МРНТИ 27.31.44

Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений

Алдашев С.А., Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273758720, E-mail: aldash@mail.ru

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. В цилиндрической области евклидова пространства для одного класса многомерных эллиптических уравнений рассматривается спектральная задача Дирихле с однородными краевыми условиями. Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, которые существенно зависят от высоты цилиндра.

Ключевые слова: многомерное эллиптическое уравнение, спектральная задача Дирихле, многомерная цилиндрическая область, разрешимость, критерия.

Цилиндрлік облыста бір класс көп өлшемді эллиптикалық теңдеулерге спектрлік Дирихле есебінің бір мәнді шешімділік критериясы

Алдашев С. А., Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Қазақстан Республикасы, Алматы қ. +77273758720, E-mail: aldash@mail.ru

Комплексті айнымалы аналитикалық функциялар теориясының әдісімен жазықтықта эллиптикалық теңдеулерге шеттік есептердің біршешімділігі жақсы қарастырылған. Тәуелсіз айнымалылар екіден көп болғанда, осы мәселелерді зерттегенде көп қиындықтар кездеседі. Көп өлшемді сингулярлық интегралдар теориясы толық емес болғандықтан, белгілі сингулярлық интегралдар әдісін пайдалану күшін жоғалтады. Евклидтік кеңістікте цилиндрлік облыста бір класс көп өлшемді эллиптикалық теңдеулерге бір текті шеттік шарты бар спектрлік Дирихле есебі қарастырылған. Шешімі көп өлшемді сферикалқ функциялар жіктеулері түрінде қарастырылады. Шешімі бар және жалғыз екендігі дәлелденген. Қойылған есептің бір мәнді шешімділік шарты алынған. Ол шарт цилиндрдің биіктігіне тікелей байланысты.

Түйін сөздер: көп өлшемді эллиптикалық теңдеу, спектрлік Дирихле есебі, көп өлшемді цилиндрлік облыс, шешімділік, критерия

A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem in a cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations

Aldashov S.A., Kazakh national pedagogical university after Abay, Almaty, Kazakhstan, +77273758720, email: aldash51@mail.ru

Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analitic function theory of complex variable. There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lock of any complete theory of multidimensional singular integral equations. In the cylindrical domain of Euclidean space, for a single class of multidimensional elliptic equations, the spectral Dirichlet problem with homogeneous boundary conditions is considered. The solution is sought in the form of an expansion in multidimensional spherical functions. The existence and uniqueness theorems of the solution are proved. Conditions for unique solvability of the problem are obtained, which essentially depend on the height of the cylinder.

Key words: multidimensional elliptic equation, Dirichlet spectral problem, multidimensional cylindrical domain, solvability, criterion.

1 Введение

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного изучены в (Бицадзе,1959),(Бицадзе,1996).

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений (Бицадзе,1981).

В работе получен критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

2 Обзор литературы

Однозначная разрешимость классического решения задачи Дирехле в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений доказаны в (Алдашев,2012а:3-7),(Алдашев,2012б:7-13) а также получен ее явный вид.

Однако, спектральная задача Дирихле в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений не изучена.

3 Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_\alpha-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$, плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=0$, где $|x|-$ длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α обозначим через Γ_α, S_α, S_0 соответственно.

В области Ω_α рассмотрим многомерные эллиптические уравнения со спектральным действительным параметром γ

$$\Delta_x u+u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u=\gamma u, \tag{1}$$

где Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m\geq 2$.

В качестве многомерной спектральной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу

Задача D. Найти решение уравнения (1) в области Ω_α из класса $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_\alpha}=0,\quad u\Big|_{\Gamma_\alpha}=0,\ u\Big|_{S_0}=0. \tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\geq 0$, $0\leq\theta_1<2\pi$, $0\leq\theta_i\leq\pi$, $i=2,3,...,m-1$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leq k\leq k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l=0,1,...-$ пространства Соболева.

