

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

МРНТИ 27.35.21: 27.35.14;

**Численное моделирование уравнений эллиптического типа на
неструктурированных сетках**

Исахов А.А*., Алпар С.Д., Жазылбеков Н.,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы,
Республика Казахстан, +77056108050,
*E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

В реальности большинство физических процессов описываются уравнениями в частных производных. Одинаково с этим, многие прикладные задачи требуют расчетов в областях, имеющую сложную геометрическую форму. Описание расчетных областей со сложной геометрической формой лучше всего производится на неструктурированной сетке. Важным достоинствам неструктурированной сетки является простота генерации. Для этого большое предпочтение отдается методам, которые могут быть применимы на неструктурированной сетке. Таким методом является метод конечного объема. Одно из преимуществ данного метода является выполнение локальных и глобальных законов сохранения и это очень важно при решении многих прикладных задач. В представленной работе описывается разновидности сеток, их преимущества и недостатки, а также рассматривается метод конечного объема и выбор формы конечного объема, производится дискретизация методом конечного объема уравнения Пуассона на структурной сетке, описываются и выводятся формулы нахождения площадей, объемов и нормалей. Целью данной работы является дальнейшее применение метода конечного объема и получение аппроксимации уравнения Пуассона в двухмерном и трехмерном случае на неструктурированной и гибридной сетке. В итоге приводятся численные результаты для неструктурированной и гибридной сетки, а также полученные данные сравниваются с аналитическими результатами, что показывает хорошее совпадение результатов. Полученные численные значения отражаются в работе в виде графиков.

Ключевые слова: уравнения Пуассона, неструктурированная сетка, гибридная сетка, метод конечного объема.

Құрылымсыз торлардағы эллиптикалық типтегі теңдеулерді сандық модельдеу
Исахов А.А*., Алпар С.Д., Жазылбеков Н., ал-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77056108050,
*E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

Көптеген физикалық процесстер дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен сипатталады. Сонымен қатар, көптеген қолданбалы есептер күрделі геометриялық пішіндегі облыстарда есептеуді қажет етеді. Күрделі геометриялық пішіндегі есептеу облысын сипаттау құрылымсыз торда жүзеге асыру тиімді. Құрылымсыз тордық ең маңызды артықшылық генерацияның қарапайымдылығы. Сондықтан құрылымсыз торда пайдаланылатын әдістерге көп көңіл бөлінеді. Сондай әдістердің бірі ақырлы көлем әдісі болып табылады. Бұл әдістің артықшылықтарының бірі көптеген қолданбалы есептерді шешуде маңызы зор локальды және глобалды сақталу заңдарының орындалуы. Берілген жұмыста торлардың түрлері, олардың артықшылығы мен кемшілігі сипатталады және ақырлы көлем әдісі және ақырлы көлем пішінін таңдау қарастырылады, құрылымды торда Пуассон теңдеулерін дискреттеу ақырлы көлем әдісімен жүзеге асырылады, аудан, көлем және нормаль табу формулалары шығарылады және сипатталады.

Жұмыстың мақсаты құрылымсыз және гибриді торда екі өлшемді және үш өлшемді түрдегі Пуассон теңдеуінің аппроксимациялауда ақырлы көлем әдісін қолдану болып табылады. Соңында құрылымсыз және гибриді торлар үшін сандық нәтижелер келтіріледі, сонымен қатар, алынған деректер аналитикалық нәтижелермен салыстырылады, ол нәтижелердің сәйкестігін көрсетеді. Жұмыста алынған сандық мәндер график түрінде көрсетіледі.

Түйін сөздер: Пуассон теңдеуі, құрылымсыз тор, гибриді тор, ақырлы көлем әдісі.

Numerical modeling of elliptic equations on unstructured grids

Issakhov A.A.*., Alpar S., Zhalylbekov N., al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Republic of Kazakhstan, +77056108050,

*E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

In reality, most of the physical processes are described by partial differential equations. At the same time, many application tasks require calculations in areas with complex geometry. Description of computational areas with complex geometric shape is best performed on unstructured grids. An important advantage of unstructured grid is simplicity of generation. For this purpose a large preference was given for methods that can be applied on unstructured grids. This method is a finite volume method. One of the advantages of this method is performing of local and global conservation laws, and this is very important in solving many applied problems. In the present work the variety of nets with their advantages and disadvantages are described, also the final volume method and choice of the shape of final volume are considered, discretization of the Poisson equation by finite volume method is made on the structural grid, formulas of finding areas, volumes and normal are described and displayed. The aim of this work is the further application of the finite volume method, and obtaining approximation of the Poisson equation in two-dimensional and three-dimensional cases on unstructured and hybrid grid. Finally, numerical results for unstructured and hybrid grids, as well as the data that obtained are compared with the analytical results, which shows good agreement. The numerical values are illustrated in the work in the form of plots.

Key words: Poisson equation, unstructured mesh, hybrid mesh, finite volume method.

