УДК 517.927.6

Б.Е. Кангужин, Н.Е. Токмагамбетов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru, niyaz.tokmagambetov@gmail.com

О полноте системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями[1]

В работе в функциональном пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка L с интегральными краевыми условиями. Обыкновенные дифференциальные уравнения с интегральными краевыми условиями возникают в теории турбулентности и в теории марковских процессов. В случае двухточечных краевых условий полнота системы собственных и присоединенных функций были изучены в работах Марка Ароновича Наймарка и других ученых. Полнота системы собственных и присоединенных функций в случае интегральных краевых условий исследована в работах Юрий Ильича Любича, Андрея Андреевича Шкаликова и их учеников. В данной статье исследуется вопрос полноты системы собственных и присоединенных функций в функциональном пространстве $L_2(0,1)$. При некоторых предположения на граничные функции получено условие для полноты системы собственных и присоединенных функций оператора L в исходных терминах граничных функций в функциональном пространстве $L_2(0,1)$.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, интегральное краевое условие, система корневых функций, полнота системы.

Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N.E.,

On completeness of the system of root functions of a second order ordinary differential operator with integral boundary conditions

In this paper in the functional space $L_2(0,1)$ we consider an ordinary second order differential operator L with integral boundary conditions. Ordinary differential equations with integral boundary conditions arise in the theory turbulence and in the theory of Markov processes. In the case of two-point boundary conditions the completeness of the system of eigen- and associated functions were studied in Naimark Naimark and other scientists. Completeness of the system of eigenfunctions and associated functions in the case of integral boundary conditions investigated by Yury Ilyich Lubitsch, Andrei Adreevich Shkalikov and their students. This article arises the question of completeness of the system of eigenfunctions and associated functions in the functional space $L_2(0,1)$. In some assumptions on the boundary functions it was obtained the condition for completeness of the system of eigenfunctions and associated functions of the operator L in the initial terms of the boundary functions in the functional space $L_2(0,1)$.

Key words:{ordinary differential operator, integral boundary condition, system of root functions, completeness of system.}

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант 0732/ГФ, 2012г.–2014г.

Қанғожин Б.Е., Тоқмағамбетов Н.Е.,

Интегралдық шекаралық шарттарымен болған екінші ретті қарапайым дифференциалдық операторының түбірлес функциялар жүйесінің толықтығы туралы

Бұл жұмыста функционалдық $L_2(0,\,1)$ кеңістігінде интегралдық шекаралық шарттарымен болған екінші ретті L қарапайым дифференциалдық операторы қарастырылды. Интегралдық шекаралық шарттарымен болған қарапайым дифференциалдық операторлар турбуленттік теориясында және марковтік құбылыстар теориясында туындайды. Екі нүктелік шекаралық шарттар жағдайындағы меншікті функциялар мен қосалқы функциялар жүйесінің толықтығы Марк Аронович Наймарк пен басқа ғалымдардың жұмыстарында зерттелген. Интегралдық шекаралық шарттар жағдайындағы меншікті функциялар мен қосалқы функциялар жүйесінің толықтығы Юрий Ильич Любич, Андрей Андреевич Шкаликов және олардың оқушыларының жұмыстарында қарастырылған. Бұл мақалада $L_2(0,\,1)$ функционалдық кеңістігінде меншікті функциялар мен қосалқы функциялар жүйесінің толықтығы зерттеледі. Берілген шекаралық функциялар терминінде L операторының түбірлес функциялар жүйесінің толықтығына жеткіліктік шарты табылды.

Түйін сөздер: {қарапайым дифференциалдық оператор, интегралдық шекаралық шарт, түбірлес функциялар жүйесі, жүйенің толықтығы.}

Введение

Обыкновенные дифференциальные уравнения с интегральными краевыми условиями возникают в теории турбулентности (см. работу А. Зоммерфельда [1]) и в теории марковских процессов (см. работы У. Феллера [2, 3]). В случае двухточечных краевых условий полнота системы корневых функций были изучены в работах [4, 5, 6, 7, 8, 9] и других. Полнота системы корневых функций в случае интегральных краевых условий исследована в работах [10, 11] для общих интегральных краевых условий для оператора дифференцирования, в работе [12] для специальных интегральных краевых условий для операторов высших порядков, для краевых условий в виде функционалов дифференциального оператора второго порядка в работе [13] и в работе [14] для специальных интегральных возмущений регулярных по Биркгофу краевых условий. За последние годы свойства базисности и полноты системы корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов и их систем были также исследованы в работах [15, 16, 17, 18] и в работах других ученых.

Пусть σ_1 и σ_2 произвольные функции из функционального пространства $L_2(0,\,1)$. Введем целые от λ функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda <\varphi_1(\cdot,\lambda),\sigma_1(\cdot)> & -\lambda <\varphi_2(\cdot,\lambda),\sigma_1(\cdot)> \\ -\lambda <\varphi_1(\cdot,\lambda),\sigma_2(\cdot)> & 1-\lambda <\varphi_2(\cdot,\lambda),\sigma_2(\cdot)> \end{vmatrix}, \tag{1}$$

$$\kappa_1(x,\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda) \\ -\lambda <\varphi_1(\cdot,\lambda),\sigma_2(\cdot)> & 1-\lambda <\varphi_2(\cdot,\lambda),\sigma_2(\cdot)> \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$\kappa_2(x,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda <\varphi_1(\cdot,\lambda),\sigma_1(\cdot)> & -\lambda <\varphi_2(\cdot,\lambda),\sigma_1(\cdot)> \\ \varphi_1(x,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где $< \cdot, \cdot >$ скалярное произведение пространства $L_2(0,\,1)$, т.е.

$$< f, g > \equiv \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx,$$

и $\varphi_i(x,\lambda), i = 1,2$ специальные фундаментальные решения, т.е. решения следующей задачи

$$l(\varphi_i(x,\lambda)) = \lambda\varphi_i(x,\lambda),$$
$$\varphi_i^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{i\nu}, \nu = 1,2.$$

Обозначим через $\Lambda = \{\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots\}$ последовательность нулей целой функции $\Delta(\lambda)$, пронумерованные в порядке возрастания их модулей и с учетом их кратностей. Каждый нуль λ_s функции $\Delta(\lambda)$ имеет некоторую кратность m_s. Введем систему функций

$$Y = \left\{ \frac{1}{j!}\frac{\partial^j \kappa_\nu(x,\lambda)}{\partial\lambda^j}\Big|_{\lambda=\lambda_s},\ \ j = \overline{0, m_s - 1}, \nu = 1, 2,\ \ \lambda_s \in \Lambda \right\}.$$

Постановка задачи и основной результат

Проблема 1 *При каких условиях на функции σ_1 и σ_2 из $L_2(0,\,1)$ система функций Y образует полную систему в функциональном пространстве $L_2(0,\,1)$?*

Отметим, что система функций Y представляет систему корневых функций оператора с выражением $l(\cdot)$, в которых функции σ_1 и σ_2 играют роль граничных функций. Подробности описаны ниже. В случае оператора дифференцирования в качестве корневой системы возникает система экспонент, которая детально исследована в работах А.М. Седлецкого [11].

