^* - \frac{1}{2}\theta_3^*$, $\sigma_2 = S_2 x = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3$.

Из вышеизложенного следует, что уравнение (25) с неособым преобразованием приводится к виду

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = -1,79y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3 + \varphi_1(\sigma_1), \\ &\dot{y}_2 = -\frac{5}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \varphi_2(\sigma_2), \\ &\dot{y}_3 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{8}{3}y_2 + \frac{29}{12}y_3, \\ &\sigma_1 = -y_1 + y_2 + y_3, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3, \end{aligned} \tag{26}$$

где функция $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \varphi_2(\sigma_2))$ удовлетворяет включения (24).

Матрицы

$$R = \|\theta_1, \theta_2, \theta_3\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |R| = -\frac{4}{3} \neq 0.$$

$$K = R^* = \begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5/8 & 1 \\ 0 & -1/3 & 1 \\ 1 & -1/36 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \\ -1/4 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Вводя следующие матрицы и векторы

$$C = \begin{pmatrix} -1,79 & -15,88/3 & 18,37/3 \\ 0 & -5/3 & 2/3 \\ -3/4 & -8/3 & 29/12 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

уравнение (26) запишем в векторной форме

$$\dot{y} = Cy + E\varphi(\sigma), \quad \sigma = Dy, \tag{27}$$

где $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Легко убедиться в том, что $C = KAK^{-1}$, $D = SK^{-1}$, $E = KB$.

2. Свойства решений. Характеристическое уравнение матрицы A равно

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = |\lambda I_3 - A| = \lambda^3 + 1,04\lambda^2 + \lambda + 0,98 = 0.$$

Так как все коэффициенты характеристического полинома больше нуля и $1,04 > 0,98$, то матрица A – гурвицева. Тогда, как следует из теоремы 1 $|x(t)| \leq c_0$, $|\dot{x}(t)| \leq c_1$, $|y(t)| \leq c_2$, $|\dot{y}(t)| \leq c_3$, $|\sigma(t)| \leq c_4$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq c_5$, $t \in I$. Из леммы 4 следует, что вдоль решения уравнения (25), (26) когда функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ удовлетворяет условию (24), верны тождества:

$$\varphi_1(\sigma_1(t)) = \dot{y}_1(t) + 1,79y_1(t) + \frac{15,88}{3}y_2(t) - \frac{18,37}{3}y_3(t), \quad t \in I, \tag{28}$$

$$\varphi_2(\sigma_2(t)) = \dot{y}_2(t) + \frac{5}{3}y_2(t) - \frac{2}{3}y_3(t), \tag{29}$$

$$\sigma_1(t) = -y_1(t) + y_2(t) + y_3(t), \quad \sigma_2(t) = -\frac{1}{2}y_1(t) - \frac{1}{2}y_3(t), \quad t \in I, \tag{30}$$

$$\dot{y}_3(t) = -\frac{3}{4}y_1(t) - \frac{8}{3}y_2(t) + \frac{29}{12}y_3(t), \quad t \in I, \tag{31}$$

$$\dot\sigma_1(t) = -\dot y_1(t) + \dot y_2(t) + \dot y_3(t), \;\; \dot\sigma_2(t) = -\frac{1}{2}\dot y_1(t) - \frac{1}{2}\dot y_3(t), \;\; t \in I, \tag{32}$$

Из тождества (31) следует, что

1) $\dot y_1 \dot y_3 = -\frac{8}{3}\dot y_1 y_2 + \frac{29}{12}\left(\frac{3}{4}y_1^2 + \frac{8}{3}y_1y_2 - \frac{29}{12}y_1y_3\right) + \frac{d}{dt}\left[\frac{29}{12}y_1y_3 - \frac{3}{8}y_1^2\right]$,

2) $\dot y_2 \dot y_3 = \frac{3}{4}\dot y_1 y_2 + \frac{29}{12}\left(\frac{3}{4}y_1y_2 + \frac{8}{3}y_2^2 - \frac{29}{12}y_2y_3\right) + \frac{d}{dt}\left[-\frac{3}{4}y_1y_2 - \frac{4}{3}y_2^2 + \frac{29}{12}y_2y_3\right]$,

