УДК 517.984.5

Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: makhmud-s@mail.ru

Первый регуляризованный след дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками

Работа посвящена вычислению первого регуляризованного следа одного дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий "склейки". Рассматривается оператор Штурма-Лиувилля $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$, заданный на отрезках $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k = \overline{1,n}$; $n \geq 2$. На левом и правом концах отрезка $[0,\pi]$ задаются краевые условия типа Дирихле: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Решениями являются непрерывные на $[0,\pi]$ функции, первые производные которых имеют скачки в точках $x = \frac{\pi}{n}k$. Величина скачков выражается формулой $y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt, k = \overline{1, n-1}$. Основным результатом работы является точная формула первого регуляризованного следа рассматриваемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: Первый регуляризованный след, дифференциальный оператор, собственное значение.

N.S. Imanbaev, M.A. Sadybekov,

The first regularized trace of a differential operator of the Sturm-Liouville problem on the segment with punctured points

This work is devoted for the calculation of the first regularized trace of a differential operator of the Sturm-Liouville problem on the interval with punctured points in integral perturbation "transmission"conditions. We consider Sturm-Liouville operator $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$ given on the interval $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k = \overline{1,n}$; $n \geq 2$. The left and right ends of the segment $[0,\pi]$ are given in Dirichlet type boundary conditions: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. The solutions are continuous functions on the $[0,\pi]$ and the first derivatives have jumps at $x = \frac{\pi}{n}k$. The magnitude of the jumps is given by equation $y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt, k = \overline{1, n-1}$. The main result is the exact formula for the first regularized trace of a given differential operator.

Keywords: first regularized trace, differential operator, eigenvalue.

Н.С. Иманбаев, М.А. Садыбеков,

Ойылған нүктелерімен бірге кесіндіде Штурм-Лиувилль типті дифференциалдық оператордың бірінші регуляризацияланған ізі

Бұл жұмыс "желімдеу" шартында интегралдық ауытқуы болатын Штурм-Лиувилль типті дифференциалдық оператордың бірінші регуляризацияланған ізін ойылған нүктелері бар кесіндіде есептеуге арналған. $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k=\overline{1,n}$; $n \geq 2$ кесіндіде $-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x)$ Штурм-Лиувилль операторы қарастырылған. $[0,\pi]$ кесідісінің сол және оң ұштарына Дирихле типті шекаралық шарт берілген: $y(0)=0$, $y(\pi)=0$. Бұл есептің шешімі $[0,\pi]$ кесіндісінде үзіліссіз және бірінші туындысы $x=\frac{\pi}{n}k$ нүктесінде секіріске ие. Секірістің өлшемі $y'(\frac{\pi k}{n}-0)=y'(\frac{\pi k}{n}+0)-\beta_k\int_0^\pi y(t)dt, k=\overline{1,n-1}$ формуласымен анықталады. Бұл жұмыстың негізгі нәтижесі қарастырылып отырған дифференциалдық оператордың бірінші регуляризацияланған ізінің айқын формуласы болып табылады.

Түйін сөздер: бірінші регуляризацияланған із, дифференциалдық оператор, меншікті мән.

Введение. Спектральная теория дифференциальных операторов является одним из важных разделов общей спектральной теории и активно разрабатывается различными математическими школами. Теория следов дифференциальных операторов исследуется, прежде всего, московской школой под руководством академика В. А. Садовничего [1, 2]. Только в последние годы ими представлены формулы первого регуляризованного следа для дискретных операторов, регуляризованные следы сингулярных операторов, регуляризованные следы несамосопряженных дискретных операторов с неядерной резольвентой, формулы следа М. Г. Крейна на случай возмущения типа Гильберта - Шмидта, регуляризованный след операторного уравнения Штурма - Лиувилля на конечном отрезке, формула с леда для потенциала, содержащего дельта-функции, формулы регуляризованных следов операторов с относительно компактным возмущением и т. д.

