УДК 510.532

Ас.А. Исахов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: asylissakhov@mail.ru

Некоторые свойства вычислимых нумераций семейств всюду определенных функций в арифметической иерархии

Используя обобщенное понятие Σ^0_{n+2}-вычислимой нумерации для семейств функций в арифметической иерархии и на основе диагональных методов было доказано, что существуют семейство $\mathcal{F}$ всюду определенных функций и Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация α семейства $\mathcal{F}$ такие, что никакая нумерация Фридберга семейства $\mathcal{F}$ не сводится к α. А также, что если семейство $\mathcal{F}$ всюду определенных функций содержит по крайней мере две функций, то $\mathcal{F}$ не имеет Σ^0_{n+2}-вычислимую главную нумерацию.
Ключевые слова: Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация, нумерация Фридберга, главная нумерация, арифметическая иерархия.

As.A. Issakhov

Some properties of computable numberings of the families of total functions in the arithmetical hierarchy

Using a generalized notion of Σ^0_{n+2}-computable numbering for the families of functions in the arithmetical hierarchy and on the basis of diagonal methods, it has been proved that there are a family $\mathcal{F}$ of total functions and Σ^0_{n+2}-computable numbering α of the family $\mathcal{F}$ such that no Friedberg numbering of $\mathcal{F}$ is reducible to α. And also it has been proved that if the family $\mathcal{F}$ of total functions contains at least two functions, then $\mathcal{F}$ has no principal Σ^0_{n+2}-computable numbering.
Key words:{Σ^0_{n+2}-computable numbering, Friedberg numbering, principal numbering, arithmetical hierarchy.}

Ас.А. Исахов

Арифметикалық иерархиядағы барлық жерде анықталған функциялар үйірлерінің есептелімді нөмірлеулерінің кейбір қасиеттері

Арифметикалық иерархиядағы функциялар үйірінің Σ^0_{n+2}-есептелімді нөмірлеу ұғымының жалпылауын пайдалана отырып және диагоналды әдістер негізінде, $\mathcal{F}$ үйірінің ешбір Фридберг нөмірлеуі дәл осы үйірдің белгілі бір α нөмірлеуіне апармайтын барлық жерде анықталған $\mathcal{F}$ функциялар үйірі және $\mathcal{F}$ үйірінің Σ^0_{n+2}-есептелімді α нөмірлеуі табылатыны дәлелденген. Сонымен қатар, егер барлық жерде анықталған $\mathcal{F}$ функциялар үйірі кем дегенде екі функциядан тұрса, онда $\mathcal{F}$ үйірінің Σ^0_{n+2}-есептелімді бас нөмірлеуі табылмайтыны дәлелденген.
Түйін сөздер: {Σ^0_{n+2}-есептелімді нөмірлеу, Фридберг нөмірлеуі, бас нөмірлеу, арифметикалық иерархия.}

Приведем необходимые основные определения:

Определение 1 *Нумерация $\nu : \omega \mapsto \mathcal{F}$ семейства одноместных вычислимых нумераций называется вычислимой, если бинарная функция $\nu(n)(x)$ является вычислимой. Если семейство $\mathcal{F}$ имеет вычислимую нумерацию, то оно называется вычислимым.*

Данное определение, взятое из [1], соответствует классическому определению вычислимой нумерации и вычислимого семейства. Отметим, что нумерацией Фридберга какого-либо семейства называется взаимно однозначная вычислимая нумерация.

Известно, что полурешетка Роджерса вычислимого семейства $\mathcal{F}$ либо состоит из одного, либо из бесконечного количества элементов, [1]. А также известно, что в нетривиальном случае, полурешетка Роджерса никогда ни будет решеткой и в ней ни будут максимальных элементов, [2]. Кроме того, в [2] показано, что в нетривиальном случае полурешетка Роджерса имеет либо один, либо бесконечно много минимальных элементов.

Основываясь на идеях данных результатов и используя обобщенное понятие вычислимой нумераций для семейств функций в арифметической иерархии были получены некоторые свойства вычислимых нумераций для уровней выше первой. Прежде чем приступить к изложению полученных результатов, приведем определения используемых терминов и понятий.