3) $\dot y_3 \dot y_3 = \frac{9}{16}y_1^2 + 4y_1y_2 + \frac{64}{9}y_2^2 - \frac{29}{16}y_1y_3 - \frac{58}{9}y_2y_3 + \frac{d}{dt}\left[\frac{29}{24}y_3^2\right]$,

4) $y_1\dot y_3 = -\frac{3}{4}y_1^2 - \frac{8}{3}y_1y_2 + \frac{29}{12}y_1y_3$,

5) $y_2\dot y_3 = -\frac{3}{4}y_1y_2 - \frac{8}{3}y_2^2 + \frac{29}{12}y_2y_3$,

6) $\int\limits_0^\infty \left[-\frac{3}{4}y_1y_3 - \frac{8}{3}y_2y_3 + \frac{29}{12}y_3^2\right]dt = \frac{1}{2}y_3^2(t)\Big|_0^\infty$,

7) $\dot y_1 y_3 = \frac{d}{dt}(y_1y_3) - y_1\dot y_3$; $\dot y_2 y_3 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - y_2\dot y_3$;

8) $y_1\dot y_2 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - \dot y_1 y_2$;

3. Несобственные интегралы. Несобственный интеграл (см. (28) – (32))

$$I_{11} = \int\limits_0^\infty \varphi_1(\sigma_1(t))\tau_{11}\dot\sigma_1(t)dt = \int\limits_0^\infty (\dot y_1 + 1,79y_1 + \frac{15,88}{3}y_2 - \frac{18,37}{3}y_3)\tau_{11}(-\dot y_1 + \dot y_2 + \dot y_3)dt =$$

$$= \tau_{11}\int\limits_0^\infty [-\dot y_1^2 + \dot y_1\dot y_2 - \frac{29,25}{3}\dot y_1 y_2 + \frac{81}{16}y_1^2 + \frac{339,25}{36}y_1y_2 - \frac{2349}{144}y_1y_3 -$$

$$-\frac{274}{9}y_2^2 + \frac{993,25}{36}y_2y_3]dt + l_{11} + l_{12} = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi_1(\sigma_1)\tau_{11}d\sigma_1 = \bar c_{11} < \infty,$$

$$|l_{11}| < \infty, \quad |l_{12}| < \infty.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_0^\infty \Big[-\tau_{11}\dot y_1^2 + \tau_{11}\dot y_1\dot y_2 - \frac{29,25}{3}\tau_{11}\dot y_1 y_2 + \frac{81}{16}\tau_{11}y_1^2 + \frac{339,25}{36}\tau_{11}y_1y_2 -$$
$$-\frac{2349}{144}\tau_{11}y_1y_3 - \frac{274}{9}\tau_{11}y_2^2 + \frac{339,25}{36}\tau_{11}y_2y_3\Big]dt < \infty. \tag{33}$$

несобственный интеграл

$$I_{12} = \int\limits_0^\infty \varphi_2(\sigma_2)\tau_{12}\dot\sigma_2(t)dt = \int\limits_0^\infty (\dot y_2 + \frac{5}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3)\tau_{12}(\frac{1}{2}\dot y_1 - \frac{1}{2}\dot y_3)dt =$$

$$= \tau_{12}\int\limits_0^\infty(\frac{1}{2}\dot y_1\dot y_2 + \frac{11}{24}\dot y_1 y_2 - \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1551}{864}y_1y_2 + \frac{29}{36}y_1y_3 - \frac{29}{9}y_2^2 - \frac{841}{288}y_2y_3)dt +$$

$$+l_{21} + l_{22} = \int\limits_0^\infty \varphi_2(\sigma_2)\tau_{12}d\sigma_2 = \bar c_{21} < \infty, \quad |l_{21}| < \infty, \quad |l_22| < \infty.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\tau_{12}\int\limits_0^\infty\Big[\frac{1}{2}\dot y_1\dot y_2 + \frac{11}{24}\dot y_1 y_2 - \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1551}{864}\tau_{12}y_1y_2 + \frac{29}{36}y_1y_3 - \\ -\frac{29}{9}y_2^2 - \frac{841}{288}y_2y_3\Big]dt < \infty.\end{gathered} \tag{34}$$