Однако ряд существенных проблем спектральной теории остается по-прежнему не разрешенным. К их числу относится нахождение регуляризованных следов дифференциальных операторов в областях с проколотыми точками. Данное направление тесно связано с исследованием операторов с потенциалами, содержащими дельта-функции, однако имеет и свои особенности. На сегодняшний день это направление находится на стадии накопления первичной информации, для чего необходимо получение формул явного вида вычисления регуляризованных следов различных конкретных дифференциальных операторов в областях с проколотыми точками.

Понятие регуляризованного следа. Теория регуляризованных следов линейных операторов берёт своё начало с фундаментального факта конечномерной теории — инвариантности матричного следа линейного оператора и совпадении его со спектральным следом, и исследует вопрос о распространении понятия инвариантности следа на неограниченные операторы.

Исследования регуляризованных следов операторов с дискретным спектром было начато в знаменитой работой И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [3], в которой авторы нашли след оператора в задаче Штурма — Лиувилля

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), y'(0)=0, y'(\pi)=0.$$

Для $q(x) \in C^1[0,\pi]$ при выполнении условия $\int_0^\pi q(x)dx = 0$ была получена формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} \left(q(o) + q(\pi) \right),$$

где λ_n - собственные значения задачи, а $\mu_n = n^2$ - собственные значения этой же задачи с $q(x) = 0$. Одним из преимуществ подобных формул является то, что хотя собственные значения оператора при $q(x) \neq 0$ не могут быть вычислены в явном виде, сумма регуляризованного следа определяется точно и всегда может быть вычислена.

Один из примеров содержательной физической интерпретации так понимаемых следов можно найти в работах И.М. Лифшица [6].

К аналогичным результатам пришел в том же году Л.А. Дикий, использовавший несколько иные методы. Получению формул регуляризованных следов для обыкновенных дифференциальных операторов были посвящены работы И.М. Гельфанда, М.Г. Гасымова, Р.Ф. Шевченко, А.Г. Костюченко, В.А. Садовничего и многих других. Наиболее общие результаты для обыкновенных дифференциальных операторов получены В.Б. Лидским и В.А. Садовничим [5]. Ими было установлено, что вывод формул указанного типа для широкого класса краевых задач, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями на конечном отрезке со сложным вхождением спектрального параметра, сводится к изучению регуляризованных сумм корней целых функций с определенной асимптотической структурой.

Другое приложение теории следов - приближенное вычисление собственных чисел - также было предложено И.М. Гельфандом на примере оператора Штурма - Лиувилля. Задача о вычислении первых собственных чисел операторов является одной из важных классических задач математической физики и этой проблеме были посвящены многочисленные исследования. С появлением в работах И.М. Гельфанда и Л.А. Дикого системы следов высших порядков появилась возможность другого подхода к этой задаче. Коэффициенты в такой системе выражаются в конечном виде через коэффициенты дифференциального выражения и краевых условий и их вычисление вполне может быть алгоритмизировано, как это сделано, например, в более сложной задаче Орра - Зоммерфельда в работе В.Б. Лидского и В.А. Садовничего или для периодической задачи для оператора Штурма - Лиувилля в работе МакКина и ван Мёрбеке.

Настоящая работа посвящена вычислению первого регуляризованного следа одного дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий "склейки".

Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k, k = \overline{1,n}; n \geq 2; \tag{1}$$

$$y(0) = 0, y(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$y(\frac{\pi k}{n} - 0) = y(\frac{\pi k}{n} + 0),\ y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt, k = \overline{1, n-1} \tag{3}$$

Здесь $q(x)$ - достаточное число раз дифференцируемая действительнозначная функция; β_k - действительные константы, λ - спектральный параметр.

Отметим, что при $\beta_k = 0, k = \overline{1, n-1}$ для уравнения (1) с дополнительными слагаемыми вида $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k y(\frac{\pi k}{n})$ в работах [4], [2, с. 112] были выписаны формулы первого регуляризованного следа задачи. Данные работы являются наиболее близкими по тематике к рассматриваемой нами задаче.

