

3-бөлім

Раздел 3

Section 3

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

МРНТИ 27.35.17

Численный алгоритм для решения задачи моделирования динамики крупномасштабного термика

Жакебаев Д.Б., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com
Моисеева Е.С., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: k.moisseyeva@gmail.com
Хребтов М.Ю., Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск, Российская Федерация, E-mail: weexov@yandex.ru
Цой Н.В., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: nktatsoy@gmail.com

В данной статье рассматривается динамика крупномасштабного термика под действием силы плавучести, с учетом турбулентного перемешивания и адиабатического расширения. Математическая модель строится на основе уравнений Навье – Стокса, уравнения неразрывности и уравнения полной энергии. Численное моделирование осуществляется на основе решения решеточных уравнений Больцмана в трехмерной постановке с применением D3Q27 модели. Первое приближение решения уравнения Больцмана приводит к гидродинамическому уравнению Навье – Стокса. Приведены результаты проверки численного алгоритма на примере тестовой задачи течения Пуазейля, в рамках которой были посчитаны ошибки нормы для различных размеров расчетной сетки. Был произведен ряд численных экспериментов, при различных начальных условиях для температуры и плотности внутри и вне крупномасштабного термика. Получена зависимость высоты подъема облака от начальной температуры. В качестве результатов приведена динамика распространения поля температуры для начального значения 1800°K в момент времени 5 с, 15 с и 35 с.

Ключевые слова: крупномасштабный термик, решеточный метод Больцмана, D3Q27.

Keң ауқымды термалдардың динамикасың моделдеудің сандық әдісі

Жакебаев Д.Б., PhD, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы, E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com
Моисеева Е.С., PhD, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы, E-mail: k.moisseyeva@gmail.com
Хребтов М.Ю., ф.-м.ғ.к. , Новосибирск Мемлекеттік Университеті, Новосибирск қ.,
Ресей Федерациясы, E-mail: weexov@yandex.rum
Цой Н.В., докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы, E-mail: nktatsoy@gmail.com

Берілген мақалада, турбулентті алмасу мен адиабаталық кеңеюді ескеретін жүзгіштік күштің әсерінен қозғалысқа келетін үлкен масштабты термиктің динамикасы қарастырылды. Математикалық модель Навье - Стокс теңдеуі, энергияның сақталу заңы және үзіліссіздік теңдеулерінің негізінде құрылды. Сандық пішіндеуді үшөлшемді, торлық Больцман теңдеуінің шешімі негізінде, D3Q27 пішінін қолдану арқылы құрамыз. Больцман теңдеуінің бірінші жуықтау шешімі гидродинамикалық Навье - Стокс теңдеуіне келтіреді. Пуазейл ағымының тестілік есебінің мысалы негізінде, әртүрлі өлшемдегі есептеу торының қателіктерін есептейтін, сандық алгоритмді тексеру нәтижелері көрсетілді. Ірі масштабты

термиктің ішінде жататын және жатпайтын, әртүрлі бастапқы шарттармен берілген сандық эксперименттер жасалынды. Бұлттың көтерілу биіктігінің бастапқы температураға тәуелділік шамасы алынды. Нәтиже ретінде 5 сек, 15 сек және 35 сек уақыт мезетіне сәйкес келетін, бастапқы мәні 1800° К болатын, температураның таралу аумағының динамикасы алынды.

Түйін сөздер: кең ауқымды термик, торлық Больцман әдісі, D3Q27.

Numerical algorithm for solving the problem of modeling the dynamics of a large-scale thermal

Zhakebayev D.B., PhD, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan,
E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com

Moisseyeva Ye., PhD, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan,
E-mail: k.moisseyeva@gmail.com

Hrebtov M.Y., c.ph.-m.s., Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation,
E-mail: weexov@yandex.ru

Tsoy N.V., PhD student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan,
E-mail: nktatsoy@gmail.com

The article presents research results on dynamics of large-scale thermals influenced by buoyancy force, turbulent mixing and adiabatic expansion. Mathematical model is based on the Navier – Stokes equations, the continuity equation, and the total energy equation. Numerical simulation realized by finding solution of three dimension Lattice Boltzmann Equations applying D3Q27 model. First approximation of the solution of Boltzmann equation leads to the hydrodynamic Navier – Stokes equation. Numerical verification of the algorithm was carried out using benchmark Poiseuille flow problem. A number of numerical experiments were carried out, with different initial conditions for temperature and density inside and outside the large-scale thermal. The dependence of the height of cloud rise on the initial temperature was obtained. Dynamics of the temperature field propagation is given for an initial value of 1800° K at the time instant of 5 s, 15 s, and 35 s.

Key words: large-scale thermal, Lattice Boltzmann Method, D3Q27.

1 Введение

Чрезвычайные ситуации (ЧС) природного и антропогенного происхождения, такие как лесные пожары, пожары на промышленных предприятиях, аварийные падения ракет-носителей, часто сопровождаются наземным взрывом, при котором образуется крупномасштабный высокотемпературный термический поток – термик. Высокая температура и давление, а также сложный химический состав газопылевого облака приводят к образованию экологически опасных компонентов, распространяющихся на многие километры как в горизонтальном, так и вертикальном направлении, что представляет реальную угрозу окружающей среде, живым организмам и изменению климата.

Крупномасштабный высокотемпературный термик, - явление не до конца изученное. Согласно известным на сегодняшний день законам физики, холодный воздух вытесняет теплый, поэтому перемещения тепловых потоков наблюдается повсеместно. Термиком принято считать восходящий поток теплого воздуха [1]. Образование термика происходит, при нагревании поверхности земли на солнце или при чрезвычайных ситуациях природного или антропогенного происхождения. При этом очевидно, что чем контрастнее погодные условия, тем сильнее и выраженнее термические потоки. Следует отметить, что в штилевую погоду термики располагаются практически вертикально. При наличии ветра термический поток наклоняется по направлению ветра. При достаточном уровне влажности воздуха вода из воздушного потока конденсируется, и

над термиком образуются кучевые облака. В сухую погоду термические потоки часто бывают невидимыми (так называемые «голубые термики») [1]. В случае образования термиков по причине техногенной катастрофы, термики могут переносить различные примеси и визуализироваться дымом, пылью (пылевые столбы), пухом растений и прочие.