1 Введение

При решении прикладных задач гидроаэродинамики одной из проблем является расчетная область. Для описания расчетной области используются различные виды расчетных сеток. Среди расчетных сеток можно выделить два основных класса (Fletcher and etc., 2013: 401), (Chung, 2002: 1012):

1. Структурированные сетки (регулярные сетки).
2. Неструктурированные сетки (нерегулярные сетки)

Структурированные сетки, показанные на рисунке 1, широко применяются в области вычислительной гидроаэродинамики. При создании регулярной сетки, сеточные узлы представляют собой упорядоченную структуру, имеющую ярко выраженные сеточные направления. Основным преимуществом использования структурированной сетки является сохранение канонической структуры соседей для узлов сетки. В двумерном случае ячейками расчетной сетки служат четырехугольники, а в трехмерном случае — шестигранники. Данный вид сеток бывает двух типов: сетки с фиксированным (постоянным) шагом и сетки с переменным шагом, при этом шаг может быть постоянным по одной из осей координат и переменным по другой. Регулярные сетки позволяют использовать различные методы дискретизации, в частности метод конечных разностей и метод конечных объемов (Moukalled and etc., 2015: 791), (Versteeg and etc., 2007: 520).

2 Обзор литературы

При создании регулярных сеток в сложных геометрических областях используют преобразование координат для построения равномерной расчетной сетки, а также её расчетная математическая модель записывается в криволинейных координатах (Pletcher and etc.: 2011: 774), (Issakhov: 2015: 229-238), (Issakhov: 2016: 1082-1096), (Issakhov: 2011: 1282-1288).

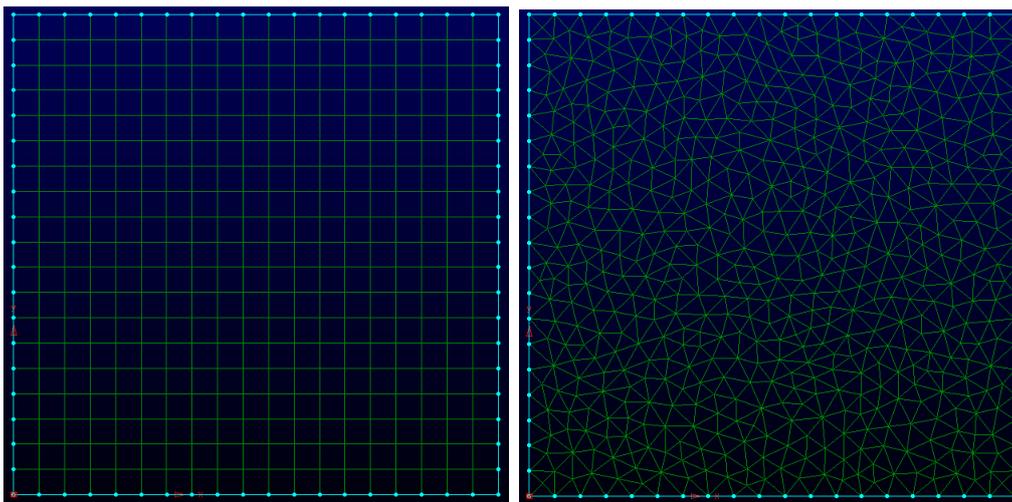


Рисунок 1 – Структурная сетка

Рисунок 2 – Неструктурированная сетка

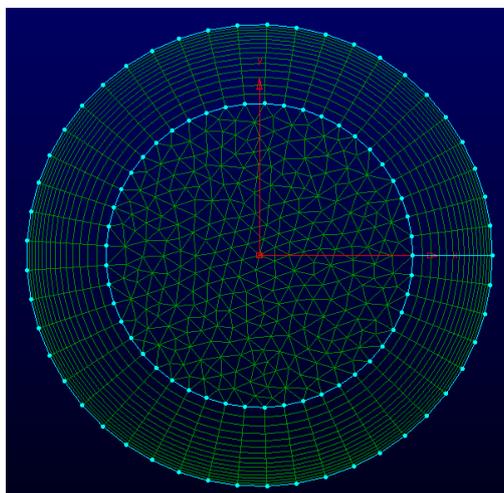


Рисунок 3 – Гибридная сетка

Главной отличительной чертой неструктурированных сеток, показанных на рисунке 2, является хаотичное расположение узлов сетки в расчетной области, и как следствие отсутствуют сеточные направления и невозможно упорядочить узлы сетки. В качестве ячейки сетки рассматриваются многогранники в трехмерном случае или многоугольники в двумерном случае произвольной формы. Как правило, в двумерном случае используются треугольники, в трехмерном случае — тетраэдры. Использование более сложных

геометрических фигур является нерациональным в процессе построения сетки. Нерегулярные сетки позволяют использовать различные методы дискретизации, в частности метод конечных объемов или метод конечных элементов (Ferziger and etc.: 2013: 426), (Peyret, 1983: 358), (Roache, 1972: 434).

Существует множество способов триангуляции расчетной области через заданные точки, но при любом способе триангуляции мы получим одинаковое количество треугольников.

Триангуляция расчетной области производится по определенным критериям. Один из критериев триангуляции заключается в том, чтобы полученные треугольники стремились к равносторонним, то есть углы треугольника не должны быть слишком острыми. Другой из критериев триангуляции состоит в том, чтобы построенные треугольники не сильно отличались по площади с соседними треугольниками (критерий равномерности сетки).

Основным недостатком нерегулярной сетки является необходимость знания данных о структуре сетки, что приводит к большим затратам вычислительных ресурсов (вычислительной памяти).