Нашей целью является нахождение формулы первого регуляризованного следа задачи (1) - (3). Основным результатом работы является

Теорема. *Для первого регуляризованного следа задачи (1) -(3) справедлива следующая формула:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2n}(\lambda_{m,j}-(2nm+j)^2-(1+\frac{1}{2nm+j})\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} q(t)dt) = -\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi))+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} q(t)dt, \quad (4)$$

где $\lambda_{m,j}$ - собственные значения задачи (1) - (3). При этом собственные значения имеют асимптотику $\lambda_{m,j} = s_{m,j}^2$, где

$$s_{m,j} = (2nm+j)+\frac{c_{1,j}}{2nm+j}+\frac{c_{2,j}}{(2nm+j)^2}+O(\frac{1}{(2nm+j)^3}), j = \overline{1, 2n}, m = 0, 1, 2, \dots; \quad (5)$$

$$c_{1,j} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} q(t)dt, c_{2,j} = \frac{1-(-1)^j}{2}\frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}(\beta_k+\beta_{n-k})e^{\frac{i\pi jk}{n}}. \quad (6)$$

Краткий ход доказательства теоремы. Стандартными вычислениями для уравнения $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$ на каждом интервале $I_k : \frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, можно выписать асимптотики (при $|s| \to \infty$) двух линейно независимых решений этого уравнения:

$$y_{1,k}(x, s) \sim e^{isx}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{\nu,k}(x)}{s^{\nu}}, \; y_{2,k}(x, s) \sim e^{-isx}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{a_{\nu,k}(x)}{s^{\nu}},$$

где $a_{0,k}(x) \equiv 1$,

$$a_{\nu,k}(x) = \frac{i}{2}\{a'_{\nu-1,k}(x) - a'_{\nu-1,k}(\frac{\pi}{n}(k-1)) - \int_{\frac{\pi}{n}(k-1)}^{x} q(t)a_{\nu-1,k}(t)dt\}. \quad (7)$$

Здесь, как обычно, предполагается, что комплексная плоскость ($\lambda = s^2, s = \sqrt{\lambda}$) разбита на четыре сектора лучами $\arg s = 0$ и $\arg s = \frac{\pi}{2}$ и данная асимптотика имеется в каждом из четырех секторов.

Из рекуррентной формулы (7) получаем

$$a_{1,k}(x) = -\frac{i}{2}\int_{\frac{\pi}{n}(k-1)}^{x} q(t)dt, \; a_{2,k}(x) = \frac{1}{4}\{q(x) - q(\frac{\pi}{n}(k-1)) - \frac{1}{2}(\int_{\frac{\pi}{n}(k-1)}^{x} q(t)dt)^2\}, \dots,$$

$$a_{\nu,k}(\frac{\pi}{n}(k-1)) = 0, \nu = 1, 2, \dots;$$

$$y_{1,k}(\frac{\pi}{n}(k-1), s) = e^{i\frac{\pi(k-1)s}{n}}, \; y_{2,k}(\frac{\pi}{n}(k-1), s) = e^{-i\frac{\pi(k-1)s}{n}}.$$

На каждом из интервалов I_k общее решение уравнения (1) представляем в виде $y(x) = A_k y_{1,k}(x,s) + B_k y_{2,k}(x,s)$. Удовлетворяя условиям краевым условиям (2) и обобщенным условиям "склеивания" (3), получаем относительно постоянных A_k, B_k линейную систему из $2n$ уравнений, определитель $\Delta(s)$ которой и будет характеристическим определителем спектральной задачи (1) - (3). Эта функция $\Delta(s)$ определяется следующим асимптотическим выражением:

$$\Delta(s) = e^{i\pi s}\{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 - (\beta_1 + ... + \beta_{n-1})}{s^2} + O(\frac{1}{s^3})\} +$$

$$+ e^{-i\pi s}\{-1 + \frac{a_1}{s} - \frac{a_2 - (\beta_1 + ... + \beta_{n-1})}{s^2} + O(\frac{1}{s^3})\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{\pi k}{n}s}\{\frac{\beta_k + \beta_{n-k}}{s^2} + O(\frac{1}{s^3})\} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-i\frac{\pi k}{n}s}\{\frac{\beta_k + \beta_{n-k}}{s^2} + O(\frac{1}{s^3})\} + O(\frac{1}{s^4}).$$