Одним из лучших методов для изучения образования и перемещения термических потоков является математическое моделирование, поскольку оно предполагает разработку математического описания, реализацию модели посредством применения наиболее точных современных численных методов, а также составление программного кода для высокопроизводительной вычислительной машины.

Также нужно отметить тот факт, что внутри термических потоков имеет место турбулентное перемещение воздушных масс, изучение которого, при его математическом описании, также затрудняется бесчисленным количеством степеней свободы рассматриваемых элементов системы потока.

В данной статье проводится изучение крупномасштабных термиков, посредством разработки и реализации динамической модели движения высокотемпературных потоков. Представлено математическое описание в виде системы уравнений в частных производных с поставленными краевыми и начальными условиями. Проведена проверка адекватности разработанной математической модели движения крупномасштабных термических потоков, на основе решения тестовых задач. Осуществлен подбор численного метода для реализации разработанной математической модели, удовлетворяющий критериям точности. Разработан специальный алгоритм применения методов для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных при определенных граничных и начальных условиях. Приведено описание результатов моделирования движения крупномасштабных термиков в атмосферном приземном слое. Визуализированы вычислительная области и трехмерное поле температуры, показана временная эволюция температуры и высоты подъема крупномасштабного термика.

2 Обзор литературы

Основные подходы к моделированию турбулентных течений в настоящее время – это DNS (Direct Numerical Simulation, прямое численное моделирование) и LES (Large Eddy Simulation, моделирование крупных вихрей). Поскольку в методах DNS рассчитываются величины всех масштабов турбулентности (от Колмогоровского до интегрального), для их использования требуются огромные вычислительные ресурсы, а прямое численное моделирование сжимаемых турбулентных течений на данный момент представляет собой практически неразрешимую задачу вследствие крайне высокого объема вычислений [1, 2, 3, 4, 5]. Методы моделирования крупных вихрей (LES) основываются на гипотезе о статистической независимости крупных и мелких вихрей. LES-методы разрешают крупные вихри, а мелкомасштабные структуры исключаются из уравнений Навье-Стокса при помощи пространственной фильтрации и моделируются с использованием подсеточных моделей (SGS, Sub-Grid Scale). К таким моделям относятся, например, модель Смагоринского и ее модификации [6], динамические подсеточные модели [7, 8] неявное моделирование подсеточной турбулентности Implicit

it LES (ILES) [9, 10]. Таким образом, этот подход требует меньших вычислительных ресурсов в сравнении с методами DNS, поскольку шаги сетки и временные интервалы могут быть намного больше колмогоровских, обеспечивая при этом высокую точность расчета[2]. Кроме того, наряду с DNS и LES на практике часто применяются методы RANS (Reynolds averaged Navier-Stokes, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса) для описания средних характеристик турбулентности, поскольку не требуют больших вычислительных затрат [11]. Численное изучение эволюции термика представлено в работах [12, 13]. Так, в работе [14] на основе осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, замкнутых k-epsilon моделью турбулентности с учетом сжимаемости, построена математическая модель процесса поднятия термика в устойчивой атмосфере, записанная в цилиндрической системе координат. Для инициирования термика в начальный момент в вычислительную область вводится сферическое облако с повышенной температурой: значение температуры на нижней границы области $T_0 = 288.1K$, вертикальный градиент температуры $grad T = -6.5K \cdot км^{-1}$, начальный радиус термика $r_0 = 500 м$, его центр находится на высоте $h = 1250 м$ относительная избыточная температура равна $(T_{in} - T_0)/T_0 = 0.2$. Численное решение осуществлялось с применением схемы переменных направлений, дополненной процедурами монотонизации. k-epsilon модель решается отдельно неявной схемой. Получено, что распространение турбулентных параметров достаточно неоднородно и не стационарно: на начальной стадии турбулентное смешение в основном сосредоточено в верхней части термика, тогда как на финальной стадии эта область сдвигается к периферии термика и в области вихревого следа, также наблюдается сильное подавление турбулентности в вихревом ядре термика.

В работе [15] отмечено подобие термиков, возникающих в атмосфере, и очень плавучих пузырей с большой избыточной удельной энтропией относительно окружающей среды, изучавшийся в [16]. Используя это, в работе [17] численно изучается эволюция термика на основе динамики трехмерного плавучего изолированного пузыря в стратифицированном слое. Вследствие предположения, что стратификация температуры имеет адиабатический характер, равновесие незначительно устойчиво при развитии конвекции. Таким образом, при вводе горячего плавучего пузыря в данную среду он будет подниматься без влияния эффектов стратификации за исключением эффектов, вызванных ростом и расширением поднимающегося пузыря. В начальный момент времени в вычислительную область помещается горячая область с центром в начало координат и задается профиль энтропии, определяющий форму пузыря. Также задается начальное равенство давлений. В модельных уравнениях принято $\nu = 6 \cdot 10^{-3}$, т. е. задается постоянный коэффициент кинематической вязкости. Задача решается численно с применением компактной схемы Леле шестого порядка точности по пространству и схемы Хаймана третьего порядка точности по времени. В результате получено, что динамика плавучего пузыря состоит из двух фаз: в первой фазе силы плавучести равны скорости изменения момента, во второй — появляется эффект торможения под влиянием граничных условий (искусственный эффект) и торможения плавучести (физический эффект). Выявлено, что верхняя часть плавучего пузыря поднимается, достигая поверхности.