Положительными свойствами неструктурированных сеток являются:

а) применение данных вычислительных сеток к большому количеству прикладных задач;

б) минимальные затраты времени при построении неструктурированной сетки в отличие от регулярных сеток для сложных геометрических объектов;

в) выполнение сгущения определенных участков вычислительной сетки естественным способом.

Сочетание структурированных и неструктурированных сеток образуют так называемые гибридные сетки (рисунок 3), которые позволяют использовать преимущества определенных сеток и уменьшить недостатки того или иного типа сеток. Гибридные сетки часто используются при решении прикладных задач механики жидкости и газа.

3 Постановка задачи

Для двух вариантов задач численные решения сравниваются с аналитическими решениями. Для проверки численного алгоритма на неструктурированной и гибридной сетке используется уравнение Пуассона, которое имеет аналитическое решение. В данной работе рассматриваются две задачи. В первой задаче рассматривается двухмерное уравнение Пуассона, которое решается на неструктурированной сетке. Во второй задаче рассматривается трехмерное уравнение Пуассона, которое решается на неструктурированной и гибридной вычислительных сетках.

Первая задача (двухмерное уравнение):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3u &= -2 \sin(x + 2y) + 16e^{2x+3y} \\
 u|_{x=0} &= \sin(x + 2y) + e^{2x+3y} \\
 u|_{x=0.25} &= \sin(x + 2y) + e^{2x+3y} \\
 u|_{y=0.5} &= \sin(x + 2y) + e^{2x+3y} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 2 \cos(x + 2y) + 3e^{2x+3y}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Это уравнение имеет аналитическое решение такого вида:

$$u = \sin(x + 2y) + e^{2x+3y} \quad (2)$$

Вторая задача (трехмерное уравнение):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 10u &= -4 \cos(3x + y - 2z) + 12e^{x-z} + 10 \\ u|_{x=0} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ u|_{x=0.25} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ u|_{y=0} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ u|_{y=0.5} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ u|_{z=0} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0.5} &= 2 \sin(3x + y - 2z) - e^{x-z} \end{aligned} \quad (3)$$

Это уравнение имеет аналитическое решение такого вида:

$$u = \cos(3x + y - 2z) + e^{(x-z)} + 1 \quad (4)$$

4 Материал и методы

Уравнение Пуассона аппроксимируется с помощью метода контрольного объема и численно решается методом Якоби. Для применения аппроксимации методом контрольного объема используется теорема Гаусса-Остроградского с дальнейшей заменой поверхностного интеграла на конечную сумму и имеет такой вид (Mazumder, 2015: 484), (Mazumder, 2015: 484), (Versteeg and etc., 2007: 520), (Chung, 2002: 1012), (Ferziger and etc.: 2013: 426):

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (k \nabla \phi) dV = \int_S k \nabla \phi \cdot \bar{n} dA \quad (5)$$

Так как количество граней ограничено, мы можем заменить поверхностный интеграл суммой.

$$\int_S k \nabla \phi \cdot \bar{n} dA \approx \sum_f k_f (\nabla \phi)_f \cdot \bar{n}_f A_f = S_{\phi,0} V_0 \quad (6)$$

Следующая задача состоит в том, чтобы выразить $(\nabla \phi)_f \cdot \bar{n}_f$ через значения ячеек центра. Для этого рассмотрим оператор Набла.

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{k} \right) \quad (7)$$

Выше приведенный оператор Набла можно расписать и по другому базису векторов. То есть для единичного вектора нормали и двух единичных касательных на плоскости, перпендикулярной плоскости вектора нормали.

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\bar{n} + \frac{\partial\phi}{\partial t_1}\bar{t}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial t_2}\bar{t}_2 \right) \quad (8)$$

Подобным образом и для нового базиса:

$$\nabla\phi = [(\nabla\phi) \cdot \bar{n}]\bar{n} + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_1]\bar{t}_1 + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_2]\bar{t}_2 \quad (9)$$

Двумерный случай на неструктурированной сетке (рисунок 4).

$$\nabla\phi = [(\nabla\phi) \cdot \bar{n}_f]\bar{n}_f + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_f]\bar{t}_f \quad (10)$$

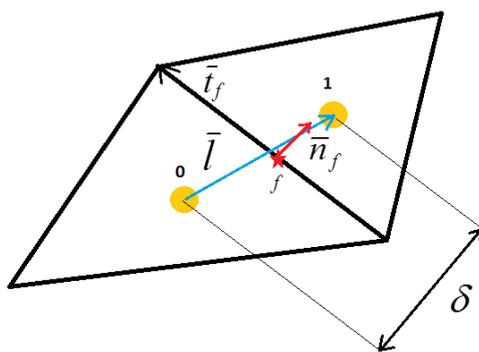


Рисунок 4 – Две соседние ячейки неструктурированной сетки

Рассмотрим вектор \bar{l} , соединяющий два центра соседних ячеек. Выполним скалярное умножение вектора \bar{l} с оператором Набла.

$$(\nabla\phi)_f \cdot \bar{l} = [(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f]\delta_f + [(\nabla\phi)_f \cdot \bar{t}_f]\bar{t}_f \cdot \bar{l} \quad (11)$$

Чтобы аппроксимировать $(\nabla\phi)_f \cdot \bar{l}$ для центров ячеек, разложим в ряд Тейлора и в ходе нетривиальных действий получаем:

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f &= \frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta_f} - \frac{[(\nabla\phi)_f \cdot \bar{t}_f]\bar{t}_f \cdot \bar{l}}{\delta_f} \\ J_f &= [(\nabla\phi)_f \cdot \bar{t}_f]\bar{t}_f \cdot \bar{l} \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим отдельно J_f .