Определение 1 *Обозначим через $\mathcal{K}$ класс вектор функций $(\sigma_1,\, \sigma_2) \in L_2(0,\,1)\times L_2(0,\,1)$ для которых справедлива оценка снизу*

$$|\Delta(\lambda)| \geq C \mid \lambda \mid^{\frac{1}{2}} \ln(1 + |\lambda|) exp(\mid Re\sqrt{\lambda} \mid),$$

где константа C зависит только от расстояния $dist(\mid \lambda \mid,\, \Lambda)$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1 *Пусть $(\sigma_1,\, \sigma_2) \in \mathcal{K}$ и существует предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon \int_{1-\varepsilon}^1 [\sigma_1(y)\sigma_2(x) - \sigma_1(x)\sigma_2(y)]\, dydx \neq 0.$$

Тогда система корневых функций оператора L полна в функциональном пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство теоремы 1 состоит из двух этапов:
1) сначала доказывается полнота семейства функций $\{\kappa_\nu(\cdot,\, \mu), \nu = 1,2, \forall\mu \in \mathbb{C}\}$ в $L_2(0,1)$,
2) затем найдены достаточные условия того, что функции $\{\kappa_\nu(\cdot,\, \mu), \nu = 1,2, \forall\mu \in \mathbb{C}\}$ с произвольной точностью можно приблизить линейной комбинацией элементов Y.

На самом деле, во второй части доказательства получено более сильное утверждение, чем полнота.

Утверждение 1 *При выполнении условии теоремы 1 существует последовательность положительных чисел* $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$, $R_N \to \infty$ *такая, что верно в* $L_2(0,1)$ *разложение*

$$\kappa_i(x,\,\mu) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|\lambda_S|<R_N} \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{j=0}^{m_s-1} c^{(\nu)}_{s,\,m_s-1-j} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \kappa_\nu(x,\,\lambda)}{\partial \lambda^j}|_{\lambda=\lambda_s}, i = 1, 2,$$

где $c^{(\nu)}_{s,\,m_s-1-j}$ – *аналог коэффициентов Фурье функций* $\kappa_i(x,\,\mu)$, $i = 1, 2$ *по системе* Y.

Класс корректно разрешимых задач и резольвента

В работах [19, 20] доказано следующее утверждение

Теорема 2 (М. Отелбаев) *а) При любом выборе функций* $\sigma_\nu, \nu = 1, 2$ *из пространства* $L_2(0,1)$ *нелокальной краевой задаче*

$$l(y(x)) = f(x), 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$y^{(\nu-1)}(0) - \int_0^1 l(y(x))\overline{\sigma_\nu(x)}dx = 0, \nu = 1, 2 \tag{5}$$

в пространстве $L_2(0,1)$ *соответствует оператор* L, *который имеет вполне непрерывный обратный оператор* L^{-1}.

в) Пусть неоднородное уравнение (4) с некоторыми дополнительными условиями при любой правой части $f \in L_2(0,1)$ *имеет единственное решение* y *в пространстве* $W_2^2[0,1]$, *для которого выполняется априорная оценка*

$$\| y \|_{L_2(0,1)} \le c \| f \|_{L_2(0,1)} .$$

Тогда найдется единственный набор функций $\{\sigma_\nu, \nu = 1, 2\}$ *из пространства* $L_2(0,1)$, *что дополнительные условия эквивалентны условиям (5).*

Оператор соответствующий задаче (4), (5) будем обозначать через L. Из теоремы следует что внутренне краевые условия (5) при всевозможных σ_1 и σ_2 из $L_2(0,1)$ описывают все корректно разрешимые задачи соответствующие выражению $l(\cdot)$.

Определение 2 *Функцию* $\Delta(\lambda)$ *будем называть характеристическим определителем краевой задачи (4)-(5).*

Определение 3 *Функции* $\kappa_1(x,\lambda)$ *и* $\kappa_2(x,\lambda)$ *будем называть главными решениями уравнения* $l(y(x)) = \lambda y(x)$.

В дальнейшем понадобятся некоторые важные свойства главных решений.

Лемма 1 *Для любых комплексных чисел* λ *справедливы следующие соотношения:*

$$\kappa_\nu^{(i-1)}(0,\lambda) - \lambda \int_0^1 \kappa_\nu(x,\lambda)\overline{\sigma_i(x)}dx = \delta_{i\nu}\Delta(\lambda).$$

В следующей теореме дано интегральное представление резольвенты оператора L.

Теорема 3 *Резольвента оператора L определяется соотношением*

$$(L-\lambda I)^{-1}f(x)=(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\kappa_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}<f(\cdot),M_i(\cdot,\overline{\lambda})>, \tag{6}$$

где $M_i(t,\overline{\lambda})=L_0^*(L_0^*-\overline{\lambda}I)^{-1}\sigma_i(t), i=1,\,2$, а L_0^* – сопряженный оператор к оператору L_0. Заметим, что L_0 - оператор соответствующий задаче (4), (5) при $\sigma_1\equiv\sigma_2\equiv 0$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Отметим, что в работах [21, 22] были представлены резольвенты корректно заданных задач для оператора Лапласа и бигармонического оператора. А в работе [23] для оператора n–раз дифференцирования с одномерным нелокальным возмущением краевых условий было изучено свойство полноты корневых функций.