3 Материалы и методы

3.1 Математическая постановка задачи

Пусть в начальный момент времени у нижней границы расчетной области находится крупномасштабный термик, обозначенный – G , с радиусом – r , начальной температурой термика – T_0 , начальной температурой вокруг области G – T_1 и начальной плотностью – ρ (Рис. 1).

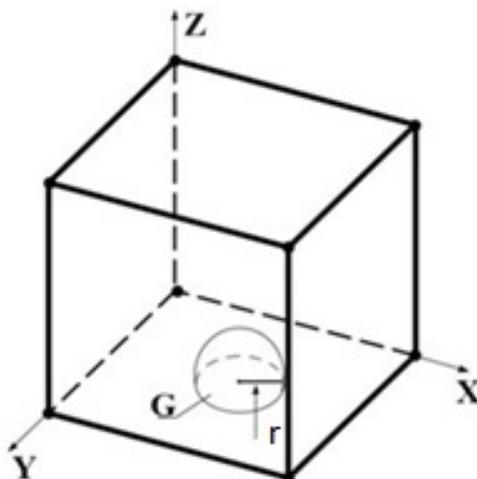


Рисунок 1: Схематическая иллюстрация постановки задачи.

Для решения рассматриваемой задачи используются модель Чепмена-Энскога [18, 19]:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0 \quad (1)$$

Уравнение движения:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u u) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho g \quad (2)$$

Уравнение полной энергии:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho E + p)u_m] = \nabla(\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\tau \cdot u) + \rho u \cdot g \quad (3)$$

где давление – $p = \rho RT$, тензор вязкого напряжения – $\tau = \mu [S - (2/D)(\nabla \cdot u)I]$, вязкость – $\mu = \tau_f p$, теплопроводность – $\lambda = \frac{(D+2)R}{2} \tau_h p = c_p \tau_h p$, здесь $c_p = \frac{(D+2)R}{2}$ – удельная теплоемкость при постоянном давлении, $E = c_v T + |u|^2/2$ – полная энергия.

Уравнение температуры:

$$c_v \left[\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u T) \right] = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - p \nabla \cdot u + \tau \cdot \nabla u \quad (4)$$

где $c_v = DR/2$ удельная теплоемкость.

Данные уравнения решаются с заданными начальными значениями температуры и плотности внутри и вне области G . На нижней границе используется условие Дирихле, а на всех остальных границах условие Неймана.

3.2 Численный метод

Для моделирования динамики термиком применяется модель D3Q27 [20] решения уравнения Больцмана. Решеточные уравнения Больцмана (LBE) является одной из перспективных технологий последнего десятилетия для моделирования физических и атмосферных процессов. Многие сложные проблемы в традиционном CFD могут быть решены в LBM, например, турбулентные течения [21, 22, 23, 24], многофазные течения [25, 26], теплообмен [27, 28], микрофлюиды [29], течения через пористую среду [30] и фрактальную геометрию [31]. Функции распределения f вычисляются путем решения решеточного уравнения Больцмана, которое является особой дискретизацией кинетического уравнения Больцмана. После введения приближения Бхатнагара-Гросса-Крука (BGK) можно сформулировать уравнение Больцмана для потока жидкости и энергии в следующем виде:

$$f_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] \quad (5)$$

$$g_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(x, t) = -\frac{\Delta t}{\tau_\theta} [g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)] \quad (6)$$

где x – радиус-вектор узла решетки, Δt – обозначает решеточный временной шаг, τ – решеточное время релаксации, τ_θ – тепловое время релаксации, e_i – дискретная решеточная скорость в направлении i , f_i – функция распределения плотности в узле i , f_i^{eq} – равновесная функция распределения, зависящая от макроскопических параметров в узле i , g_i – функция распределения энергии в узле i , g_i^{eq} – равновесная функция распределения, зависящая от макроскопических параметров в узле i .

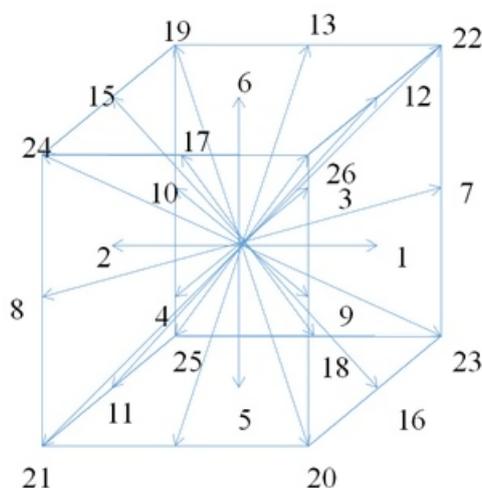


Рисунок 2: Схематическая иллюстрация решетки D3Q27.

Векторы скорости e_0, \dots, e_{26} модели D3Q27 показаны на рисунке 2. Для каждого вектора скорости хранится значение функции распределения f_i .

$$e_i = \begin{cases} (0, 0, 0)c & i = 0 \\ (\pm 1, 0, 0)c, (0, \pm 1, 0)c, (0, 0, \pm 1)c & i = 1 - 6 \\ (\pm 1, \pm 1, 0)c, (0, \pm 1, \pm 1)c, (\pm 1, 0, \pm 1)c & i = 7 - 18 \\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1)c & i = 19 - 26 \end{cases}$$

где $c = \Delta x / \Delta t$ – решеточная скорость и i – направление решеточной скорости.