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)_f \cdot \bar{t}_f &= \frac{\phi_a - \phi_b}{|\bar{t}_f|} \\ J_f &= \left(\frac{\phi_a - \phi_b}{|\bar{t}_f|} \right) \bar{t}_f \cdot \bar{l} \end{aligned} \quad (13)$$

В конечно итоге аппроксимация двумерного случая выглядит следующим образом:

$$\sum_f k_f (\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f A_f = \sum_f k_f \left(\frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta_f} - \left[\frac{\phi_a - \phi_b}{\delta_f |\bar{t}_f|} \right] \bar{t}_f \cdot \bar{l}_f \right) A_f = S_{\phi,0} V_0 \quad (14)$$

А для трехмерного случая вернемся к основному уравнению конечного объема.

$$\sum_f k_f (\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f A_f = S_{\phi,0} V_0 \quad (15)$$

Возьмем оператор Набла для нормали и двух ортогональных ему касательных векторов.

$$\nabla\phi = [(\nabla\phi) \cdot \bar{n}] \bar{n} + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_1] \bar{t}_1 + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_2] \bar{t}_2 \quad (16)$$

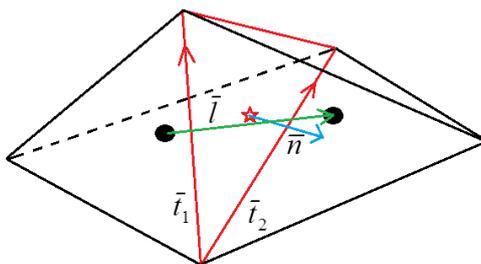


Рисунок 5 – Два соседних тетраэдра

Рассмотрим градиент как показано ниже.

$$(\nabla\phi)_f \cdot \bar{l} = [(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f] \bar{n}_f \cdot \bar{l} + \left\{ [\bar{n}_f \times (\nabla\phi)_f] \times \bar{n}_f \right\} \cdot \bar{l} \quad (17)$$

Так же как и двумерном случае $(\nabla\phi)_f \cdot \bar{l} \approx \phi_1 - \phi_0$ и $\delta = \bar{n} \cdot \bar{l}$

$$(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta} - \frac{\left\{ [\bar{n}_f \times (\nabla\phi)_f] \times \bar{n}_f \right\} \cdot \bar{l}}{\delta} = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta} - \frac{J_T}{\delta} \quad (18)$$

Где J_T – тангенциальный поток. Рассмотрим теперь треугольную грань (рисунок 6), на которой мы пытаемся извлечь J_T .

$$(\nabla\phi)_f = \frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \bar{n}_e \phi_e L_e \quad (19)$$

Подставляем в уравнение тангенциального потока:

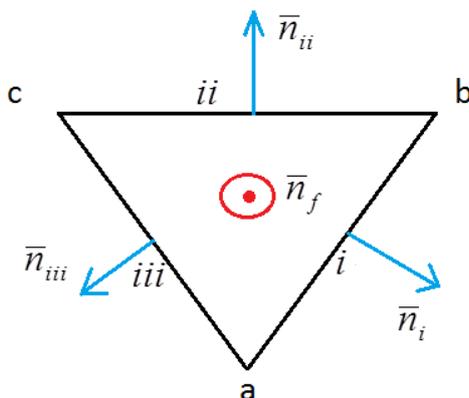


Рисунок 6 – Грань тетраэдра

$$J_T = \left\{ \left[\bar{n}_f \times \frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \bar{n}_e \phi_e L_e \right] \times \bar{n}_f \right\} \cdot \bar{l} = \left\{ \left[\frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 [(\bar{n}_f \times \bar{n}_e) \times \bar{n}_f] \phi_e L_e \right] \right\} \cdot \bar{l} \quad (20)$$

Используем свойство смешанного произведения векторов:

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{d} = (\bar{d} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} - (\bar{d} \cdot \bar{c}) \cdot \bar{b} \quad (21)$$

Следовательно:

$$J_T = \left\{ \left[\frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 [(\bar{n}_f \cdot \bar{n}_f) \bar{n}_e - (\bar{n}_f \cdot \bar{n}_e) \bar{n}_f] \phi_e L_e \right] \right\} \cdot \bar{l} = \left\{ \left[\frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \bar{n}_e \phi_e L_e \right] \right\} \cdot \bar{l} \quad (22)$$

Одной из проблем при расчете J_T является нормаль к стороне грани элемента конечного объема (\bar{n}_e).

$$\bar{n}_e = \bar{t}_e \times \bar{n}_f \quad (23)$$

Подставляем \bar{n}_e в J_T , получим:

$$J_T = \frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \phi_e ([L_e \bar{t}_e \times \bar{n}_f] \cdot \bar{l}) \quad (24)$$