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$. Если $l\geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)|\leq c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{2l}|f_n^k(r)|^2\leq c_2,\ \ c_1,\,c_2=const.$$

Через $\widetilde{a}_{in}^k(r,t),\ a_{in}^k(r,t),\ \widetilde{b}_n^k(r,t),\ \widetilde{c}_n^k(r,t),\ \rho_n^k$, обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho,\ a_i\frac{x_i}{r}\rho,\ b(r,\theta,t)\rho,\ c(r,\theta,t)\rho,\ \ \rho(\theta),\ \ i=1,...,m$, причем $\rho(\theta)\in C^{\infty}(H)$, $H-$ единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(x,t),\,b(x,t),\,c(x,t)\in W_2^l(\Omega_\alpha)\subset C(\overline{\Omega_\alpha}),\ \ l\geq m+1,\ \ i=1,...,m$, $c(x,t)-\gamma\leq 0,\ \ \forall(x,t)\in\Omega_\alpha$.

Тогда справедлива

Теорема. 1) Если $\gamma\geq-\mu_{s,n}^2$, то задача D имеет только нулевое решение; 2) При $\gamma<-\mu_{s,n}^2$, задача D имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\sin\alpha\sqrt{|\gamma+\mu_{s,n}^2|}\neq 0,\ \ s=1,2,..., \qquad (4)$$

где $\mu_{s,n}-$ нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z), n=0,1,....$

Отметим, что при $a_i(x,t)=b(x,t)=c(x,t)=0$, $i=1,...,m$ эта теорема получена в (Алдашев,2012:22-26).

4 Доказательство

Единственность решения задача D следует из принципа экстремума для эллиптических уравнений (Бицадзе,1966).

Теперь переходим к ее разрешимости. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$Lu\equiv u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{\delta u}{r^2}+u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=\gamma u, \qquad (5)$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1=1,\ g_j=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

Известно (Михлин,1962), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-\ -2)$, $n=0,1,\dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи D будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$– функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H для $\bar{u}_n^k$ получим (Бицадзе,1966),(Бицадзе,1981).

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1+\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1+\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1-\gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k+\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k+\sum_{i=1}^m a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k+\left[\tilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-1}^k-na_n^k)\right]\bar{u}_n^k-\gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k\right\}=0. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1+\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\frac{(m-1)}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=\gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1, \tag{8}$$

$$\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k+\rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k+\frac{(m-1)}{r}\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar{u}_1^k=\gamma\rho_1^k\bar{u}_1^k-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right),\ n=1,\ k=\overline{1,\ k_1}, \tag{9}$$

$$\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k+\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k=\gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k+\right.$$
$$\left.+\left[\tilde{c}_{n-1}^k-\sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{n-1}^k)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\},\ k=\overline{1,\ k_n},\ n=2,3\ldots. \tag{10}$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1, а уравнение (10) - от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместо с (8), приходим у уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,....$– решение системы (8) - (10), то оно является и решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)-(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k+\bar{u}_{ntt}^k+\frac{(m-1)}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=\gamma\bar{u}_n^k+\bar{f}_n^k(r,t), \tag{11}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t)\equiv$ $\equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2), в силу (6) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=0,\ \bar{u}_n^k(1,t)=0,\ \bar{u}_n^k(r,0)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots. \tag{12}$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$, получим

$$\bar{u}_{nrr}^k+u_{ntt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}u_n^k=\gamma u_n^k+f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$u_n^k(r,\alpha)=0,\ u_n^k(1,t)=0,\ u_n^k(r,0)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,...,\tag{14}$$
$$\bar\lambda_n=\frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\ f_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar f_n^k(r,t).$$

Решение задачи (13), (14) будем искать в виде

$$u_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t),\tag{15}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^k(t)R_s(r).\tag{16}$$

Подставляя (15) в (13), (14), с учетом (16), получим

$$R_{srr}+\frac{\bar\lambda_n}{r^2}R_s+(\mu-\gamma)R_s=0,\ 0<r<1,\tag{17}$$
$$R_s(1)=0,\ \left|R_s(0)\right|<\infty,\tag{18}$$
$$T_{stt}-\mu_{s,n}T_s(t)=a_{ns}^k(t),\ 0<t<\alpha,\tag{19}$$
$$T_s(\alpha)=0,\ T_s(0)=0.\tag{20}$$

Ограниченным решением задачи (17), (18) является (Камке,1965)