Заметим, что $I_1 = I_{11} + I_{12}$, $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \tau_{12})$, $l_1 = l_{11} + l_{21}$, $l_2 = l_{12} + l_{22}$. Суммируя несобственные интегралы (33), (34) получим

$$\begin{gathered}I_{10} = \int\limits_0^\infty\Big[-\tau_{11}\dot y_1^2 + (\tau_{11} + \frac{1}{2}\tau_{12})\dot y_1\dot y_2 + (-\frac{29,25}{3}\tau_{11} + \frac{11}{24}\tau_{12})\dot y_1 y_2 + \\ +(\frac{81}{16}\tau_{11} - \frac{1}{4}\tau_{12})y_1^2 + (\frac{339,25}{36}\tau_{11} - \frac{1551}{864}\tau_{12})y_1y_2 + \\ +(-\frac{2349}{144}\tau_{11} + \frac{29}{36}\tau_{12})y_1y_3 + (-\frac{274}{9}\tau_{11} - \frac{29}{9}\tau_{12})y_2^2 + \\ +(\frac{993,25}{36}\tau_{11} - \frac{841}{228}\tau_{12})y_2y_3\Big]dt < \infty.\end{gathered} \tag{35}$$

Несобственный интеграл $I_2 = I_{21} + I_{22}$, где $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \tau_{22}) \geq 0$,

$$I_{21} = \int\limits_0^\infty[\varphi_1(\sigma_1(t))\tau_{21}\mu_{01}^{-1}\varphi_1(\sigma_1(t)) - \varphi_1(\sigma_1(t))\tau_{21}\sigma_1(t)]dt + l_{31}, \tag{36}$$

$$I_{22} = \int\limits_0^\infty[\varphi_2(\sigma_2(t))\tau_{22}\mu_{02}^{-1}\varphi_2(\sigma_2(t)) - \varphi_2(\sigma_2(t))\tau_{22}\sigma_2(t)]dt + l_{32}. \tag{37}$$

Из (36) с учетом тождеств (28), (29), получим

$$\begin{gathered}I_{21} = \int\limits_0^\infty[\tau_{21}\mu_{01}^{-1}\dot y_1^2 + (-\tau_{21} + \frac{31,76}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1})\dot y_1 y_2 + (1,04\tau_{21} - 5,9809\tau_{21}\mu_{01}^{-1})y_1^2 + \\ +(\frac{2,51}{3}\tau_{21} - \frac{123,3688}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1})y_1y_2 + (-\frac{16,48}{3}\tau_{21} + \frac{69,0712}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1})y_1y_3 + \\ +(-\frac{15,88}{3}\tau_{21} + \frac{252,1744}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1})y_2^2 + (\frac{2,49}{3}\tau_{21} - \frac{583,4312}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1})y_2y_3 + \\ +(\frac{18,37}{3}\tau_{21} + \frac{337,4569}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1})y_3^2\Big]dt + l_{31} \leq 0, \quad |l_{31}| < \infty.\end{gathered} \tag{38}$$

Из (37) с учетом тождеств (29), (30), имеем

$$I_{22}=\int\limits_0^\infty[\tau_{22}\mu_{02}^{-1}\dot y_2^2-\frac{1}{2}\tau_{22}\dot y_1y_2+(-\tau_{22}\mu_{02}^{-1}+\frac{29}{24}\tau_{22})y_1y_2+$$

$$+(-\frac{1}{3}\tau_{22})y_1y_3+(-\frac{7}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1}+\frac{4}{3}\tau_{22})y_2^2+(\tau_{22}\mu_{02}^{-1}-\frac{3}{8}\tau_{22})y_2y_3+$$
$$+(\frac{4}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1}-\frac{1}{3}\tau_{22})y_3^2]dt+l_{32}\le 0,\ \ |l_{32}|<\infty.$$