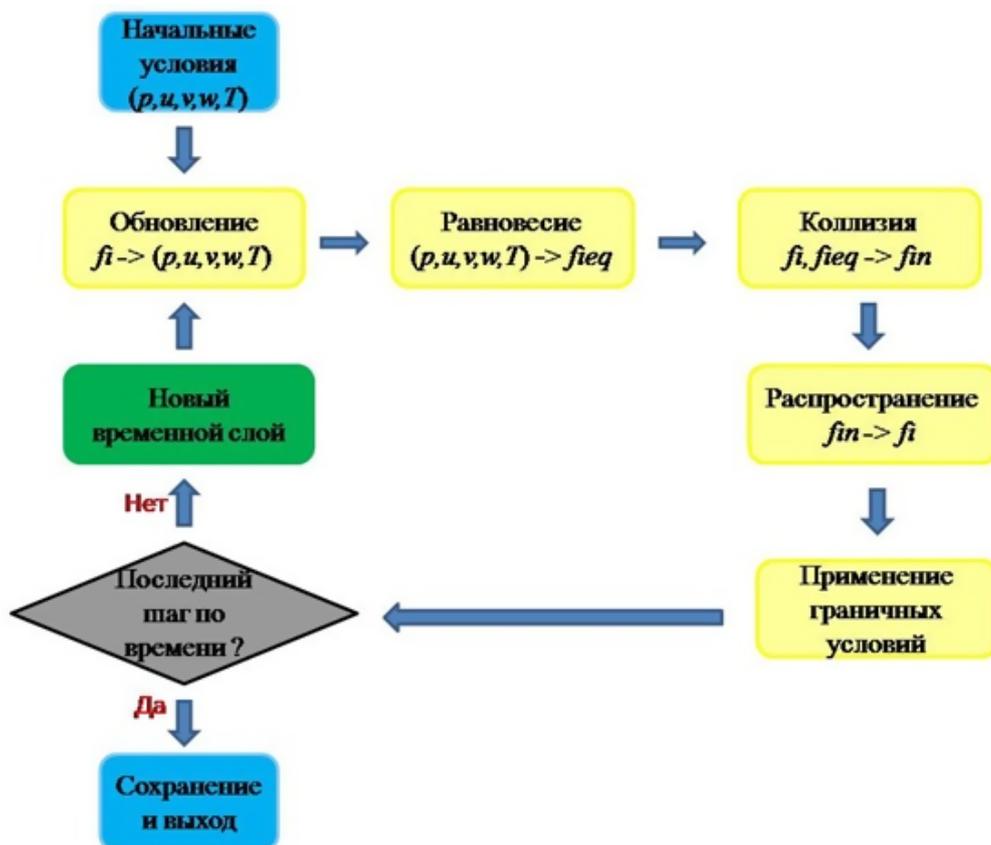


Рисунок 3: Алгоритм реализации решеточного метода Больцмана.

Решеточное время релаксации τ определяется по формуле:

$$\tau = 3\nu - \frac{1}{2}$$

Равновесные функции распределения плотности и энергии Максвелла вычисляются по формуле:

$$f^{eq}(T) = \omega_i \rho \left[1 + \frac{e_i \cdot u}{RT} + \frac{1}{2} \left(\frac{e_i \cdot u}{RT} \right)^2 - \frac{u^2}{2RT} \right]$$

$$g^{eq}(T) = \omega_i \rho \left[\frac{e_i \cdot u}{RT} + \left(\frac{e_i \cdot u}{RT} \right)^2 - \frac{u^2}{2RT} + \frac{1}{2} \left(\frac{e_i^2}{RT} - D \right) \right] + E \cdot f^{eq}$$

где ρ – плотность среды, T – температура среды, $c_s = 1/\sqrt{3} \cdot c$ – решеточная скорость звука и значения весовых коэффициентов ω_i таковы:

$$\omega_i = \begin{cases} 8/27 & i = 0 \\ 2/27 & i = 1 - 6 \\ 1/54 & i = 7 - 18 \\ 1/216 & i = 19 - 26 \end{cases}$$

Уравнение (5) можно разделить на два этапа, столкновение и распространение:

1. $\tilde{f}_i(x, t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)],$
2. $f_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_i(x, t).$

Здесь $\tilde{f}_i(x, t)$ обозначает массу частиц, пришедших в узел по направлению i , столкнувшихся с остальными частицами. На втором этапе столкнувшиеся частицы переносятся в соседние узлы по направлениям i . Данная процедура является аналогичным для функции распределения энергии g_i .

После второго этапа необходимо пересчитать макроскопические переменные плотности, скорости и температуры жидкости как первые два момента функций распределения для каждого узла [18]:

$$\rho = \sum_{i=0}^{26} f_i, \quad \rho u = \sum_{i=0}^{26} e_i f_i, \quad \rho E = \sum_{i=0}^{26} g_i, \quad T = \left[E - \frac{|u|^2}{2} \right] \frac{1}{c_v}$$

На рисунке 3 представлен алгоритм применения решеточного метода Больцмана.

3.3 Численная валидация

Рассмотрим тестовую задачу течение Пуазейля для валидации численного алгоритма. Рассматривается ламинарное течение в трехмерной области с неподвижными параллельными стенками. В неподвижных стенках применена схема mid-link bounce back (BB) в качестве граничных условий. Согласно схеме граница стенки расположена на пол шаге от границ узлов жидкости (boundary fluid nodes). Функции распределения направленные внутрь от границы определяются по формуле:

$$f_i(x_B, t + \Delta t) = \tilde{f}_i(x_B, t)$$

где x_B - координаты точек в границе.

В таблице 2 заданы параметры расчетов тестовой задачи. Высота канала H равна $32h$. Моделирование произведена при различных размерах расчетной области: $N_x \cdot N_y \cdot N_z = 32^3, 64^3, 96^3$ и 128^3 . Максимальная скорость в канале и скорость звука c_s равны 0.1 и 0.5773, соответственно. Кинематическая вязкость $\nu = 9.021 \cdot 10^{-3}$. Число Рейнольдса $Re = V_{\max} \cdot H/\nu = 30$. Параметры релаксации $\tau = 1.2$.

Вдоль оси X поддерживается постоянная разность давлений:

$$\frac{\Delta p}{x_{out} - x_{in}} = \frac{8\eta V_{max}}{(y_{top} - y_{bot})^2}$$

где Δp – разница в давлениях, $\Delta p = p_{out} - p_{in}$, где p_{out} и p_{in} – давление на выходе и входе канала, соответственно, η – динамическая вязкость, V_{max} – максимальная скорость течения в канале, x_{out} и x_{in} – границы выхода и входа соответственно, y_{top} и y_{bot} – границы верхней и нижней стенки соответственно.