Произведения длины стороны L_e на единичный вектор \bar{t}_e равняется вектору \bar{T}_e , который описывает всю сторону грани.

$$\bar{T}_e = L_e \bar{t}_e \quad (25)$$

Далее, используем свойство смешанного произведения векторов и применим его для выше указанного уравнения.

$$J_T = \frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \phi_e (\bar{T}_e \cdot [\bar{n}_f \times \bar{l}]) \quad (26)$$

Возвращаясь к выражению $(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f$ подставим найденное J_T :

$$(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta} - \frac{1}{\delta A_f} \left(\sum_{e=1}^3 \phi_e T_e \right) \cdot [\bar{n}_f \times \bar{l}] \quad (27)$$

$$\sum_f k_f \left\{ \frac{\phi_{nb(f)} - \phi_0}{\delta_f} - \frac{1}{\delta_f A_f} \sum_{e=1}^{n_e(f)} \phi_e (\bar{T}_e \cdot [\bar{n}_f \times \bar{l}_f]) \right\} A_f = S_{\phi,0} V_0 \quad (28)$$

В ходе нетривиальных преобразований получаем конечную аппроксимацию наших уравнений Гельмгольца для двумерного и трехмерного случая. Задачи решаем итеративно с помощью метода Якоби.

Конечная дискретная форма метода Якоби при использовании неструктурированной сетки для двухмерного уравнения Пуассона будет выглядеть в таком виде:

$$u_i^{n+1} = \frac{\left(\sum_f \left(\frac{u_{i,nb(f)}^n}{\delta_{i,f}} - \left[\frac{u_{i,a(f)}^n - u_{i,b(f)}^n}{\delta_{i,f} |\bar{l}_{i,f}|} \right] \bar{l}_{i,f} \cdot \bar{l}_{i,f} \right) A_{i,f} \right)}{\left(\sum_f \frac{A_{i,f}}{\delta_{i,f}} - 3V_i \right)} - \frac{(-2 \sin(x+2y) + 16e^{2x+3y}) V_i}{\left(\sum_f \frac{A_{i,f}}{\delta_{i,f}} - 3V_i \right)} \quad (29)$$

Конечная дискретная форма метода Якоби при использовании неструктурированной и гибридной сетки для трехмерного уравнения Пуассона будет выглядеть в таком виде:

$$u_i^{n+1} = \frac{\left(\sum_f \left(\frac{u_{i,nb(f)}^n}{\delta_{i,f}} - \frac{1}{\delta_{i,f} A_{i,f}} \left(\sum_{e=1}^3 u_{i,f,e}^n \bar{l}_{i,f,e} \right) \cdot [\bar{n}_{i,f} \times \bar{l}_{i,f}] \right) A_{i,f} \right)}{\left(\sum_f \frac{A_{i,f}}{\delta_{i,f}} - 10V_i \right)} - \frac{(-4 \cos(3x+y-2z) + 12e^{x-z} + 10) V_i}{\left(\sum_f \frac{A_{i,f}}{\delta_{i,f}} - 10V_i \right)} \quad (30)$$

5 Результаты и обсуждение

В первой задаче для двухмерного уравнения Пуассона используется физическая область размерами $L_x = 0.25$ и $L_y = 0.5$, которая аппроксимируется с помощью треугольников.

Количество физических вычислительных точек 1471, количество ячеек 2764. Как показано на рисунке 7, вычислительная сетка сгущается в точке (0.25, 0.5), так как в данной области используется граничное условие Неймана и для минимизации численной ошибки нужно было сгустить вычислительную сетку в данной точке.