Тогда несобственный интеграл

$$\begin{gathered}I_2=\int\limits_0^\infty[\tau_{21}\mu_{01}^{-1}\dot y_1^2+\tau_{22}\mu_{01}^{-1}\dot y_2^2+(-\tau_{21}+\frac{31,76}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\frac{1}{2}\tau_{22})\dot y_1y_2+\\
+(1,04\tau_{21}-5,9809\tau_{21}\mu_{01}^{-1})y_1^2+(\frac{2,51}{3}\tau_{21}-\frac{123,3688}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\\
-\tau_{22}\mu_{02}^{-1}+\frac{29}{24}\tau_{22})y_1y_2+(-\frac{16,48}{3}\tau_{21}+\frac{69,0712}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\frac{1}{3}\tau_{22})y_1y_3+\\
+(-\frac{15,88}{3}\tau_{21}+\frac{252,1744}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\frac{7}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1}+\frac{4}{3}\tau_{22})y_2^2+\\
+(\frac{2,49}{3}\tau_{21}-\frac{583,4312}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}+\tau_{22}\mu_{02}^{-1}+\frac{3}{8}\tau_{22})y_2y_3+(\frac{18,37}{3}\tau_{21}+\frac{337,4569}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}+\\
+\frac{4}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1}-\frac{1}{3}\tau_{22})y_3^2]dt+l_3\le 0,\ \ l_3=l_{31}+l_{32},\ \ |l_3|<\infty.\end{gathered}\tag{39}$$

Несобственный интеграл

$$\begin{gathered}I_3=-\int\limits_0^\infty[\alpha_1\dot y_1+\alpha_2\dot y_2+\beta_1y_1+\beta_2y_2+\gamma_1y_3]^2dt=\int\limits_0^\infty[-\alpha_1^2\dot y_1^2-\alpha_2^2\dot y_2^2-\\
-2\alpha_1\alpha_2\dot y_1\dot y_2+(-2\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_1)\dot y_1y_2-(\beta_1^2+\frac{3}{2}\alpha_1\gamma_1)y_1^2-(\beta_2^2+\frac{16}{3}\alpha_2\gamma_1)y_2^2-\\
-\gamma_1^2y_3^2-(2\beta_1\beta_2+\frac{16}{3}\alpha_1\gamma_1+\frac{3}{2}\alpha_2\gamma_1)y_1y_2-(2\beta_1\gamma_1-\frac{29}{6}\alpha_1\gamma_1)y_1y_3-\\
-(2\beta_2\gamma_1-\frac{29}{6}\alpha_2\gamma_1)y_2y_3]dt+l_4\le 0,\ \ |l_4|<\infty.\end{gathered}\tag{40}$$

Несобственный интеграл

$$I_4=\Gamma\int\limits_0^\infty y_3(t)\dot y_3(t)dt=\Gamma\int\limits_0^\infty[-\frac{3}{4}y_1y_3-\frac{8}{3}y_2y_3+\frac{29}{12}y_3^2]dt=\frac{\Gamma}{2}y_3^2(t)\Big|_0^\infty<\infty.$$

4. Абсолютная устойчивость.

Сумма несобственных интегралов (см. (33) – (35), (36) – (38), (39), (40))

$$I_1+I_2+I_3+I_4=\int\limits_0^\infty[(-\tau_{11}+\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-+\alpha_1^2)\dot y_1^2+(\tau_{11}+\frac{1}{2}\tau_{12}-2\alpha_1\alpha_2)\dot y_1\dot y_2+$$

$$+(-\frac{29,25}{3}\tau_{11}+\frac{11}{24}\tau_{12}-\tau_{21}+\frac{31,76}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\frac{1}{2}\tau_{22}-2\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_1)\dot{y}_1y_2+$$

$$+(\tau_{22}\mu_{01}^{-1}-\alpha_2^2)\dot{y}_2^2]dt+\int\limits_0^\infty T(y(t))dt+\sum_{i=1}^4 l_i<\infty,$$