Определение 2 *Пусть $\mathcal{F}$ является семейством всюду определенных функций из $\Sigma^0_{n+1}, n \in \omega$. Нумерация $\nu : \omega \mapsto \mathcal{F}$ называется Σ^0_{n+1}-вычислимой, если бинарная функция $\nu(n)(x)$ является вычислимой относительно оракула $\emptyset^{(n)}$.*

Определение 3 *Пусть $Com^0_n(\mathcal{F})$ является множеством всех Σ^0_n-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{F}$. Тогда частично упорядоченное множество $R^0_n(\mathcal{F}) = \langle deg(\nu) | \nu \in Com^0_n(\mathcal{F}), \leq\rangle$ называется верхней полурешеткой, либо полурешеткой Роджерса семейства $\mathcal{F}$. Нумерация $\nu : \omega \mapsto \mathcal{F}$ называется главной, если $\nu \in Com^0_n(\mathcal{F})$ и $\mu \leq \nu$ для всех $\mu \in Com^0_n(F)$.*

Данные определения взяты из статьи [3].

Следующие теоремы возникли при изучений открытых проблем, поставленных в [4]:

Теорема 1 *Существуют семейство $\mathcal{F}$ всюду определенных функций из Σ^0_{n+2} и Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация α семейства $\mathcal{F}$ такие, что никакая нумерация Фридберга семейства $\mathcal{F}$ не сводится к α.*

Доказательство. Начнем доказательство со следующего утверждения.

Лемма 1 *Пусть α нумерация бесконечного семейства $\mathcal{F}$. Семейство $\mathcal{F}$ имеет нумерацию Фридберга, сводящуюся к α тогда и только тогда, когда существует вычислимо перечислимое множество W_e такое, что $\forall x \exists! y(\alpha(x) = \alpha(y) \wedge y \in W_e)$.*

Доказательство. Прежде заметим, что данная лемма справедлива для любого семейства.

– Необходимость. Пусть $\mathcal{F}$ имеет нумерацию Фридберга, сводящуюся к α, обозначим ее через β. Тогда должно быть справедливым следующее равенство: $\beta(x) = \alpha f(x)$, где f – вычислимая функция. Следовательно, область значения f является вычислимо перечислимым множеством, которую обозначим через W. Если в W есть два различных числа x и y таких, что $\alpha(x) = \alpha(y)$, то существуют такие различные числа a и b для которых $f(a) = x$ и $f(b) = y$. Но тогда $\beta(a) = \alpha f(a) = \alpha(x) = \alpha(y) = \alpha f(b) = \beta(b)$, что противоречит предположению взаимно однозначности нумерации β. Значит, в W нет двух различных номеров одного и того же элемента из $\mathcal{F}$, что эквивалентно записи $\forall x \exists ! y(\alpha(x) = \alpha(y) \wedge y \in W_e)$.

– Достаточность. Пусть $\forall x \exists ! y(\alpha(x) = \alpha(y) \wedge y \in W_e)$. Из выше указанного доказательства необходимости легко заметить, что данное выражение эквивалентно тому, что в W присутствуют только единственные α номера элементов из $\mathcal{F}$. Так как W вычислимо перечислимое множество, то существует всюду определенная вычислимая функция f такая, что $range f = W$. Но тогда нумерация β, определенная формулой $\beta(x) = \alpha f(x)$ является нумерацией Фридберга семейства F, так как если $x \neq y$, то $\beta(x) = \alpha f(x) \neq \alpha f(y) = \beta(y)$. Лемма доказана.

Значит, для каждого $e \in \omega$ достаточно построить нумерацию α семейства функций $\mathcal{F} = \alpha(\omega)$ из Σ^0_{n+2}, удовлетворяющую требованиям:

$$[\exists x \forall y \in W_e(\alpha(x) \neq \alpha(y))] \tag{1}$$

или

$$[\exists u \exists v(u \neq v \& u \in W_e \& v \in W_e \& \alpha(u) = \alpha(v))]. \tag{2}$$