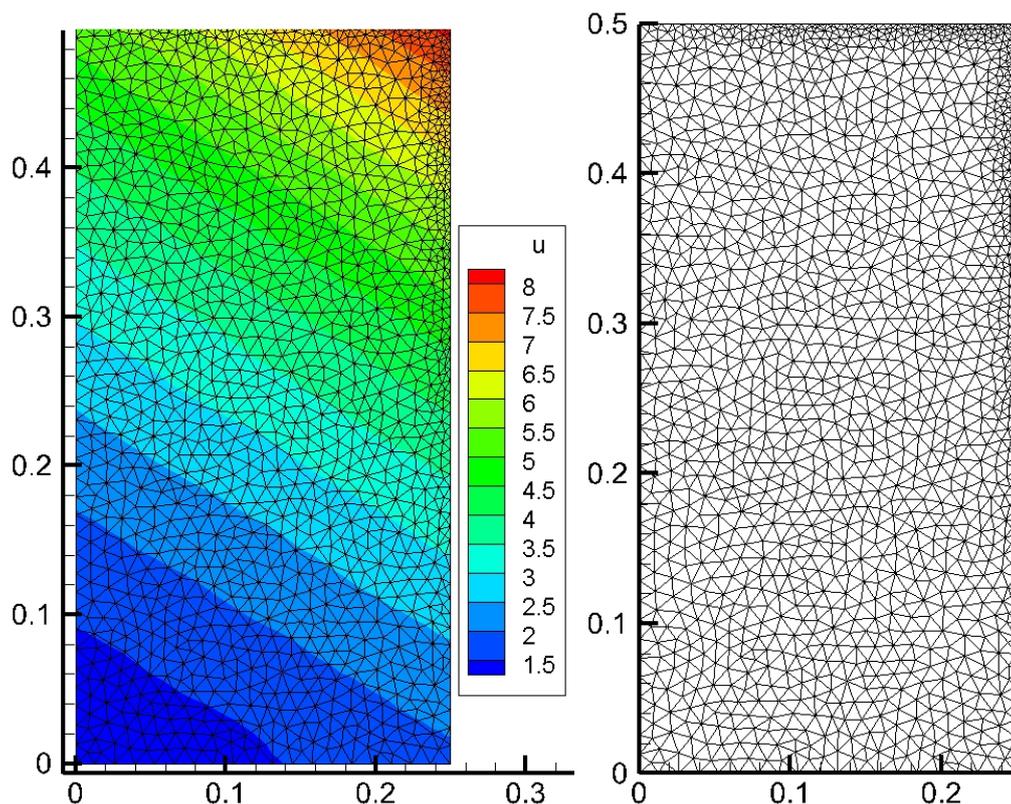


Рисунок 7 – Двумерная сетка с численным решением. Максимальная ошибка равняется 0.0654(0.7%)

Для второй задачи для трехмерного уравнения Пуассона используется физическая область размером $L_x = 0.25$, $L_y = 0.5$, $L_z = 0.5$, которая аппроксимируется с помощью тетраэдров для неструктурированной сетки. Количество узлов 4687, количество ячеек 23084. (рис. 8)

Для уменьшения численной ошибки для неструктурированной сетки используется гибридная сетка. Для гибридной трехмерной задачи использовались условия второй задачи (трехмерное уравнение Пуассона). Для этого вычислительная область делится на два блока неструктурированную и структурную сетки, которая будет состоять из тетраэдров, шестигранников и пирамид. Количество точек 1812, количество ячеек 4380. Сетка сгущается по оси Z к грани, где определено граничное условие Неймана. (рис.9).

Далее показаны плюсы неструктурированной и гибридной сетки на объектах различной формы.

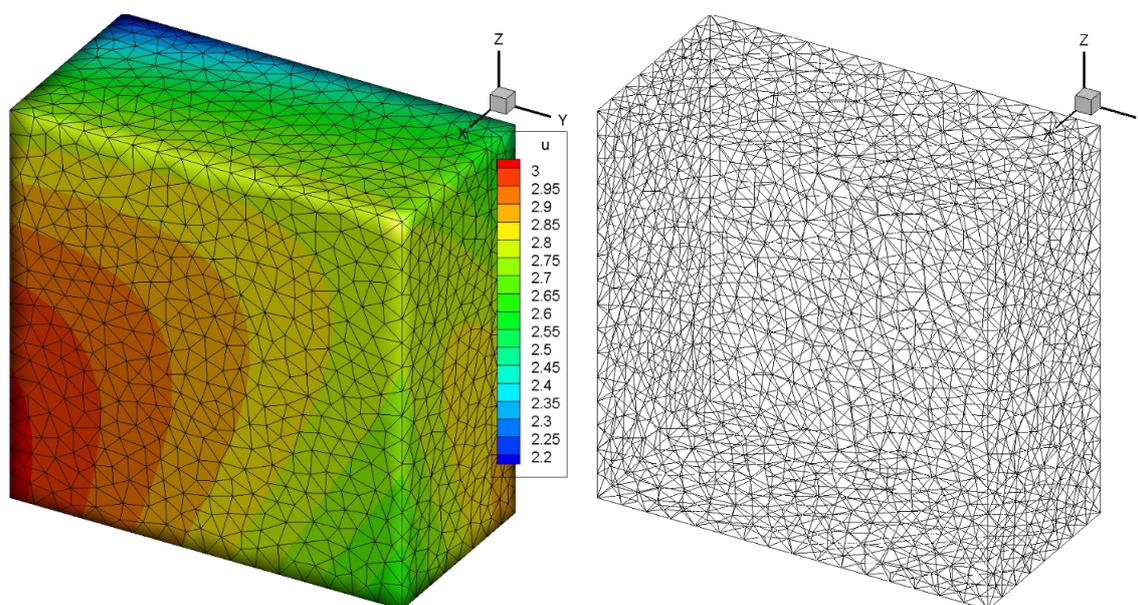


Рисунок 8 – Трехмерная сетка с численным решением. Максимальная ошибка равняется 0.026(0.9%)

6 Заключение

На рисунках 10-11 показаны плюсы неструктурированной сетки на объектах сложной формы.

На рисунках 12-13 отражается преимущество при использовании гибридных сеток на объектах сложной формы.

В процессе выполнения работы на основе численного решения двумерных и трехмерных уравнений Пуассона проведены тестовые расчеты метода конечного объема на неструктурированной сетке. А также проведен анализ решений для трехмерного уравнения Пуассона при использовании гибридной сетки.

При сравнении численных результатов трехмерного уравнения Пуассона для неструктурированной и гибридной сетки, можно отметить что при использовании гибридной сетки численная ошибка уменьшается, а также при этом используется меньше вычислительных ресурсов.