Здесь

$$a_1 = -\frac{i}{2}\int_0^\pi q(t)dt, \ a_2 = \frac{1}{4}\{q(\pi) - q(0) - \frac{1}{2}(\int_0^\pi q(t)dt)^2\}.$$

Анализируя уравнение $\Delta(s) = 0$, получаем, что задача (1) - (3) имеет $4n$ серий собственных значений с асимптотиками (5), (6). Учитывая, что функция $\Delta(s)$ - нечетная, получаем, что вместе с собственными значениями $s_{m,j}$ из (5) числа $-s_{m,j}$ также являются корнями характеристического многочлена. Их мы обозначим через $s_{m,j+2n}, j = \overline{1,2n}$. Отсюда получаем обращение в нуль коэффициентов $c_{2,j}$ из (6) с четными номерами j. Таким образом, в терминах спектрального параметра λ мы получим $2n$ серий собственных значений.

При этом функция $\Delta(s)$ принадлежит классу K целых функций первого порядка [5]. Поэтому для нее применима методика вычисления регуляризованной суммы корней квазимногочленов, основанная на построении дзета-функции, ассоциированной с функцией $\Delta(s)$ и использовании метода последовательных приближений Хорна (см. [5]).

Так как данная методика хорошо известна, в силу громоздкости вычислений мы их здесь приводить не будем.

Замечание. *В частном случае, когда $\beta_k = 0, k = \overline{1, n-1}$, задача (1) - (3) совпадает с задачей Дирихле и формула (4) основной теоремы совпадает с классическим результатом:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\lambda_m - m^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)dt\right) = -\frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(t)dt.$$

Авторы выражают благодарность профессору Б.Е. Кангужину и PhD Д.Б. Нурахметову за полезные замечания в ходе подготовки настоящей работы.

Литература

[1] *Садовничий В.А.* Теория операторов. – М.: "Дрофа" , 2004. – 384 с.

[2] *Митрохин С.И.* Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. – М.: Интернет-Университет информационных технологий, 2009. – 364 с.

[3] *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88. – С. 593–596.

[4] *Мартинович М.* Об одной краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т.18. – №3. – С. 537-540.

[5] *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения. – 1967. – Т.1. – №2. – С. 52-59.

[6] *Лифшиц И.М.* Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой // Успехи матем. наук. – 1952. – Т.7. – №1. – С. 173-180.

References

[1] Sadovnichij V.A. Teorija operatorov. – M.: "Drofa 2004.–384 s.

[2] Mitrohin S.I. Spektral'naja teorija operatorov: gladkie, razryvnye, summiruemyekojefficienty. – M.: Internet-Universitet informacionnyh tehnologij, 2009. – 364 s.

[3] Gel'fand I.M., Levitan B.M. Ob odnom prostom tozhdestve dlja sobstvennyh znachenij differencial'nogo operatora vtorogo porjadka // Dokl. AN SSSR. – 1953. – T.88. – S. 593-596.

[4] Martinovich M. Ob odnoj kraevoj zadache dlja funkcional'no-differencial'nogo uravnenija // Differenc. uravnenija. – 1982. – T.18. – №3. – S. 537-540.

[5] Lidskij V.B., Sadovnichij V.A. Reguljarizovannye summy kornej odnogo klassa celyh funkcij // Funkcional'nyj analiz i ego prilozhenija. – 1967. – T.1. – №2. – S.52-59.

[6] Lifshic I.M. Ob odnoj zadache teorii vozmushhenij, svjazannoj s kvantovoj statistikoj // Uspehi matem. nauk. – 1952. – T.7. – №1. – S. 173-180.