Следствие 1 *Из соотношения (6) несложно получить следующий вид резольвенты оператора L*

$$(L-\lambda I)^{-1}f(x)=(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)+\sum_{i=1}^{2}\frac{<f(\cdot),L_0^*(L_0^*-\overline{\lambda}I)^{-1}\sigma_i(\cdot)>}{1-\lambda<\varphi_i(\cdot),L_0^*(L_0^*-\overline{\lambda}I)^{-1}\sigma_i(\cdot)>}L_0(L_0-\lambda I)^{-1}\varphi_i(x).$$

Свойства некоторых семейств функций

В дальнейшем существенную роль играет следующая лемма.

Лемма 2 *Для любых комплексных λ и μ справедливо матричное тождество*

$$\begin{bmatrix}<\kappa_1(\cdot,\lambda),M_1(\cdot,\overline{\mu})> & <\kappa_1(\cdot,\lambda),M_2(\cdot,\overline{\mu})>\\ <\kappa_2(\cdot,\lambda),M_1(\cdot,\overline{\mu})> & <\kappa_2(\cdot,\lambda),M_2(\cdot,\overline{\mu})>\end{bmatrix}=\frac{\Delta(\mu)-\Delta(\lambda)}{\lambda-\mu}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+$$

$$+\Delta(\mu)\begin{bmatrix}\kappa_1'(0,\lambda)&\kappa_1(0,\lambda)\\ \kappa_2'(0,\lambda)&\kappa_2(0,\lambda)\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}\kappa_1'(0,\mu)&\kappa_1(0,\mu)\\ \kappa_2'(0,\mu)&\kappa_2(0,\mu)\end{bmatrix}^{-1}-\begin{bmatrix}\kappa_1'(0,\lambda)&\kappa_1(0,\lambda)\\ \kappa_2'(0,\lambda)&\kappa_2(0,\lambda)\end{bmatrix}^{-1}}{\lambda-\mu}.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\lambda<\kappa_1(\cdot,\lambda),M_1(\cdot,\overline{\mu})>=\lambda<\kappa_1(\cdot,\lambda),\sigma_1(\cdot)>+$$

$$+\mu<l(\kappa_1(\cdot,\lambda)),(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(\cdot)>.$$

Здесь учтено, что $M_\nu(t,\overline{\mu})=\sigma_\mu(t)+\overline{\mu}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_\nu(t), \nu=1,\,2$ и $l(\kappa(\cdot,\lambda))=\lambda\kappa(\cdot,\lambda)$. Используя лемму 1 и известную формулу Лагранжа [4], а также то, что

$$(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_\nu(t)|_{t=1}=0,\ \frac{\partial}{\partial t}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_\nu(t)|_{t=1}=0,$$

перепишем рассматриваемое выражение в виде

$$\lambda<\kappa_1(\cdot,\lambda),M_1(\cdot,\overline{\mu})>=-\Delta(\lambda)+\kappa_1(0,\lambda)+\mu<\kappa_1(\cdot,\lambda),L_0^*(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(\cdot)>+$$

$$\mu\left[\kappa_1'(0,\lambda)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}-\kappa_1(0,\lambda)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}\right].$$

Поскольку $M_1(\cdot,\overline{\mu})=L_0^*(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(\cdot)$, то последнее соотношение запишем в виде

$$(\lambda-\mu)<\kappa_1(\cdot,\lambda),M_1(\cdot,\overline{\mu})>=\kappa_1(0,\lambda)-\Delta(\lambda)+$$

$$+\mu\left[\kappa_1'(0,\lambda)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}-\kappa_1(0,\lambda)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}\right]. \tag{7}$$

Пусть $\lambda=\mu$. Тогда из соотношения (7) получаем равенство

$$\mu\left[\kappa_1'(0,\mu)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}-\kappa_1(0,\mu)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}\right]=\Delta(\mu)-\kappa_1(0,\mu). \tag{8}$$

Точно также как получены соотношения (7) и (8), исходя из выражения $\lambda<\kappa_1(\cdot,\lambda);M_2(\cdot,\mu)>$, приходим к соотношениям

$$(\lambda-\mu)<\kappa_1(\cdot,\lambda);M_2(\cdot,\overline{\mu})>=\kappa_1'(0,\lambda)+\ \mu[\,\kappa_1'(0,\lambda)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}-$$

$$-\ \kappa_1(0,\lambda)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}\Bigg], \tag{9}$$

$$\mu\left[\kappa_1'(0,\mu)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}-\kappa_1(0,\mu)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}\right]=-\kappa_1'(0,\,\mu). \tag{10}$$

Аналогично приходим к соотношениям

$$(\lambda-\mu)<\kappa_2(\cdot,\lambda),M_1(\cdot,\overline{\mu})>=\kappa_2(0,\lambda)+$$

$$+\ \mu\left[\kappa_2'(0,\lambda)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}-\kappa_2(0,\lambda)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}\right], \tag{11}$$

$$\mu\left[\kappa_2'(0,\mu)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}-\kappa_2(0,\lambda)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}\right]=-\kappa_2(0,\mu). \tag{12}$$

$$(\lambda-\mu)<\kappa_2(\cdot,\lambda),M_2(0,\overline{\mu})>=\kappa_2'(0,\lambda)-\Delta(\lambda)+$$

$$\mu\left[\kappa_2'(0,\lambda)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}-\kappa_2(0,\lambda)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}\right], \tag{13}$$

$$\mu\left[\kappa_2'(0,\mu)\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}-\kappa_2(0,\lambda)\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}\right]=\Delta(\mu)-\kappa_2'(0,\mu). \tag{14}$$

Рассмотрим систему соотношений (8), (12) и найдем из нее значения

$$\mu\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0},-\mu\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}.$$

Для этого систему соотношений (8), (12) запишем в векторно–матричной форме.

$$\begin{bmatrix}\kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu)\\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\overline{(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}|_{x=0}\\ -\mu\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^*-\overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}|_{x=0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta(\mu)-\kappa_1(0,\mu)\\ -\kappa_2(0,\mu)\end{bmatrix}.$$

Если $\Delta(\mu) \neq 0$, то последнее выражение примет вид

$$\begin{bmatrix} \mu\overline{(L_0^* - \overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}|_{x=0} \\ -\mu\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^* - \overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}|_{x=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu) \\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta(\mu) - \kappa_1(0,\mu) \\ -\kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix}.$$

Аналогично из системы соотношений (10) и (14) находим

$$\begin{bmatrix} \mu\overline{(L_0^* - \overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}|_{x=0} \\ -\mu\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^* - \overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}|_{x=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu) \\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\kappa_1'(0,\mu) \\ \Delta(\mu) - \kappa_2'(0,\mu) \end{bmatrix}.$$