Аналитическое решение задачи вычисляются из следующей формулы:

$$u(y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{x_{out} - x_{in}} (y - y_{bot})(y - y_{top}), \quad y_{bot} \leq y \leq y_{top}$$

На рисунке 4 представлено сравнение численного решения с аналитическим решением в сечении $x/H = 0.5$. Течение устанавливается при $t \cdot \nu/H^2 = 0.4875$. Как видно из рисунка численные результаты хорошо согласуются с аналитическим решением.

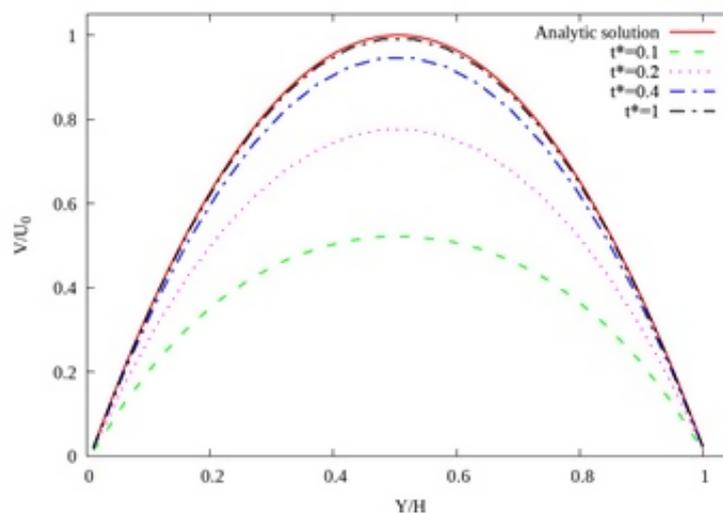


Рисунок 4: Сравнение численного результата с аналитическим решением при различных моментах времени.

На рисунках 5а и 5б представлены профили нормы ошибки L_1 и L_2 при различных размерах сетки. Ошибки нормы L_1 и L_2 были вычислены по следующим формулам:

$$\varepsilon_{L1}(t) = \frac{\sum_{x,y} |q_n(x, y, z, t) - q_b(x, y, z, t)|}{\sum_{x,y} |q_b(x, y, z, t)|}$$

$$\varepsilon_{L2}(t) = \frac{\sqrt{\sum_{x,y} |q_n(x, y, z, t) - q_b(x, y, z, t)|^2}}{\sum_{x,y} |q_b(x, y, z, t)|^2}$$

Как видно из рисунков увеличение разрешения сетки способствует к уменьшению норм ошибок. Если предположить, что известна норма ошибок при различных размерах сетки и что их соотношение размеров каждой сетки к начальному равен m , то можно определить порядок точности по следующей формуле:

$$n(t) = \log_m \left(\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_m(t)} \right).$$

В тестовой задаче ошибки нормы были вычислены в момент времени $t \cdot \nu / H^3 = 1$. Порядки точности численного алгоритма в зависимости размера сетки представлены на таблице 3.

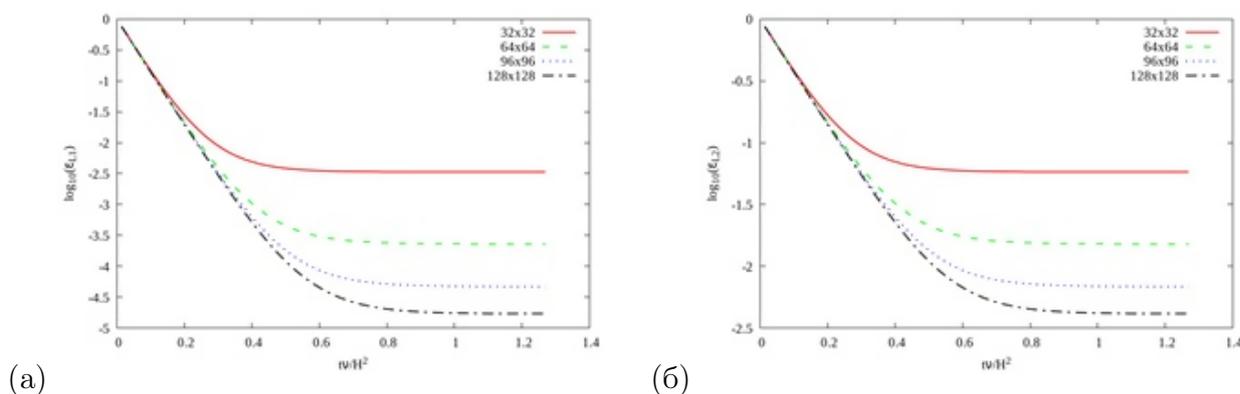


Рисунок 5: Профили ошибки нормы (а) L_1 и (б) L_2 при различных моментах времени.

Таблица 2 – Параметры моделирования.

Параметры	
Фактор масштабирования, $scale$	$scale = 1 \div 3$
Количество точек по оси, x , N_x	$N_x = 32 \cdot scale$
Количество точек по оси, y , N_y	$N_y = 32 \cdot scale$
Количество точек по оси, z , N_z	$N_z = 32 \cdot scale$
Параметр релаксации, τ	$\tau = \sqrt{3/16} + 0.5$
Максимальная скорость в канале, V_{max}	$V_{max} = 0.1/scale$
Кинематическая вязкость, ν	$\nu = (2\tau - 1)/6$
Число Рейнольдса, Re	$Re = V_{max}H/\nu$
Давление на выходе канала, p_{out}	$p_{out} = 1$

Таблица 3 – Порядок точности L_1 и L_2 в зависимости от размера сетки при $t \cdot \nu / H^3 = 1$.