где

$$\begin{gathered}T(y)=\frac{1}{2}(W(y)+W^*(y)),\quad W(y)=(\frac{81}{16}\tau_{11}-\frac{1}{4}\tau_{12}+1,04\tau_{21}-\\ -5,9809\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\beta_1^2-\frac{3}{2}\alpha_1\gamma_1)y_1^2+(\frac{339,25}{36}\tau_{11}-\frac{1551}{864}\tau_{12}+\frac{2,51}{3}\tau_{21}-\\ -\frac{123,3688}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\tau_{22}\mu_{02}^{-1}+\frac{29}{24}\tau_{22}-2\beta_1\beta_2-\frac{16}{3}\alpha_1\gamma_1-\frac{3}{2})y_1y_2+\\ +(-\frac{23,49}{144}\tau_{11}+\frac{29}{24}\tau_{12}-\frac{16,48}{3}\tau_{21}+\frac{69,0712}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\frac{1}{3}\tau_{22}-2\beta_1\gamma_1+\\ +\frac{29}{6}\alpha_1\gamma_1-\frac{3}{4}\Gamma)y_1y_3+(-\frac{274}{9}\tau_{11}-\frac{29}{9}\tau_{12}-\frac{15,88}{3}\tau_{11}+\frac{252,1744}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\\ -\frac{7}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1}+\frac{4}{3}\tau_{22}-\beta_2^2-\frac{16}{3}\alpha_2\gamma_1)y_2^2+(\frac{993,25}{36}\tau_{11}-\frac{841}{288}\tau_{12}+\frac{2,49}{3}\tau_{21}-\\ -\frac{583,4312}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}+\tau_{22}\mu_{02}^{-1}-\frac{3}{8}\Gamma-2\beta_2\gamma_1+\frac{29}{6}\alpha_2\gamma_1)y_2y_3+\\ +(\frac{18,37}{3}\tau_{21}+\frac{337,4569}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}+\frac{4}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1}-\frac{1}{3}\tau_{22}-\gamma_1^2+\frac{29}{12}\Gamma)y_3^2.\end{gathered}\tag{41}$$

Условия (16) теоремы 1, когда $L=0$ запишется так:

$$-\tau_{11}+\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\alpha_1^2=0,\quad \tau_{11}+\frac{1}{2}\tau_{12}-2\alpha_1\alpha_2=0,$$

$$-\frac{29,25}{3}\tau_{11}+\frac{11}{24}\tau_{12}-\tau_{21}+\frac{31,76}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1}-\frac{1}{2}\tau_{22}-2\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_1=0,$$
$$\tau_{22}\mu_{02}^{-1}-\alpha_2^2=0.$$

Тогда сумма

$$I_1+I_2+I_3+I_4=\int\limits_0^\infty T(y(t))dt+\sum_{i=1}^4 l_i<\infty,\quad |l_i|<\infty,\quad i=\overline{1,4}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^\infty T(y(t))dt=\int\limits_0^\infty\frac{1}{2}[W(y_1,y_2,y_3)+W^*(y_1,y_2,y_3)]dt<\infty.$$

По утверждению теоремы 1 должно быть выполнено неравенство

$$T(y_1,y_2,y_3)>0,\quad \forall y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3,\quad y\neq 0,\quad T(0,0,0)=0.$$

По условию теоремы 1 требуется гурвицевость матрицы $A+B\mu S$, $0\le\mu\le\overline{\mu}_0$, $\overline{\mu}_0\ge\mu_0$, где $\mu=diag(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_0=diag(\mu_{01},\mu_{02})$. Матрица $A+B\mu S$ подобна матрице $C+E\mu D$.