Теперь подставляя найденные значения

$$\mu\overline{(L_0^* - \overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0}, -\mu\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^* - \overline{\mu}I)^{-1}\sigma_1(x)}\Big|_{x=0},$$

$$\mu\overline{(L_0^* - \overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}, -\mu\overline{\frac{\partial}{\partial x}(L_0^* - \overline{\mu}I)^{-1}\sigma_2(x)}\Big|_{x=0}$$

в систему соотношений (7), (9), (11), (13), получим матричное равенство

$$(\lambda-\mu)\begin{bmatrix} <\kappa_1(\cdot,\lambda), M_1(\cdot,\overline{\mu})> & <\kappa_1(\cdot,\lambda), M_2(\cdot,\overline{\mu})> \\ <\kappa_2(\cdot,\lambda), M_1(\cdot,\overline{\mu})> & <\kappa_2(\cdot,\lambda), M_2(\cdot,\overline{\mu})> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1(0,\lambda) - \Delta(\lambda) & \kappa_1'(0,\lambda) \\ \kappa_2(0,\lambda) & \kappa_2'(0,\lambda) - \Delta(\lambda) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\lambda) & \kappa_1(0,\lambda) \\ \kappa_2'(0,\lambda) & \kappa_2(0,\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu) \\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta(\mu) - \kappa_1(0,\mu) & -\kappa_1'(0,\mu) \\ -\kappa_2(0,\mu) & \Delta(\mu) - \kappa_2'(0,\mu) \end{bmatrix}.$$

Правую часть последнего матричного равенства преобразуем к виду

$$(\lambda-\mu)\begin{bmatrix} <\kappa_1(\cdot,\lambda), M_1(\cdot,\overline{\mu})> & <\kappa_1(\cdot,\lambda), M_2(\cdot,\overline{\mu})> \\ <\kappa_2(\cdot,\lambda), M_1(\cdot,\overline{\mu})> & <\kappa_2(\cdot,\lambda), M_2(\cdot,\overline{\mu})> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1(0,\lambda) & \kappa_1'(0,\lambda) \\ \kappa_2(0,\lambda) & \kappa_2'(0,\lambda) \end{bmatrix} -$$

$$-\Delta(\lambda)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\lambda) & \kappa_1(0,\lambda) \\ \kappa_2'(0,\lambda) & \kappa_2(0,\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu) \\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix}^{-1} \Delta(\mu) -$$

$$-\begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\lambda) & \kappa_1(0,\lambda) \\ \kappa_2'(0,\lambda) & \kappa_2(0,\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu) \\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \kappa_1(0,\mu) & \kappa_1'(0,\mu) \\ \kappa_2(0,\mu) & \kappa_2'(0,\mu) \end{bmatrix}.$$

Используя следующее матричные тождества

$$\begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\lambda) & \kappa_1(0,\lambda) \\ \kappa_2'(0,\lambda) & \kappa_2(0,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1(0,\lambda) & \kappa_1'(0,\lambda) \\ \kappa_2(0,\lambda) & \kappa_2'(0,\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu) \\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \kappa_1(0,\mu) & \kappa_1'(0,\mu) \\ \kappa_2(0,\mu) & \kappa_2'(0,\mu) \end{bmatrix}^{-1}$$

последнее равенство запишем в виде

$$(\lambda-\mu)\begin{bmatrix} <\kappa_1(\cdot,\lambda), M_1(\cdot,\overline{\mu})> & <\kappa_1(\cdot,\lambda), M_2(\cdot,\overline{\mu})> \\ <\kappa_2(\cdot,\lambda), M_1(\cdot,\overline{\mu})> & <\kappa_2(\cdot,\lambda), M_2(\cdot,\overline{\mu})> \end{bmatrix} = (\Delta(\mu) - \Delta(\lambda))\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu) \\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu) \\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu) \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} \kappa_1'(0,\lambda) & \kappa_1(0,\lambda) \\ \kappa_2'(0,\lambda) & \kappa_2(0,\lambda) \end{bmatrix}^{-1} \right) \Delta(\mu).$$

Итак, получили требуемое матричное тождество.

Лемма 2 полностью доказана.

Поскольку спектр оператора L дискретен, то найдется неограниченно растущая последовательность $\{R_N\}$ радиусов таких, что на соответствующих окружностях $|\lambda| = R_N$ нет точек спектра оператора. Пусть $A_N = \{\lambda \in C : |\lambda| = R_N\}$. В дальнейшем считаем, что R_N выбраны так чтобы выполнялось неравенство $dist(A_N, \Lambda) > \delta > 0$ для всех N. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм соответствующие выбранным окружностям

$$(S_N f)(x) = \sum_{|\lambda_s|<R_N} P_s f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=R_N} (L - \lambda I)^{-1} f(x) d\lambda$$

для произвольной функции f из пространства $L_2(0,1)$, а P_s – проектор [24].

Так как λ_s собственное значение оператора L алгебраической кратности m_s, тогда

$$\Delta(\lambda_s) = \Delta'(\lambda_s) = \dots = \Delta^{(m_s-1)}(\lambda_s) = 0, \Delta^{(m_s)}(\lambda_s) \neq 0.$$

Для достаточно малого $\delta > 0$ определим проектор

$$P_s f(x) \equiv -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda-\lambda_s|=\delta} (L - \lambda I)^{-1} f(x) d\lambda =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{2} \frac{1}{(m_s-1)!} \lim_{\lambda\to\lambda_s} \frac{\partial^{m_s-1}}{\partial\lambda^{m_s-1}} \left(\kappa_\nu(x,\lambda) \frac{(\lambda-\lambda_s)^{m_s}}{\Delta(\lambda)} < f, M_\nu(t,\overline{\lambda}) > \right) =$$

$$= -\sum_{j=0}^{m_s-1} \sum_{\nu=1}^{2} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \kappa_\nu(x,\lambda)}{\partial\lambda^j}\bigg|_{\lambda=\lambda_s} \frac{1}{(m_s-1-j)!} \lim_{\lambda\to\lambda_s} \frac{\partial^{m_s-1-j}}{\partial\lambda^{m_s-1-j}} \left(\frac{(\lambda-\lambda_s)^{m_s} < f, M_\nu(t,\overline{\lambda}) >}{\Delta(\lambda)} \right).$$