Делаем это следующим образом: для каждого числа $e \in \omega$ проверяем принадлежность элементов $2e$ и $2e + 1$ к W_e. Если один из этих элементов не появился в W_e, то делаем его единственным номером одной определенной функций из $\mathcal{F}$, а если оба элемента появились в W_e, то берем $\alpha(2e)$ равным $\alpha(2e + 1)$. α будет Σ^0_{n+2}-вычислимой нумерацией, так как все вычисления ведутся в Σ^0_{n+2}. Для любого числа e возможны два случая: один из чисел $2e$ и $2e+1$ не принадлежит W_e, тогда согласно построению α выполняется (1); оба числа $2e$ и $2e+1$ принадлежат W_e, тогда выполняется (2). Значит, для каждого W_e не справедливо утверждение $\forall x \exists ! y(\alpha(x) = \alpha(y) \wedge y \in W_e)$, следовательно, по выше доказанной лемме, под α нет нумерации Фридберга. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 *Пусть $\mathcal{F}$ семейство всюду определенных Σ^0_{n+2}-вычислимых функций. Если $\mathcal{F}$ содержит хотя бы две функций, то $\mathcal{F}$ не имеет главной Σ^0_{n+2}-вычислимой нумерации.*

Доказательство. Пусть α – Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация семейства $\mathcal{F}$. Выбираем две различные функций f и g из $\mathcal{F}$, и находим число a такое, что $f(a) \neq g(a)$. Построим нумерацию β семейства $\mathcal{F}$, удовлетворяющую следующим требованиям: $\beta(e) \neq \alpha\varphi_e(e)$ для всех $e \in \omega$.

Если $\varphi_e(e)$ определена, то проверяем $\alpha\varphi_e(e)(a) = f(a)$ или $\alpha\varphi_e(e)(a) = g(a)$. На этих числах $e \in \omega$, где $\varphi_e(e) \downarrow$, построим нумерацию β следующим образом:

$$\beta(e) = \begin{cases} g, \, if \;\; \alpha\varphi_e(e)(a) = f(a) \\ f, \, otherwise \end{cases}$$

Если $\varphi_e(e)$ не определена, т.е. $e \notin \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} = \{x : x \in W_x\}$, то $e \in \overline{\mathcal{K}}$. Известно, что $\overline{\mathcal{K}}$ – бесконечное не вычислимо перечислимое множество, но $\overline{\mathcal{K}}$ вычислимо относительно $\mathcal{K} = \emptyset'$. Значит, существует бесконечно много таких чисел $e \in \omega$, что $\varphi_e(e) \uparrow$. На этих числах $e \in \omega$ построим нумерацию β следующим образом: $\beta(b_k) = \alpha(k)$, где b_k – пронумерованные в порядке возрастания элементы множества

$$\overline{\mathcal{K}} = \{b_0 < b_1 < b_2 < \ldots\}.$$

Легко заметить, что отображение $\beta : \omega \mapsto \mathcal{F}$, построенное выше указанным способом, будет Σ^0_{n+2}-вычислимой нумерацией семейства $\mathcal{F}$. И так как для любой Σ^0_{n+2}-вычислимой нумерации α можно построить Σ^0_{n+2}-вычислимую нумерацию β, не сводящуюся к α, то никакая Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация не может быть главной. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л. Теория нумераций. // М.: Наука, 1977. 416 с.

[2] Марченков С. С. О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 588-607.

[3] Badaev S. A. and Goncharov S. S. Rogers semilattices of families of arithmetic sets // Algebra and Logic. 2001. Vol. 40, no. 5. pp 283-291.

[4] Badaev S. A. and Goncharov S. S. The theory of numberings: Open problems // University of Colorado, Boulder. American Mathematical Society. 2000. Vol. 257. pp. 23-38.

References

[1] Ershov Ju. L. Teorija numeracij. // M.: Nauka, 1977. 416s. (in Russ.)

[2] Marchenkov S. S. O vychislimyh numeracijah semejstv obshherekursivnyh funkcij // Algebra i logika. 1972. T.11, №5. S. 588-607. (in Russ.)

[3] Badaev S. A. and Goncharov S. S. Rogers semilattices of families of arithmetic sets // Algebra and Logic. 2001. Vol. 40, no. 5. pp 283-291.

[4] Badaev S. A. and Goncharov S. S. The theory of numberings: Open problems // University of Colorado, Boulder. American Mathematical Society. 2000. Vol. 257. pp. 23-38.