В результате проведенного исследования, по полученным данным можно сказать, что регулярная вычислительная сетка имеет преимущество в точности решения, но благодаря адаптации неструктурированной вычислительной сетки к сложной геометрии можно составлять гибридные сетки, где будут компенсироваться плюсы и минусы структурных и неструктурных сеток.

При этом в работе показывается, что при использовании неструктурированной сетки численная ошибка (0.9%), а при использовании гибридной сетки численная ошибка не превышает (0.4%). Из этого можно сделать вывод, что нужно использовать структурированную сетку в области, где это возможно, а неструктурированную сетку надо использовать, где невозможно использовать структурированную сетку.

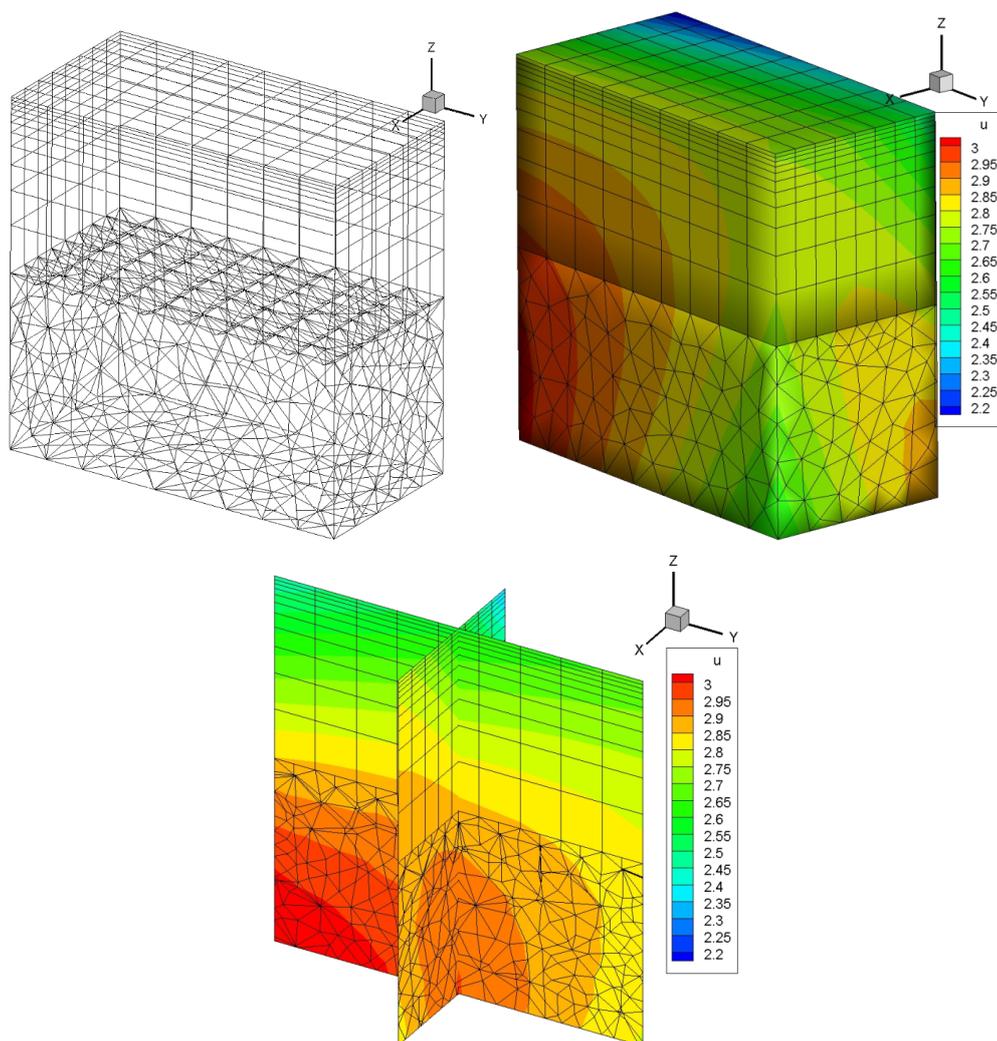


Рисунок 9 – Гибридная сетка с численным решением. Максимальная ошибка равняется 0.0114(0.4%)