Таким образом, проектор P_s представляет конечномерный интегральный оператор

$$P_s f = \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{j=0}^{m_s-1} < f,\, h^{(\nu)}_{s,\, m_s-1-j} > y^{(\nu)}_{s,\,j},$$

где

$$y^{(\nu)}_{s,\,j}(x) = \frac{1}{j!} \lim_{\lambda\to\lambda_s} \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} \kappa_\nu(x,\lambda),$$

$$h^{(\nu)}_{s,\, m_s-1-j}(x) = \frac{1}{(m_s-s-j)!} \lim_{\lambda\to\lambda_s} \frac{\partial^{m_s-1-j}}{\partial\overline{\lambda}^{m_s-1-j}} \left(\frac{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda_s})^{m_s}}{\overline{\Delta(\lambda)}} \cdot M_\nu(x,\,\overline{\lambda}) \right).$$

Заметим, что при $\nu=1,\,2$ цепочка функций $\{y_{s,j}^{(\nu)},\ \ j=0,\ldots,m_s-1\}$ удовлетворяет условиям (5), а также дифференциальным соотношениям

$$l(y_{s,\,j}^{(\nu)}(x))=\lambda_s y_{s,\,j}^{(\nu)}(x)+y_{s,\,j-1}^{(\nu)}(x),\; j\geq 1,$$

$$l(y_{s,\,0}^{(\nu)}(x))=\lambda_s y_{s,\,0}^{(\nu)}(x).$$

Если $y_{s,\,0}^{(\nu)}\neq 0$ в смысле L_2, то указанная цепочка представляет систему корневых функций оператора L. Основная цель работы исследовать полноту системы функций

$$Y\equiv\{y_{s,\,j}^{(\nu)},\ \ \nu=1,2,\,j=\overline{0,\,m_s-1},\,\lambda_s\in\Lambda\}$$

в функциональном пространстве $L_2(0,\,1)$. Систему функций Y будем называть системой корневых функций, порожденной оператором L.

Обозначим через $Q_Nf=f-S_Nf$ и назовем ее остаточным членом функции f. Когда $f(x)=\kappa_\nu(x,\lambda),\nu=1,\,2$ удается получить интегральное представление остаточного члена. То есть, справедлива

Лемма 3 *При любом комплексном μ таком, что $|\mu|<R_N$ справедлива интегральная формула остаточного члена*

$$Q_N\kappa_\nu(x,\mu)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\Delta(\mu)}{\Delta(\lambda)(\lambda-\mu)}\kappa_\nu(x,\mu)d\lambda$$

при $\nu=1,\,2$.

Доказательство. Запишем

$$S_N\kappa_1(x,\mu)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{2}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\kappa_\nu(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}<\kappa_\nu(\cdot,\mu);M_\nu(\cdot,\overline{\lambda})>d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\left[<\kappa_1(\cdot,\mu);M_1(\cdot,\overline{\lambda})>\quad<\kappa_1(\cdot,\mu);M_2(\cdot,\overline{\lambda})>\right]\begin{bmatrix}\frac{\kappa_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\\ \frac{\kappa_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\end{bmatrix}d\lambda. \tag{15}$$

Аналогично

$$S_N\kappa_2(x,\mu)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\left[<\kappa_2(\cdot,\mu);M_1(\cdot,\overline{\lambda})>\quad<\kappa_2(\cdot,\mu);M_2(\cdot,\overline{\lambda})>\right]\begin{bmatrix}\frac{\kappa_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\\ \frac{\kappa_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\end{bmatrix}d\lambda. \tag{16}$$

В дальнейшем формулы (15), (16) запишем в матричной форме

$$\begin{bmatrix}S_N\kappa_1(x,\mu)\\ S_N\kappa_2(x,\mu)\end{bmatrix}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\begin{bmatrix}<\kappa_1(\cdot,\mu);M_1(\cdot,\overline{\lambda})> & <\kappa_1(\cdot,\mu);M_2(\cdot,\overline{\lambda})>\\ <\kappa_2(\cdot,\mu);M_1(\cdot,\overline{\lambda})> & <\kappa_2(\cdot,\mu);M_2(\cdot,\overline{\lambda})>\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\kappa_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\\ \frac{\kappa_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\end{bmatrix}d\lambda.$$

Используя лемму 2 последнее равенство запишем в виде

$$\begin{bmatrix}S_N\kappa_1(x,\mu)\\ S_N\kappa_2(x,\mu)\end{bmatrix}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\begin{bmatrix}\frac{\Delta(\mu)-\Delta(\lambda)}{\lambda-\mu} & 0\\ 0 & \frac{\Delta(\mu)-\Delta(\lambda)}{\lambda-\mu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\kappa_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\\ \frac{\kappa_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\end{bmatrix}d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\begin{bmatrix}\kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu)\\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu)\end{bmatrix}\left(\frac{\begin{bmatrix}\kappa_1'(0,\lambda) & \kappa_1(0,\lambda)\\ \kappa_2'(0,\lambda) & \kappa_2(0,\lambda)\end{bmatrix}^{-1}-\begin{bmatrix}\kappa_1'(0,\mu) & \kappa_1(0,\mu)\\ \kappa_2'(0,\mu) & \kappa_2(0,\mu)\end{bmatrix}^{-1}}{\lambda-\mu}\right)\Delta(\lambda)d\lambda.$$

Последний интеграл в правой части полученного тождества по теореме Коши равен нулю, поскольку подынтегральная функция может иметь только устранимые изолированные особые точки. Таким образом, имеем векторное тождество

$$S_N\begin{bmatrix}\kappa_1(x,\mu)\\ \kappa_2(x,\mu)\end{bmatrix}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\begin{bmatrix}\frac{\kappa_1(x,\lambda)}{\lambda-\mu}\\ \frac{\kappa_2(x,\lambda)}{\lambda-\mu}\end{bmatrix}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\Delta(\mu)}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix}\frac{\kappa_1(x,\mu)}{\lambda-\mu}\\ \frac{\kappa_2(x,\mu)}{\lambda-\mu}\end{bmatrix}d\lambda. \tag{17}$$

Учитывая следующие равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\kappa_1(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda=\begin{cases}\kappa_1(x,\mu), & |\mu|<R_N;\\ \frac{1}{2}\kappa_1(x,\mu), & |\mu|=R_N;\\ 0, & |\mu|>R_N;\end{cases} \tag{18}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\kappa_2(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda=\begin{cases}\kappa_2(x,\mu), & |\mu|<R_N;\\ \frac{1}{2}\kappa_2(x,\mu), & |\mu|=R_N;\\ 0, & |\mu|>R_N;\end{cases} \tag{19}$$

из соотношения (17) получим интегральное представление для остаточного члена $Q_N\kappa_\nu(x,\mu),\nu=1,\ 2$.