Размер сетки	$u(L_1)$	Порядок (n)	$u(L_1)$	Порядок (n)
$32 \cdot 32 \cdot 32$	3.3738×10^{-4}	–	5.8084×10^{-2}	–
$64 \cdot 64 \cdot 64$	2.3047×10^{-4}	3.8716	1.5181×10^{-2}	1.9358
$96 \cdot 96 \cdot 69$	4.6600×10^{-4}	3.8978	6.8264×10^{-2}	1.9489
$128 \cdot 128 \cdot 128$	1.6972×10^{-4}	3.8175	4.1198×10^{-3}	1.9087

4 Результаты и обсуждение

Представлены результаты численного моделирования эволюции крупномасштабного термика на основе метода LBM. Определена динамика изменения высоты подъема термика зависимости от начальной температуры. Полученные результаты моделирования, определяющий высоту поднятия облака, соответствует результатам работы Онуфриева [12].

Численное моделирование этапа формирования и распространения термика проведено в трехмерной области с физическим размером 300 м высоты, 120 м длины и 120 м ширины и расчетной сеткой $256 \times 128 \times 128$.

Численный эксперимент был проведен при начальной температуре облака $T_0 = 1800 \text{ K}$ и метеорологических параметрах приведенных в рисунке 6.

На рисунках 6-7 представлены графики изменения температуры и высоты термика с течением времени, атак же динамика распространения поля температуры при заданных начальных условиях.

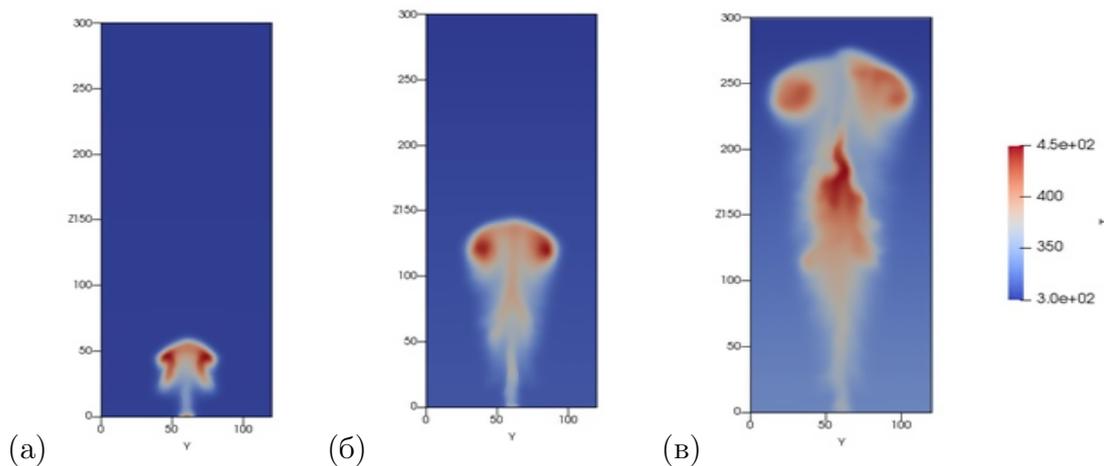


Рисунок 6: Динамика распространения поля температуры при начальном значении $T_0 = 1800 \text{ K}$ (а) $t = 5 \text{ c}$ и (б) $t = 15 \text{ c}$ (в) $t = 35 \text{ c}$ при различных моментах времени.

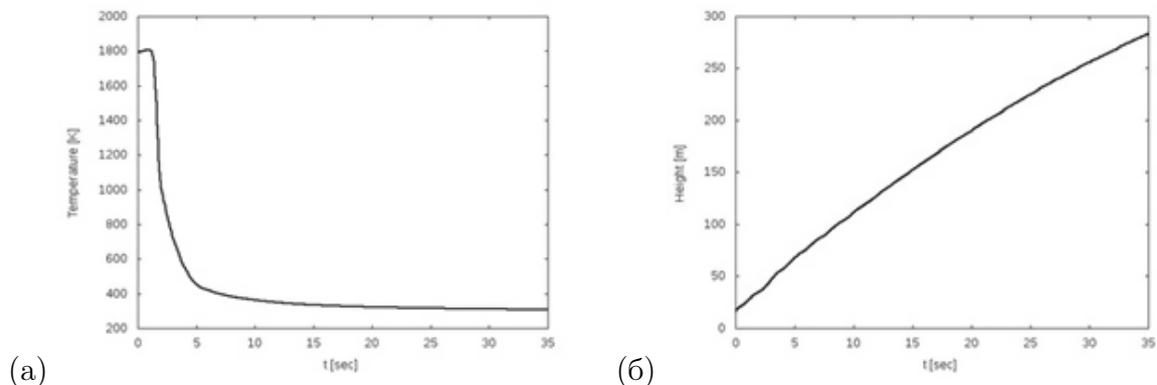


Рисунок 7: Изменение (а) температуры и (б) высоты крупномасштабного термика при начальной температуре 1800 K .

5 Заключение

В данной работе была рассмотрена динамика крупномасштабных термиков под действием силы плавучести, с учетом эффектов турбулентного перемешивания и адиабатического расширения.

Математическая модель крупномасштабного термика построена на основе системы дифференциальных уравнений в частных производных. Были учтены уравнение неразрывности, количества движения, температуры, давления и энергии.

Была поставлена задача о поднятии крупномасштабного термика с заданными начальными температурой и плотностью. К расчетной области применены граничные условия Неймана и Дирихле.

Численный алгоритм основан на решении решеточных уравнений Больцмана в сжимаемой постановке. Используемый численный алгоритм имеет второй порядок точности по времени и по пространству. Порядок точности численного алгоритма оценен с помощью тестовой задачи течение Пуазейля.

Получены результаты численного моделирования динамики крупномасштабных термиков. Определенная зависимость между начальной температурой и высотой поднятия облака соответствуют результатам работы Онуфриева [12].