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r),\tag{21}$$

где $\nu=n+\frac{(m-2)}{2},\ \mu=\gamma+\mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (19) представимо в виде (Камке,1965)

$$T_{s,n}(t)=\begin{cases}c_{1s}\operatorname{ch}t\sqrt{\mu}+c_{2s}\operatorname{sh}t\sqrt{\mu}+\dfrac{\operatorname{ch}t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\xi\sqrt{\mu}d\xi-\\ -\dfrac{\operatorname{sh}t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\xi\sqrt{\mu}d\xi,\ \mu>0,\\ c_{1s}+c_{2s}t-\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)(t-\xi)d\xi,\ \mu=0,\\ c_{1s}\cos t\sqrt{|\mu|}+c_{2s}\sin t\sqrt{|\mu|}+\dfrac{\cos t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\sin\xi\sqrt{|\mu|}d\xi-\\ -\dfrac{\sin t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\cos\xi\sqrt{|\mu|}d\xi,\ \mu<0,\end{cases}\tag{22}$$

c_{1s}, c_{2s}– произвольные постоянные, удовлетворив которого условию (20) будем иметь

$$\begin{cases}c_{1s}=0,\ c_{2s}\sqrt{\mu}\operatorname{sh}\alpha\sqrt{\mu}=\operatorname{sh}\alpha\sqrt{\mu}\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\xi\sqrt{\mu}d\xi-\operatorname{ch}\alpha\sqrt{\mu}\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\xi\sqrt{\mu}d\xi,\ \mu>0,\\ c_{2s}\alpha=\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)(\alpha-\xi)d\xi,\ \mu=0,\\ c_{2s}\sqrt{|\mu|}\sin\sqrt{|\mu|}\alpha=\sin\alpha\sqrt{|\mu|}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\cos\xi\sqrt{|\mu|}d\xi-\cos\alpha\sqrt{|\mu|}\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\sin\xi\sqrt{|\mu|}d\xi,\ \mu<0.\end{cases}\tag{23}$$

Подставляя (21) в (16) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t)J_\nu(\mu_{s,n}r). \tag{24}$$

Ряд (24)- разложения в ряд Фурье-Бесселя (Михлин,1962),если

$$a_{ns}^k(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2}\int_0^1 \sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{25}$$

$\mu_{s,n},\ s = 1,2,...-$ положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (21),(22), (23) найдем решение задачи (13), (14)

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{26}$$

где $a_{ns}^k(t)$ находится из (25).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) $(n = 0)$, а затем (9), (12)$(n = 1)$ и т.д. найдем последовательно все $u_n^k(r,t)$ из (26),$k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots$.

Итак, в области Ω_α, имеет место

$$\int_H \rho(\theta)(L-\gamma)udH = 0. \tag{27}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0,\ V_0-$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)-$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1,\ V_1-$ плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in \in V,\ V = V_0 \otimes H \otimes V_1-$ плотна в $L_2(\Omega_\alpha)$ (Колмогоров,1976).

Отсюда и из (27), следует, что

$$\int_{\Omega_\alpha} f(r,\theta,t)(L-\gamma)ud\Omega_\alpha = 0$$

и

$$Lu = \gamma u,\ \forall(r,\theta,t) \in \Omega_\alpha.$$

Таким образом, решением задачи D является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}}T_{s,n}(t)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{28}$$

где $T_{s,n}(t)$ определяется из (22).

Из (4), (23) следует, что $c_{2s} = 0$, при $\mu \geq 0$ и для $\mu < 0$ $c_{2s} = 0$, если выполняется условие (4).

Следовательно, из (22), (26) следует, что

$$T_{s,n}(t) = 0$$

и

$$u_n^k(r,t) = a_{ns}^k(t) = 0,\ s = 1,2,...,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots .$$

Далее, из (28) в свою очередь получим $u = 0$ в Ω_α.

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение задачи D будем искать в виде (6), от приходим к краевой задаче (13), (14).