Лемма 3 полностью доказана.

Теперь исследуем полноту семейства функций $\{\kappa_1(x,\mu),\kappa_2(x,\mu),\forall\mu\in\mathbb{C}\}$ в функциональном пространстве $L_2(0,1)$.

Теорема 4 *Для любого набора граничных функций* $\{\sigma_\nu,\nu=1,2\}$ *из пространства* $L_2(0,1)$ *семейство функций* $\{\kappa_\nu(x,\mu),\nu=1,2,\forall\mu\in\mathbb{C}\}$ *полна в* $L_2(0,1)$.

Доказательство. Пусть $h\in L_2(0,1)$ и ортогональна системе функций $\{\kappa_\nu(\cdot,\mu),\nu=1,2,\forall\mu\in\mathbb{C}\}$. Тогда $\forall\mu\in\mathbb{C}$ справедливо

$$\int_0^1\kappa_1(x,\lambda)\overline{h(x)}dx=$$

$$\begin{vmatrix}\int_0^1\varphi_1(x,\lambda)\overline{h(x)}dx & \int_0^1\varphi_2(x,\lambda)\overline{h(x)}dx\\ -\lambda\int_0^1\varphi_1(\tau,\lambda)\overline{\sigma_2(\tau)}d\tau & 1-\lambda\int_0^1\varphi_2(\tau,\lambda)\overline{\sigma_2(\tau)}d\tau\end{vmatrix}=0. \tag{20}$$

Обозначив через $C_i(\lambda)=\int_0^1\varphi_i(x,\lambda)\overline{h(x)}dx, i=1,2$ запишем полученное равенство в следующем виде

$$\alpha_{11}(\lambda)C_1(\lambda)+\alpha_{12}(\lambda)C_2(\lambda)=0, \tag{21}$$

где $\alpha_{1i}(\lambda),i=1,2$ соответствующие алгебраические дополнения к $C_i(\lambda),i=1,2$ из (20).

Аналогичными рассуждениями для $\kappa_2(x, \lambda)$ получим

$$\alpha_{21}(\lambda)C_1(\lambda) + \alpha_{22}(\lambda)C_2(\lambda) = 0, \tag{22}$$

Так как определитель

$$\Theta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & \alpha_{22}(\lambda) \end{vmatrix}$$

полученный из системы (21)–(22) является целой функцией, то из $\Theta(0) = 1$ найдется $\gamma > 0$ что для всех $\mid \lambda \mid < \gamma$: $\Theta(\lambda) \neq 0$. Тогда в этой же окрестности $C_i(\lambda) \equiv 0, i = 1, 2$. То из того что в каждой ненулевой окрестности количество точек континуум, и из полноты семейства функций $\{\varphi(x, \lambda), i = 1, 2\}$ [23] следует $h(x) = 0$ почти всюду в $L_2(0, 1)$.

Теорема 4 полностью доказана.

Аппроксимация главных решений системой корневых функций

В данном пункте исследуем аппроксимативные свойства главных решений системой корневых функций Y оператора L.

Из работы [4] известны следующие асимптотики

$$\varphi_1(x, \lambda) = cos(\sqrt{\lambda}x)[1], \;\; \varphi_2(x, \lambda) = \frac{sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}[1], \tag{23}$$

где $[1] = 1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$.

Рассмотрим характеристическую функцию

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda < \varphi_1(\cdot, \lambda), \sigma_1(\cdot) > & -\lambda < \varphi_2(\cdot, \lambda), \sigma_1(\cdot) > \\ -\lambda < \varphi_1(\cdot, \lambda), \sigma_2(\cdot) > & 1 - \lambda < \varphi_2(\cdot, \lambda), \sigma_2(\cdot) > \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \lambda(< \varphi_1(\cdot, \lambda), \sigma_1(\cdot) > + < \varphi_2(\cdot, \lambda), \sigma_2(\cdot) >) + \lambda^2 \begin{vmatrix} < \varphi_1(\cdot, \lambda), \sigma_1(\cdot) > & < \varphi_2(\cdot, \lambda), \sigma_1(\cdot) > \\ < \varphi_1(\cdot, \lambda), \sigma_2(\cdot) > & < \varphi_2(\cdot, \lambda), \sigma_2(\cdot) > \end{vmatrix},$$

то учитывая что

$$\begin{vmatrix} < \varphi_1(\cdot, \lambda), \sigma_1(\cdot) > & < \varphi_2(\cdot, \lambda), \sigma_1(\cdot) > \\ < \varphi_1(\cdot, \lambda), \sigma_2(\cdot) > & < \varphi_2(\cdot, \lambda), \sigma_2(\cdot) > \end{vmatrix} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \lambda) & \varphi_2(y, \lambda) \\ \varphi_1(x, \lambda) & \varphi_2(y, \lambda) \end{vmatrix} \sigma_1(x)\sigma_2(y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 [\varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(y, \lambda) - \varphi_1(y, \lambda)\varphi_2(x, \lambda)]\, \sigma_1(x)\sigma_2(y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{sin\sqrt{\lambda}(x - y)}{\sqrt{\lambda}}[1]\sigma_1(x)\sigma_2(y)dxdy$$

получим справедливость следующей леммы.

Лемма 4 *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда найдутся такие константы C_1, C_2, C_3 и C_4, которые зависят только от расстояния $dist(\mid \lambda \mid, \Lambda)$, что*

$$C_1 \mid \lambda \mid^{\frac{1}{2}} \ln(1 + |\lambda|) exp(\mid Re\sqrt{\lambda} \mid) \leq \mid \Delta(\lambda) \mid \leq C_2 \mid \lambda \mid^{\frac{3}{2}} exp(\mid Re\sqrt{\lambda} \mid)$$

и независимо от выполнения условий теоремы 1 справедливы оценки сверху

$$| \alpha_{11}(\lambda) | \leq C_3 | \lambda |^{\frac{1}{2}} exp(| Re\sqrt{\lambda} |)$$

и

$$| \alpha_{22}(\lambda) | \leq C_4 | \lambda | exp(| Re\sqrt{\lambda} |).$$

Лемма 5 *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для любого комплексного числа μ и $i = 1, 2$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{R_N \to \infty} \|\kappa_i(\cdot, \mu) - \sum_{|\lambda_s| < R_N} \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{j=0}^{m_s-1} < \kappa_i(\cdot, \mu), \, h^{(\nu)}_{s, m_s-1-j}(\cdot) > y^{(\nu)}_{s,j}(\cdot)\| = 0,$$

где норма $\| \cdot \|$ понимается в смысле нормы $L_2(0, 1)$.

