Представление резольвенты бигармонического оператора

Г.Е. Берикханова
Семипалатинский государственный педагогический институт, Семей, Казахстан
e-mail: gulnazezhen@mail.ru

Аннотация

В работе изучается решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге. В работе даны формулы резольвенты корректно разрешимых краевых задач для бигармонических операторов в круге.

1 Вспомогательные утверждения и доказательство теорем

Рассмотрим задачу Дирихле для бигармонического уравнения в круге Ω

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} W(x,y)|_{\partial\Omega} - L(\Delta^2 W)|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y)\Big|_{\partial\Omega} - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L(\Delta^2 W)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $h(x,y)$ произвольная четыре раза дифференцируемая в круге Ω функция. Введем новую функцию

$$I(x,y) = \int\int\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta)\, \Delta^2_{\xi,\eta} h(\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$

где $\Delta_{\xi,\eta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ - оператор Лапласа по переменным ξ,η. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого непрерывного оператора L отображающего пространство $\{f\}$ в множество $\{h\}$ гладких функции задачи (1) - (2) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях f.*

Теорема 2. *Если уравнение (1) при всех допустимых правых частях f с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор L, отображающий пространство $\{f\}$ в множество $\{h\}$ гладких функции , такой что дополнительные условия примут вид (2).*

Нам удобно вместо $L(f)$ писать $(Lf)(x,y)$ и считать L - линейным оператором. Оператор, соответствующий задаче (1) - (2) обозначим через A_L. Тогда A_0 соответствует задаче Дирихле. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора A_L.

Теорема 3. *Если L - линейный непрерывный оператор из теоремы 4 и 5, то резольвента оператора A_L имеет вид*

$$(A_L - \lambda I)^{-1} f(x,y) = (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) -$$
$$- \int\limits_{\partial\Omega} \Big\{ \Big(A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big) \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) \Big) -$$
$$- \Big(A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big) \Big(L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) \Big) \Big\} ds_{\xi,\eta}$$

Согласно теореме 3 для вычисления резольвенты на произвольном элементе f достаточно уметь вычислять значения резольвенты на конкретных функциях $\Delta_{\xi,\eta}\, G(x,y,\xi,\eta)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$.

Доказательство. Удобно ввести следующие обозначения

$$\begin{gathered}u(x,y)=(A_0-\lambda I)^{-1}f(x,y),\\ v(x,y,\xi,\eta)=A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta),\\ g(\xi,\eta)=LA_0(A_0-\lambda I)^{-1}f(\xi,\eta),\\ W(x,y)=u(x,y)-\int\limits_{\partial\Omega}\left[v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}\end{gathered}$$

Покажем, что $\Delta^2W=\lambda W+f$. Действительно, рассмотрим

$$\begin{aligned}\Delta^2W&=\Delta^2u-\Delta^2\int\limits_{\partial\Omega}\left[v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}=\\ &=\lambda u+f-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\Delta^2v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta^2v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}\end{aligned}$$

Поскольку $A_Lp(x,y)=\Delta^2p(x,y)$ при $p\in D(A_L)$, то

$$\begin{aligned}\Delta^2A_L(A_L-\lambda I)^{-1}&=\Delta^2\left(I+\lambda(A_L-\lambda I)^{-1}\right)=\\ &=\Delta^2+\lambda\Delta^2(A_L-\lambda I)^{-1}=\Delta^2+\lambda A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\end{aligned}$$

Вспоминая также, что $\Delta^2_{x,y}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)=0$, $(x,y)\in\Omega$ можем записать соотношение

$$\begin{aligned}\Delta^2W=\lambda u+f-\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\left[v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}=\\ =\lambda W+f\end{aligned}$$

Таким образом, функция W удовлетворяет требуемому дифференциальному соотношению $\Delta W=\lambda W+f$. Остается проверить граничные условия вида (2). Для этого рассмотрим разность

$$\begin{gathered}\left[W-L\Delta^2W\right]\big|_{\partial\Omega}=\\ =\Bigg[u-\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}-\\ -L(\lambda W+f)\Bigg]\Bigg|_{\partial\Omega}=-\Bigg[\int\limits_{\partial\Omega}\Bigg(A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\\ -A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\Bigg)ds_{\xi,\eta}\Bigg]\Bigg|_{\partial\Omega}-L(\lambda u+f)|_{\partial\Omega}+\\ +\left(\lambda L\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}=\\ =-\left(\int\limits_{\partial\Omega}\left(\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}-\\ -\Bigg[\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\Bigg((A_L-\lambda I)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\\ -(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\Bigg)ds_{\xi,\eta}\Bigg]\Bigg|_{\partial\Omega}-L(\lambda u+f)|_{\partial\Omega}+\\ +\left(\lambda L\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}\end{gathered}$$

По свойству функции Грина последнее соотношение запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\left.[W-L\Delta^2W]\right|_{\partial\Omega}=\left.g\left(\xi,\eta\right)\right|_{\partial\Omega}-\\
-\left[\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\left(\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g\left(\xi,\eta\right)-\right.\right.\\
\left.\left.\left.-\ \left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)\right)ds_{\xi,\eta}\right]\right|_{\partial\Omega}-\left.L\left(\lambda u+f\right)\right|_{\partial\Omega}+\\
+\left.\left(\lambda L\int\limits_{\partial\Omega}\left(v\left(x,y,\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g\left(\xi,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)\right)ds_{\xi,\eta}\right)\right|_{\partial\Omega}
\end{gathered}
$$