В силу (22), (23) ее решением является функция

$$u_n^k(r,t) = \sqrt{r}\left[\sin t\sqrt{|\gamma+\mu_{l,n}^2|} + \frac{\cos t\sqrt{|\gamma+\mu_{l,n}^2|}}{\sqrt{|\gamma+\mu_{l,n}^2|}}\int\limits_0^t a_{l,n}(\xi)\sin\xi\sqrt{|\gamma+\mu_{l,n}^2|}d\xi - \right.$$
$$\left. -\frac{\sin t\sqrt{|\gamma+\mu_{l,n}^2|}}{\sqrt{|\gamma+\mu_{l,n}^2|}}\int\limits_0^t a_{l,n}(\xi)\cos\xi\sqrt{|\gamma+\mu_{l,n}^2|}d\xi\right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r).$$

Следовательно, нетривиальное решение задачи D записывается в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta). \tag{29}$$

Учитывая формулу (Михлин,1962) $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, а также оценки (Тихонов,1977),(Бицадзе,1959)

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu \geq 0,$$
$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ c_1, c_2 = const,\ j = \overline{1,m-1},\ q = 0,1,\dots ,$$

$\Gamma(z)-$ гамма-функция, а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1), как в (Алдашев,2012а:3-7),(Алдашев,2012б:7-13), можно показать, что если $p > \frac{3m}{2}$, то функция (29) принадлежит искомому классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Разрешимость задачи D установлено.

Теорема доказано.

5 Заключение

В работе получен критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

6 Благодарность

Работа выполнена при поддержке гранта 3492/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Список литературы

[1] *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994 - 170 с.

[2] *Алдашев С.А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения,- 1998, Т. 34, № 1. -С. 64 - 68.

[3] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. Сер.,Сер.мат., мех., инф., - 2012, Т. 12, Вып. 3. -С. 3 - 7.

[4] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник НГУ, сер. мат., мех., инф.,- 2012, Т. 12, Вып. 1. -С. 7 - 13.

[5] *Алдашев С.А.* Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Второй межд. российско-узбекский симп."Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик, НИИ ПМА КБНЦ РАН,2012.-с. 22-26

[6] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, М.: Наука, 1974 - 295 с.

[7] *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа,М.: Изд. АН СССР, 1959 - 164 с.

[8] *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М.:Наука, 1966-203 с.

[9] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных, М.: Наука, 1981-448 с.

[10] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965 - 703 с.

[11] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1976 - 543 с.

[12] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962 - 254 с.

[13] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики, М.:Наука, 1977 - 659 с.

References

[1] *Aldashev S.A.* Boundary Value Problems for Many-dimensional Hyperbolic and Hybrid Equations. Almaty: Gylym, 1994. P. 170.

[2] *Aldashev S.A.* On the Darboux problem for a class of multidimensional hyperbolic equations. Differentsial'nye uravneniia]Differential Equations], 1998, Vol. 34, No. 1, pp. 64-68

[3] *Aldashev S.A.* Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation // Izv. Saratov. un-ta. New Ser., Ser.mat., Fur., Inf., - 2012, Vol.12, Vol. 3.- P. 3 - 7.

[4] *Aldashev S.A.* Correctness of Dirichlet's Problem in a Cylindric Domain for a Single Class of Many-dimensional Elliptic Equations // Vestnik of NGU. Series Mathematics, Mechanics, Informatics, -2012. Vol. 12, issue 1. P. 7 - 13.

[5] *Aldashev S.A.* A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem for the multidimensional hyperbolo-parabolic equation // Second Int. Russian-Uzbek symposium "Equations of mixed type, related problems of analysis and informatics". Nalchik, Research Institute of PMA KBSC RAS, 2012.-p. 24-27.

[6] *Baitman G., Erdei A.* Higher transcendental functions, vol.2, M .: The science, 1974 - 295 p.

[7] *Bitsadze A.B.* Mixed-type Equations. Moscow: Akad. Nauk USSR, 1959. P. 164.

[8] *Bitsadze A.B.* Boundary value problems for elliptic equations of the second order Moscow: Nauka. 1966. P. 203.

[9] *Bitsadze A.B.* Some classes of equations in partial derivatives Moscow: Nauka. 1981. P. 448.

[10] *Kamke E.* Handbook of Ordinary Differential Equations, Moscow: The science, 1965 - 703 p.

[11] *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the theory of functions and functional analysis, Moscow: The science, 1976 - 543 p.

[12] *Mikhlin S.G.* Multidimensional singular integrals and integral equations, M .: Fizmatgiz, 1962 - 254 p.

[13] *Tikhonov A.N., Samarsky A.A.* Equations of mathematical physics. M., Nauka, 1966, 724 p.