Список литературы

- [1] Speziale C.G., So R.M.C. Turbulence modeling and simulation. -Florida: Press LLC, 2016. -73
- [2] Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Современные подходы к моделированию турбулентности: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 234 с.
- [3] Kizbayev A., Zhakebayev D., Abdibekov U., Khikmetov A. Mathematical modeling of electron irradiation of oil// Engineering Computations, Vol. 35 Issue: 5, -PP.1998-2009.
- [4] Abdibekov S., Zhakebayev D., Karzhaubayev K., and Abdibekov U. Large eddy simulation the evolution of the cloud explosion of a launch vehicle// Совместный выпуск Вестник Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева и научного журнала Института вычислительных технологий Сибирского отделения РАН ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. -2018, Т. 1, N 3. -С. 7-17.
- [5] Жумагулов Б.Т., Жакебаев Д.Б., Абдибеков У.С., Математическое моделирование вырождения энергии турбулентности на основе гибридного метода// «Вестник НИА РК» № 3 – 2018 г., -С. 9-15.
- [6] Ben-Nasra O., Hadjadj A., Chaudhurib A., Shadloo M.S. Assessment of subgrid-scale modeling for large-eddy simulation of a spatially-evolving compressible turbulent boundary layer // Computers and Fluids. - 2017. - Vol. 151. - P. 144-158.
- [7] Meneveau C., Katz J. Scale-invariance and turbulence models for large eddy simulation // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2000. – Vol. 32. – P.1-32.
- [8] You D., Moin P. A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries // Physics of Fluids. – 2007. – Vol. 19, No. 6. –065110.
- [9] Oran E.S., Boris J.P. Numerical Simulation of reactive flow. – Cambridge University Press, 2001. – 550 p.
- [10] Grinstein F.F., Margolin L.G., Rider W.J. Implicit Large Eddy Simulation. – Cambridge University Press, 2007. – 577 p.
- [11] Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulations // Int. J. of Heat and Fluid Flow. – 2000. – Vol. 21. – P. 252-263.
- [12] Онуфриев А.Т. Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва// Прикладная механика и техническая физика 2 -1967. -С. 3-15.
- [13] Кудряшов Н.А. Влияние вязкости и теплопроводности на всплывание термика под действием сил плавучести, - Москва: Наука, 1985. -135 с.

- [14] Dovgalyuk Y.A., Zatevakhin M.A., Stankova E.N. Numerical Simulation of a Buoyant Thermal Using the Turbulence Model // Journal of applied Meteorology. -1994. -P. 1118-1126.
- [15] Sinjab, I. M., Robertson, J. A., Connon Smith, R. The dissipation factor in contact binaries revisited // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. -1990. -P. 619.
- [16] Hazlehurst, J. The dissipation factor in contact binaries // Astronomy and Astrophysics. -1985. -P. 481-488.
- [17] Brandenburg A., Hazlehurst J. Evolution of highly buoyant thermals in a stratified layer // Astronomy and Astrophysics. -2001. -P. 1092-1102.
- [18] Zhaoli G., Chaguang Z., Baochang S. Thermal lattice Boltzmann equation for low Mach number flow // Physical Review E. -2007. -P. 367.
- [19] Woods L.C. An Introduction to the Kinetic Theory of Gases and Magnetoplasmas. -Oxford: Oxford University Press, 1993. -372 p.
- [20] Kruger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., Viggen, E. M. The Lattice Boltzmann Method. - Springer, 2017. -35 p.
- [21] Chang S.C., yang Y.T., Chen C.K., Chen W.L. Application of the lattice Boltzmann method combined with large-eddy simulations to turbulent convective heat transfer // International Journal of Heat and Mass Transfer. -2013. Vol. 66. -P. 338-348.
- [22] Pradhan A., Yadav S. Large Eddy Simulation using Lattice Boltzmann Method based on Sigma Model // Procedia Engineering. 2015. Vol 127. P. 177-184.
- [23] Sagaut P. Toward advanced subgrid models for Lattice-Boltzmann-based Large-eddy simulation: Theoretical formulations // Computers and Mathematics with Applications. 2010. Vol. 59. P. 2194-2199.
- [24] Grunau D., Chen S., Eggert K. A lattice Boltzmann model for multiphase fluid flows// Phys. Fluids, -1993. -Vol. 5. -P. 2557-2562.
- [25] Amirshaghghi H., Rahimian M.H., Safari H., Krafczyk M. Large Eddy Simulation of liquid sheet breakup using a two-phase lattice Boltzmann method // Computers and Fluids. - 2018. -Vol. 160. - P. 93-107.
- [26] Chen C.K., Chang S.C., Sun S.Y. Lattice Boltzmann method simulation of channel flow with square pillars inside by the field synergy principle // CMES-Comput. Model. Eng. Sci. 2007. Vol. P. 203-215.
- [27] Yang Y.T., Chang S.C., Chiou C.S. Lattice Boltzmann method and large-eddy simulation for turbulent impinging jet cooling // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013.- Vol. 61. - P. 543-553.
- [28] Zhang J. Lattice Boltzmann method for microfluidics: models and applications // Microfluid. Nanofluid. - 2011. - Vol. 10. - P. 1-28.
- [29] Guo Z., Zhao T.S. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media // Phys.Rev.E. -2002. -Vol. 66. - 036304.
- [30] Kuwata Y., Suga K. Large eddy simulations of pore-scale turbulent flows in porous media by the lattice Boltzmann method // International Journal of Heat and Mass Transfer.- 2015. -Vol. 55. -P. 143-157.
- [31] Chang S.C., Hsu Y.S., Chen C.L. Lattice Boltzmann simulation of fluid flows with fractal geometry: an unknown-index algorithm // J.Chin.Soc.Mech.Eng. -2011. -Vol. 32. - P. 523-531.