Доказательство. Докажем справедливость леммы при $i = 1$, а случай когда $i = 2$ доказывается аналогичным образом. Рассмотрим норму погрешности в $L_2(0, 1)$

$$\|Q_N \kappa_1(x, \mu)\| = \sup_{\|g\|=1} | < Q_N \kappa_1(\cdot, \mu), \; g(\cdot) > |$$

$$= \sup_{\|g\|=1} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=R_N} \frac{\Delta(\mu)}{\Delta(\lambda)(\lambda - \mu)} < \kappa_1(\cdot, \lambda), \; g(\cdot) > d\lambda \right| \leq$$

$$\leq \frac{| \Delta(\mu) |}{2\pi} \sup_{\|g\|=1} \left| \oint_{|\lambda|=R_N} \frac{< \kappa_1(\cdot, \lambda), \; g(\cdot) >}{\Delta(\lambda)(\lambda - \mu)} d\lambda \right| =$$

$$= \frac{| \Delta(\mu) |}{2\pi} \sup_{\|g\|=1} \left| \oint_{|\lambda|=R_N} \frac{\alpha_{11}(\lambda) - \Delta(\lambda, g, \sigma_2)}{\Delta(\lambda, \sigma_1, \sigma_2)(1 - \frac{\mu}{\lambda})} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{| \Delta(\mu) |}{2\pi} \sup_{\|g\|=1} \left| \oint_{|\lambda|=R_N} \frac{\alpha_{11}(\lambda)}{\Delta(\lambda, \sigma_1, \sigma_2)(1 - \frac{\mu}{\lambda})} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \right| +$$

$$+ \frac{| \Delta(\mu) |}{2\pi} \sup_{\|g\|=1} \left| \oint_{|\lambda|=R_N} \frac{\Delta(\lambda, g, \sigma_2)}{\Delta(\lambda, \sigma_1, \sigma_2)(1 - \frac{\mu}{\lambda})} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \right|,$$

где $g \in L_2(0, 1)$, целая функция $\Delta(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) := \Delta(\lambda)$ определяется согласно формуле (1). Учитывая полученное неравенство и из леммы 4 следует предельное соотношение

$$\lim_{R_N \to \infty} \|Q_N(\cdot, \, \mu)\| = 0.$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1 является следствием леммы 5.

Список литературы

[1] Sommerfeld, A. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen / A. Sommerfeld // Atti Intern. Matem. Rome. - 1909. - V. 3. - P. 116–124.

[2] Feller, W. The parabolic differential equations and associated semi-grops of transformations / W. Feller // Ann. Math. - 1952. - V. 55. - №3. - P. 468–518.

[3] Feller, W. Diffusion processes in one dimension / W. Feller // Trans. Amer. Math. Soc. - 1954. - V. 77. - №1. - P. 1–31.

[4] Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы: монография. - М.: Наука, - 1969. - 528 с.

[5] Шкаликов, А.А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями / А.А. Шкаликов // Функциональный анализ и его приложения. - 1976. - Т. 10. - Вып. 4. - С. 69–80.

[6] Якубов, С.Я. Полнота собственных и присоединенных функций некоторых нерегулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений / С.Я. Якубов, К.С. Мамедов // Функ. анализ и его прил. - 1980. - Т. 14. - Вып. 4. - С. 93—94.

[7] Марченко, В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев: Наукова думка, 1977, - С. 330.

[8] Маламуд, М.М. Теоремы полноты для систем дифференциальных уравнений / М.М. Маламуд, Л.Л. Оридорога // Функ. анализ и его прил. - 2000. - Т. 34. - Вып. 4. - С. 88-–90.

[9] Маламуд, М.М. О полноте системы корневых векторов оператора Штурма-Лиувилля с общими граничными условиями / М.М. Маламуд // Функциональный анализ и его приложения. - 2008. - Т. 42. - Вып. 3. - С. 45–52.

[10] Любич, Ю.И. О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования / Ю.И. Любич // Изв. вузов. Математика. - 1959. - №4. С. 94—103.

[11] Седлецкий, А.М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси / А.М. Седлецкий // УМН. - 1982. -Т. 37. - Вып. 5. - С. 51—95.

[12] Шкаликов, А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями / А.А. Шкаликов // Вестник МГУ. - 1982. - Серия 1. - №6. - С. 12–21.

[13] Божинов, Н.С. О теоремах единственности и полноте для разложения по собственным и присоединенным функциям нелокального оператор Штурма-Лиувилля на конечном интервале / Н.С. Божинов // Дифференциальные уравнения. - 1990. - Т. 26. -№5. - С. 741–753.

[14] Брюнс, В. О собственных и присоединенных функциях одномерного линейного дифференциального оператора n-го порядка / В. Брюнс // Изв. вузов. Матем. - 1972. - №10. - С. 7-–12.

[15] Shkalikov, A.A. On the Riesz basis property of the eigen- and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems / A.A. Shkalikov, O.A. Veliev // Mathematical Notes. - 2009. - V. 85. - Is. 5–6. - P. 647–660.

[16] Malamud, M.M. On the completeness of the root vectors of first-order systems / M.M. Malamud, L.L. Oridoroga // Doklady Mathematics. - 2010. - V. 82. - №. 3. - P. 899—904.

[17] Veliev, O.A. On the basis property of the root functions of differential operators with matrix coefficients / O.A. Veliev // Central European Journal of Mathematics. - 2011. - V. 9. -№3. - P. 657–672.

[18] Gesztesy, F. A Schauder and Riesz basis criterion for non-self-adjoint Schrodinger operators with periodic and antiperiodic boundary conditions / F. Gesztesy, V. Tkachenko // Journal of Differential Equations. - 2012. - V. 253. - P. 400–437.

[19] Отелбаев, М. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского / М. Отелбаев, А.Н. Шыныбеков // Доклады АН СССР. - 1982. - №4. - С. 815–819.