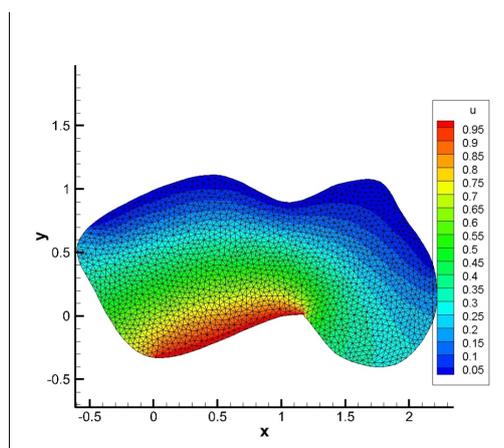


Рисунок 10 – Численное решение уравнение Пуассона на произвольной области

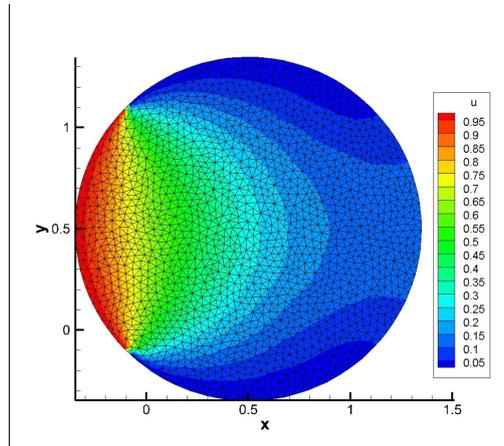


Рисунок 11 – Численное решение уравнение Пуассона на произвольной области

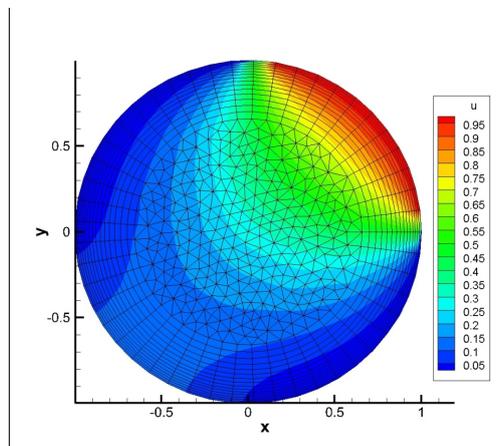


Рисунок 12 – Численное решение уравнение Пуассона на округлой области с помощью гибридной сетки

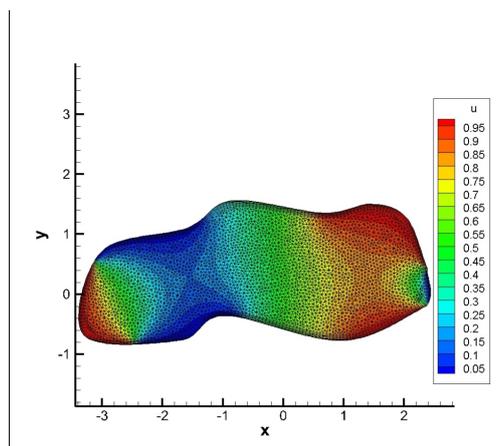


Рисунок 13 – Численное решение уравнение Пуассона на произвольной области с помощью гибридной сетки

7 Примечание

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант No 2017/ГФ4

Список литературы

- [1] Chung T.J., Computational Fluid Dynamics, — Cambridge University Press, 2002, — 1012 p.
- [2] Ferziger J.H., Peric M., Computational Methods for Fluid Dynamics, third edition, Springer, 2013. — 426 p.
- [3] Fletcher C. A.J., Fletcher C. A. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 1: Fundamental and General Techniques. — Springer. 2013. — 401 p.
- [4] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2015. —16(5). — P. 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [5] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // Applied Mathematical Modelling, — 2016. — Volume 40. — Issue 2. — P. 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [6] Issakhov A. Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // J. Phys.: Conf. Ser. — 2011. — 318(4). — P. 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [7] Mazumder S. Numerical methods for partial differential equation: Finite Difference and Finite Volume Methods. — Academic Press, 2015, — 484 p.
- [8] Moukalled F., Mangani L., Darwish M. The finite volume method in computational fluid dynamics. — Springer, 2015, — 791 p.
- [9] Peyret R., Taylor D.Th. Computational Methods for Fluid Flow. — Springer-Verlag, New York:Berlin, 1983, — 358 p.
- [10] Pletcher R. H., Tannehill J. C., Anderson D. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Third Edition (Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences). — CRC Press. 2011. — 774 p.
- [11] Roache P.J. Computational Fluid Dynamics. — Hermosa Publications, Albuquerque, NM, 1972. — 434 p.
- [12] Versteeg H.K., Malalasek W. Introduction to computational fluid dynamics The finite volume method. — Pearson, 2007, — 520 p.

References

- [1] Chung, T.J., "Computational Fluid Dynamics," Cambridge University Press, (2002), 1012 p.
- [2] Ferziger, J.H. and Peric M. "Computational Methods for Fluid Dynamics, third edition," Springer, (2013), 426 p.
- [3] Fletcher, C. A.J. and Fletcher, C. A. "Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 1: Fundamental and General Techniques," Springer. (2013). 401 p.
- [4] Issakhov A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant," International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation 16(5) (2015): 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [5] Issakhov A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities," Applied Mathematical Modelling Volume 40, Issue 2 (2016): 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [6] Issakhov A. "Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method," J. Phys.: Conf. Ser. 318(4) (2011): 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [7] Mazumder S. "Numerical methods for partial differential equation: Finite Difference and Finite Volume Methods," Academic Press, (2015). 484 p.

-
- [8] Moukalled F., Mangani L., Darwish M. "The finite volume method in computational fluid dynamics,"Springer, (2015). 791 p.
 - [9] Peyret R. and Taylor D.Th. "Computational Methods for Fluid Flow,"Springer-Verlag, NewYork:Berlin, (1983). 358 p.
 - [10] Pletcher R. H., Tannehill J. C. and Anderson D. "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Third Edition (Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences),"CRC Press. (2011). 774 p.
 - [11] Roache P.J. "Computational Fluid Dynamics,"Hermosa Publications, Albuquerque, NM, (1972). 434 p.
 - [12] Versteeg H.K., Malalasek W. "Introduction to computational fluid dynamics The finite volume method,"Pearson, (2007). 520 p.