Заметим, что $\left.g\left(\xi,\eta\right)\right|_{\partial\Omega}=\left.L\left(\lambda u+f\right)\right|_{\partial\Omega}$, так как

$$
\lambda u+f=\lambda\left(A_0-\lambda I\right)^{-1}f+f=A_0\left(A_0-\lambda I\right)^{-1}f
$$

С другой стороны, функции $\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right),$
$\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\in D\left(A_L\right)$ и поэтому удовлетворяют соответствующим краевым условиям

$$
\begin{aligned}
\left.\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right|_{\partial\Omega}&=\left.LA_L\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right|_{\partial\Omega}\\
\left.\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right|_{\partial\Omega}&=\left.LA_L\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right|_{\partial\Omega}
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
\begin{gathered}
\left.\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}\right|_{\partial\Omega}=\\
=\left.L\left(\lambda\int\limits_{\partial\Omega}v\left(x,y,\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}\right)\right|_{\partial\Omega}\\
\left.\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}\right|_{\partial\Omega}=\\
=\left.L\left(\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}\right)\right|_{\partial\Omega}
\end{gathered}
$$

поскольку L - линейный оператор.

Следовательно, выполняется одно из краевых условий (2)

$$
\left.\left[W-L\Delta^2W\right]\right|_{\partial\Omega}=0
$$

Теперь проверим, выполнение второго из краевых условии (2). Для этого рассмотрим разность

$$\left[\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}W(x,y)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L\left(\Delta^{2}W\right)\right]\bigg|_{\partial\Omega}=\left[\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}u-\right.$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial^{2}}{\partial\overline{n}_{x,y}\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}-$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L(\lambda W+f)\right]\bigg|_{\partial\Omega}$$
$$=-\left[\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}A_{L}\left(A_{L}-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)\right.\right.-$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}A_{L}\left(A_{L}-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right]\bigg|_{\partial\Omega}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L(\lambda u+f)\bigg|_{\partial\Omega}+$$
$$+\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right)\bigg|_{\partial\Omega}=$$
$$=-\left(\int\limits_{\partial\Omega}\left(\Delta_{\xi,\eta}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)\right.\right.-$$
$$\left.\left.-\frac{\partial^{2}}{\partial\overline{n}_{x,y}\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right)\bigg|_{\partial\Omega}-$$
$$-\left[\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\left(A_{L}-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)\right.\right.-$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\left(A_{L}-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right]\bigg|_{\partial\Omega}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L(\lambda u+f)\bigg|_{\partial\Omega}+$$
$$+\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right)\bigg|_{\partial\Omega}$$

По свойству функции Грина последнее соотношение запишем в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}W-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L\Delta^{2}W\right]\bigg|_{\partial\Omega}=\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}g(\xi,\eta)\bigg|_{\partial\Omega}-$$
$$-\left[\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\left(A_{L}-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)\right.\right.-$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\left(A_{L}-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right]\bigg|_{\partial\Omega}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L(\lambda u+f)\bigg|_{\partial\Omega}+$$
$$+\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}g(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}v(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\right)\bigg|_{\partial\Omega}$$

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\,g(\xi,\eta)|_{\partial\Omega}=\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}L(\lambda u+f)\Big|_{\partial\Omega}$, так как

$$\lambda u+f=\lambda\left(A_{0}-\lambda I\right)^{-1}f+f=A_{0}\left(A_{0}-\lambda I\right)^{-1}f$$

С другой стороны, функции $\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\left(A_{L}-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)$,
$\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\left(A_{L}-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\in D(A_{L})$ и поэтому удовлетворяют соответствую-

щим краевым условиям

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x, y, \xi, \eta\right)\Big|_{\partial\Omega} = \\
= \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L A_L \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x, y, \xi, \eta\right)\Big|_{\partial\Omega} \\
\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x, y, \xi, \eta\right)\Big|_{\partial\Omega} = \\
= \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L A_L \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x, y, \xi, \eta\right)\Big|_{\partial\Omega}
\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}
\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x, y, \xi, \eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi, \eta\right) ds_{\xi,\eta}\Big|_{\partial\Omega} = \\
= \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \left(\lambda \int\limits_{\partial\Omega} v\left(x, y, \xi, \eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi, \eta\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega} \\
\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x, y, \xi, \eta\right) g\left(\xi, \eta\right) ds_{\xi,\eta}\Big|_{\partial\Omega} = \\
= \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \left(\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x, y, \xi, \eta\right) g\left(\xi, \eta\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}
\end{gathered}$$

поскольку L - линейный оператор. Следовательно, выполняется одно из краевых условий (2)

$$\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W\left(x, y\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\Delta^2 W\right)\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0$$

Теорема полностью доказана.

Литература

[1] Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. 189 с.

[2] Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Дан СССР. - 1961. - Т.137, N5. - С. 1011-1014.

[3] Садовничий В.А., Любишкин В.А. Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Функц. анализ и его приложения, 1986. т.20, N3, С. 55-65.