[20] Отелбаев, М. К вопросам расширения и сужения операторов / М. Отелбаев, Б.К. Кокебаев, А.Н. Шыныбеков // Доклады АН СССР. - 1983. - №6. - С. 1307–1311.

[21] Кангужин, Б.Е. Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотой области / Б.Е. Кангужин, А.А. Анияров // Мат. заметки. - 2011. -Т. 89. -Вып. 6. - С. 856–867.

[22] Кангужин, Б.Е. Аппроксимативные свойства системы корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков / Б.Е. Кангужин, Д.Б. Нурахметов, Н.Е. Токмагамбетов // Уфимский математический журнал. - 2011. -Т.3. - №3. - С. 80–92.

[23] Берикханова, Г.Е. Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора / Г.Е. Берикханова, Б.Е. Кангужин // Уфимский математический журнал. - 2010. - Т. 2. - №1. - С. 17—34.

[24] Рисс, Ф.Б., Секефальвен-Надь, Б. Лекции по функциональному анализу. - М: Мир, 1979. - С. 587.

References

[1] Sommerfeld, A. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen / A. Sommerfeld // Atti Intern. Matem. Rome. - 1909. - V. 3. - P. 116–124.

[2] Feller, W. The parabolic differential equations and associated semi-grops of transformations / W. Feller // Ann. Math. - 1952. - V. 55. - №3. - P. 468–518.

[3] Feller, W. Diffusion processes in one dimension / W. Feller // Trans. Amer. Math. Soc. - 1954. - V. 77. - №1. - P. 1–31.

[4] Naimark, M.A. Lineynyye differentsial'nyye operatory: monograph. - M.: Nauka, 1969. - P. 528.

[5] Shkalikov, A.A. On the completeness of eigenfunctions and associated functions ordinary differential operator with irregular separated boundary conditions / A.A. Shkalikov // Funktsional'nyy analiz i yego prilozheniya. - 1976. - V. 10. - Is. 4. - P. 69–80.

[6] Yakubov, S.Y. Completeness of natural and associated functions of irregular boundary value problems for ordinary differential equations / S.Y. Yakubov, K.S. Mamedov // Funktsional'nyy analiz i yego prilozheniya. - 1980. - V. 14. - Is. 4. - P. 93–94.

[7] Marchenko, V.A. Sturm-Liouville operators and their App. - Kiev: Naukova Dumka, 1977 - P. 330.

[8] Malamud, M.M. Completeness theorem for systems differential equations / M.M. Malamud, L.L. Oridoroga // Funktsional'nyy analiz i yego prilozheniya. - 2000. - V. 34. - Is. 4. - P. 88–90.

[9] Malamud, M.M. Completeness of the system of root vectors of Sturm–Liouville operator with general boundary conditions / M.M. Malamud // Funktsional'nyy analiz i yego prilozheniya. - 2008. - V. 42. - Is. 3. - P. 45–52.

[10] Lubich, Y. On the eigenfunctions and associated functions of the operator differentiation / Y. Lubich // Izv. vuzov. Matematika. - 1959. - №4. - P. 94–103.

[11] Sedletskii, A.M. Biorthogonal expansions of functions in series exponents on intervals of the real axis / A.M. Sedletskii // Usp. Mat. Nauk. - 1982. - V. 37. - Is. 5. - P. 51–95.

[12] Shkalikov, A.A. On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions / A.A. Shkalikov // Vestnik MGU. - 1982. - Series 1. - №6. - P. 12–21.

[13] Bojinov, N.S. Uniqueness theorems and completeness for expansions in eigenfunctions and associated functions of a nonlocal Sturm- Liouville problem on a finite interval / N.S. Bojinov // Different. Uravn. - 1990. - T. 26. - №5. - P. 741–753.

[14] Bruns, V. On the eigenfunctions and associated functions of the one-dimensional linear differential operator n-th order / B. Bruns // Izv. vuzov. Matematika. - 1972. - №10. - P. 7–12.

[15] Shkalikov, A.A. On the Riesz basis property of the eigen- and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems / A.A. Shkalikov, O.A. Veliev // Mathematical Notes. - 2009. - V. 85. - Is. 5–6. - P. 647–660.

[16] Malamud, M.M. On the completeness of the root vectors of first-order systems / M.M. Malamud, L.L. Oridoroga // Doklady Mathematics. - 2010. - V. 82. - №. 3. - P. 899—904.

[17] Veliev, O.A. On the basis property of the root functions of differential operators with matrix coefficients / O.A. Veliev // Central European Journal of Mathematics. - 2011. - V. 9. -№3. - P. 657–672.

[18] Gesztesy, F. A Schauder and Riesz basis criterion for non-self-adjoint Schrodinger operators with periodic and antiperiodic boundary conditions / F. Gesztesy, V. Tkachenko // Journal of Differential Equations. - 2012. - V. 253. - P. 400–437.

[19] Otelbaev, M. Ill-posed problems of type Bitsadze-Samara / M. Otelbaev, A.N. Shynybekov // Doklady AN SSSR. - 1982. - №4. - P. 815–819.

[20] Otelbaev, M. The issues expansion and contraction operators / Otelbaev, BK Kokebaev, AN Shynybekov / / Doklady AN SSSR. - 1983. - No 6. - S. 1307 - 1311.

[21] Kanguzhin, B.E. Korrektnyye zadachi dlya operatora Laplasa v prokolotoy oblasti / B.E. Kanguzhin, A.A. Aniyarov // Mat. zametki. - 2011. -T. 89. -Vyp. 6. -S. 856–867.

[22] Kanguzhin, B.E. Approksimativnyye svoystva sistemy kornevykh funktsiy , porozhdayemyye korrektno razreshimymi krayevymi zadachami dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vysshikh poryadkov / B.E. Kanguzhin, D.B. Nurakhmetov, N.E. Tokmagambetov // Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. -2011. -T. 3. -Vyp. 3. -S. 80–92.

[23] Berikkhanova, G.E. Rezol'venty konechnomernykh vozmushchennykh korrektnykh zadach dlya bigarmonicheskogo operatora / G.E. Berikkhanova, B.E. Kanguzhin // Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. -2010. -T. 2. -Vyp. 1. -S. 17–34.

[24] Riess, F.B., Sz.-Nagy, B. Lectures on functional analysis. - Moscow: Mir, 1979. - P. 587.