В самом деле, $C + E\mu D = KAK^{-1} + KB\mu SK^{-1} = K(A + B\mu S)K^{-1}$. Следовательно, для гурвицевости матрицы $A + B\mu S$ необходимо и достаточно гурвицевость матрицы $C + E\mu D$. Из уравнений (27) при $\varphi_1(\sigma_1) = \mu_1\sigma_1$, $\varphi_2(\sigma_2) = \mu_2\sigma_2$, где $\sigma_1 = -y_1 + y_2 + y_3$, $\sigma_2 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3$, получим

$$\dot{y}_1 = -1,79y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3 + \mu_1\sigma_1,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{5}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \mu_2\sigma_2,$$

$$\dot{y}_3 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{8}{9}y_2 + \frac{29}{12}y_3.$$

Тогда матрица

$$C + E\mu D = \begin{pmatrix} -1,79 - \mu_1 & -\frac{15,88}{3} + \mu_1 & \frac{18,37}{3} + \mu_1 \\ 0 & -\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\mu_2 & \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mu_2 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{8}{3} & \frac{29}{12} \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы $C + E\mu D$ равен

$$|\lambda I_3 - C - E\mu D| = \lambda^3 + (1,04 + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2)\lambda^2 + (1 - \frac{4,94}{3}\mu_2)\lambda +$$

$$+ (0,98 - 0,5\mu_1 - \frac{1,61}{6}\mu_2 - \frac{4}{3}\mu_1\mu_2).$$

Отсюда следует, что для гурвицевости матрицы $C + E\mu D$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_2 < \frac{3}{4,94} = 0,60728...; \quad 0,98 - 0,5\mu_1 - \frac{1,61}{6}\mu_2 - \frac{4}{3}\mu_1\mu_2 > 0,$$

$$(1,04 + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2)(1 - \frac{4,94}{3}\mu_2) - (0,98 - 0,5\mu_1 - \frac{1,61}{6}\mu_2 - \frac{4}{3}\mu_1\mu_2) > 0.$$

Тогда предельная матрица $\overline{\mu}_0 = diag(\overline{\mu}_{01}, \overline{\mu}_{02})$, где $\overline{\mu}_{01} \approx 0,61$, $\overline{\mu}_{02} \simeq 0,6$. Следовательно, $\overline{\mu}_{01} \geq \mu_{01}$, $\overline{\mu}_{02} \geq \mu_{02}$.

Таким образом, для абсолютной устойчивости положения равновесия системы (23), (24) достаточно, чтобы квадратичная форма $T(y) = \frac{1}{2}[W(y) + W^*(t)] > 0$, $\forall y$, $y \in R^3$, $y \neq 0$, $T(0) = 0$, $\mu_{01} \leq \overline{\mu}_{01} \simeq 0,61$, $\mu_{02} \leq \overline{\mu}_{02} \simeq 0,6$, где матрица $W(y) = W(y_1, y_2, y_3)$ определяется по формуле (41).

5 Заключение

Создан конструктивный метод исследования асимптотического свойства решений регулируемых систем описываемых уравнениями с дифференциальными включениями. Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику регулируемых систем, правая часть которых содержит нелинейные функции из заданного множества. Исследуются два случая задания множеств нелинейных функции: первое, когда $\varphi(\sigma)$ принадлежит сектору $[0, \mu_0]$, второе, когда $\varphi(\sigma)$ находится в секторе $[\varepsilon, r_0]$. В первом случае асимптотикой $\varphi(\sigma)$ является константа $|\varphi(\sigma)| \leq \varphi_0$, $0 < \varphi_0 < \infty$; а во втором случае асимптотикой является линейная функция $\varepsilon\sigma$.

Следует отметить следующие особенности исследуемой задачи:

– начальным состоянием уравнений с дифференциальным включением является любая точка фазового пространства;

– из любой начальной точки исходят бесконечное множество решений соответствующие фиксированным нелинейностям из заданного множества;

– при фиксированной нелинейности обыкновенное дифференциальное уравнение имеет единственное решение исходящее из начальной точки;

– неопределенность правой части уравнения порождает неединственность решения, что приводит к необходимости исследования групповых свойств решений. Одним из таких свойств является абсолютная устойчивость тривиального решения;

– исследуются свойства решений при котором все решения, исходящие из любой точки при любых нелинейных функциях из заданного множества, стремятся с течением времени к положению равновесия;

Предлагается совершенно новый метод исследования абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем без привлечения каких-либо функций Ляпунова и частотных теорем, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения систем.

Список литературы

[1] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем // Издательство АН СССР, 1963. С. 240

[2] *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. С.216

[3] *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. С. 453

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.:Наука, 1978. С. 400

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1969. №5. С. 38-48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1970. №12. С. 83-94.