References

- [1] Speziale C.G., So R.M.C. *Turbulence Modeling and Simulation Handbook of Fluid Dynamics* (Florida: Press LLC, 2016):1-73
- [2] Garbaruk A.V., Strelec M.H., Travin A.K., Shur M.L. "Sovremennye podhody k modelirovaniyu turbulentnosti: ucheb. posobie" [Modern approaches for modeling of turbulence](SPb, Izd-voPolitehn. un-ta, 2016),234 s.
- [3] Assylzhan Kizbayev, Dauren Zhakebayev, Ualikhan Abdibekov, Askar Khikmetov, "Mathematical modeling of electron irradiation of oil", Engineering Computations(2018),pp.1998-2009.

- [4] Abdibekov S., Zhakebayev D., Karzhaubayev K., Abdibekov U., "Large eddy simulation the evolution of the cloud explosion of a launch vehicle", VYChISLITELNYE TEHNOLOGII (2018),7-17 p.
- [5] Zhumagulov B.T., Zhakebaev D.B., Abdibekov U.S., "Matematicheskoe modelirovanie vyrozhdenija jenerгии turbulentnosti na osnove gibridnogo metoda"[Mathematical modeling of turbulence energy by hybrid model], Vestnik NIA RK № 3(2018), 9-15 p.
- [6] Ben-Nasra O., Hadjadj A., Chaudhurib A., Shadloo M.S. "Assessment of subgrid-scale modeling for large-eddy simulation of a spatially-evolving compressible turbulent boundary layer", Computers and Fluids (2017), 144-158 p.
- [7] Meneveau C., Katz J. *Scale-invariance and turbulence models for large eddy simulation*, Annu. Rev. Fluid Mech(2000), 1-32 p.
- [8] You D., Moin P. *A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries*, // Physics of Fluids. – 2007. – Vol. 19, No. 6. –065110.
- [9] Oran E.S., Boris J.P. *Numerical Simulation of reactive flow* (Cambridge University Press, 2001), 550 p.
- [10] Grinstein F.F., Margolin L.G., Rider W.J. *Implicit Large Eddy Simulation*(Cambridge University Press, 2007), 577 p.
- [11] Spalart P.R. "Strategies for turbulence modeling and simulations *Int. J. of Heat and Fluid Flow* (2000), 252-263 p.
- [12] Onufriev A.T. "Teorija dvizhenija vihrevogo kol'ca pod dejstviem sily tjazhesti. Podyem oblaka atomnogo vzryva," *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika*(1967), 3-15 p.
- [13] Kudrjashov N.A. "Vlijanie vjazkosti i teploprovodnosti na vsplyvanie termika pod dejstviem sil plavuchesti"[Humid viscosity and heat capacity of thermals](Moskva: Nauka, 1985), 135 p.
- [14] Dovgalyuk Y.A., Zatevakhin M.A., Stankova E.N. "Numerical Simulation of a Buoyant Thermal Using the Turbulence Model," *Journal of applied Meteorology* 33 (1994): 1118-1126
- [15] Sinjab, I. M., Robertson, J. A., Connon Smith, R. "The dissipation factor in contact binaries revisited," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 244 (1990):619
- [16] Hazlehurst, J. "The dissipation factor in contact binaries," *Astronomy and Astrophysics* 145 (1985): 481-488
- [17] Brandenburg A., Hazlehurst J. "Evolution of highly buoyant thermals in a stratified layer," *Astronomy and Astrophysics* 370 (2001): 1092-1102
- [18] Zhaoli G., Chaguang Z., Baochang S. "Thermal lattice Boltzmann equation for low Mach number flow," *Physical Review E* 75 (2007): 036704
- [19] Woods L.C. "An Introduction to the Kinetic Theory of Gases and Magnetoplasmas," *Oxford University Press* (Oxford: 1993)
- [20] Kruger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., Viggien, E. M. "The Lattice Boltzmann Method," *Springer* 215 (2017): 35
- [21] Chang S.C., yang Y.T., Chen C.K., Chen W.L. "Application of the lattice Boltzmann method combined with large-eddy simulations to turbulent convective heat transfer"*International Journal of Heat and Mass Transfer* (2013), 338-348 p.
- [22] Pradhan A., Yadav S. "Large Eddy Simulation using Lattice Boltzmann Method based on Sigma Model *Procedia Engineering* (2015), 177-184 p.
- [23] Sagaut P. "Toward advanced subgrid models for Lattice-Boltzmann-based Large-eddy simulation: Theoretical formulations"*Computers and Mathematics with Applications* (2010), 2194-2199 p.
- [24] Grunau D., Chen S., Eggert K. "A lattice Boltzmann model for multiphase fluid flows *Phys. Fluids*. (1993), 2557–2562 p.
- [25] Amirshaghghi H., Rahimian M.H., Safari H., Krafczyk M. "Large Eddy Simulation of liquid sheet breakup using a two-phase lattice Boltzmann method *Computers and Fluids*(2018), 93-107 p.
- [26] Chen C.K., Chang S.C., Sun S.Y. "Lattice Boltzmann method simulation of channel flow with square pillars inside by the field synergy principle *CMES-Comput. Model. Eng. Sci.* (2007), 203–215.
- [27] Yang Y.T., Chang S.C., Chiou C.S. "Lattice Boltzmann method and large-eddy simulation for turbulent impinging jet cooling *International Journal of Heat and Mass Transfer*(2013), 543-553.

- [28] Zhang J. *"Lattice Boltzmann method for microfluidics: models and applications Microfluid. Nanofluid(2011), 1–28.*
- [29] Guo Z., Zhao T.S. *"Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media Phys.Rev.E.(2002), 036304.*
- [30] Kuwata Y., Suga K. *"Large eddy simulations of pore-scale turbulent flows in porous media by the lattice Boltzmann method"International Journal of Heat and Mass Transfer(2015), 143-157.*
- [31] Chang S.C., Hsu Y.S., Chen C.L. *"Lattice Boltzmann simulation of fluid flows with fractal geometry: an unknown-index algorithm J.Chin.Soc.Mech.Eng.(2011), 523–531.*