[7] *Айзерман М.А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом"динамических систем // УМН, 1949. т. 4. № 4. С. 186-188.

[8] *Kalman R.E.* Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME, 1957. v. 79.3. pp. 553-556.

[9] *Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи ЧУА. Известия РАН. Теория и системы управления, 2011. № 4. С. 3-36.

[10] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. Минск-Москва. 1994. Т.30. №5. С. 748-757.

[11] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2000. – С. 234

[12] *Айсагалиев С.А.* Теория устойчивости динамических систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2012. – 216 с.

[13] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Certain problems of Synchronization theory // Journal Inverse Ill Posed Problems, 21 (2013), – pp. 159-175.

[14] *Айсагалиев С. А., Аязбаева А. М.* Несобственные интегралы в теории устойчивости многомерных регулируемых систем // Вестник КазНУ, сер. мех., мат., инф. – 2017, № 3(95). – С. 3-20.

References

[1] Aizerman M. A., Gantmaher F. R. *Absolyutnaya ustoychivost reguliruemyih sistem* [Absolute stability of regulated systems], (Izdatelstvo AN SSSR, 1963) : 240.

[2] Lurie A. I. *Nekotoryie nelineynyie zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Some nonlinear problems of automatic control theory], (M.: Gostehizdat, 1951) : 216.

[3] Popov V. M. *Giperustoychivost avtomaticheskih sistem* [Hyper-stability of automatic systems], (M.: Nauka, 1970) : 453.

[4] Gelig A. H., Leonov G. A., Yakubovich V. A. *Ustoychivost nelineynyih sistem s needinstvennyim sostoyaniem ravnovesiya* [Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state], (M.:Nauka, 1978) : 400.

[5] Aisagaliev S. A., «Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti vyinuzhdennyih dvizheniy v nelineynyih sistemah» [On the determination of the domain of absolute stability forced motions in nonlinear systems], *Izv. AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika* (1969) : 38–48.

[6] Aisagaliev S. A., «Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti sistemyi upravleniya s neskolkimi nelineynyimi elementami» [On the determination of the domain of absolute stability of a control system with several nonlinear elements], *AN SSSR. Avtomatika i telemehanika* (1970) : 83–94.

[7] Aizerman M. A., «Ob odnoy probleme, kasayuscheysya ustoychivosti v "bolshom"dinamicheskih sistem» [On one problem concerning stability in "large"dynamical systems], *UMN* (1949) : 186–188.

[8] Kalman R. E., «Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems», *Transactions of ASME* (1957) : 553–556.

[9] Bragin V. O., Vagaytsev V. I., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., «Algoritmyi poiska skryityih kolebaniy v nelineynyih sistemah. Problemyi Ayzermana, Kalmana i tsepi ChUA» [Algorithms for searching hidden oscillations in nonlinear systems. The problems of Aizerman, Kalman, and ChUA chain], *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemyi upravleniya* (2011) : 3–36.

[10] Aisagaliev S. A., «K teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyih sistem» [For the theory of absolute stability of regulated systems], *Differentsialnyie uravneniya. Minsk-Moskva*, Vol. 30. No 5 (1994) : 748–757.

[11] Aisagaliev S. A. *Teoriya reguliruemyih sistem* [Theory of regulated systems] (Kazakh universiteti, 2000), 234.

[12] Aisagaliev S. A. *Teoriya ustoychivosti dinamicheskih sistem* [Stability theory of dynamical systems] (Kazakh universiteti, 2012), 216.

[13] Aisagaliev S. A., Kalimoldayev M. N., «Certain problems of Synchronization theory», *Journal Inverse Ill Posed Problems*, No 21 (2013) : 159–175.

[14] Aisagaliev S. A., Ayazbayeva A. M., «Nesobstvennyie integralyi v teorii ustoychivosti mnogomernyih reguliruemyih sistem [Improper integrals for stability theory of multidimensional regulated systems]», *Vestnik KazNU, ser. meh., mat., inf.* (2017) : 3-20.