Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Б.Е. Кангужин, Д.Б. Нурахметов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
dauletkaznu@gmail.com

Аннотация

В работе дано полное описание всюду разрешимых краевых задач для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Затем выписаны всюду разрешимые краевые задачи на проколотом отрезке. Приведены формулы резольвенты указанных краевых задач.

1 Введение

Известно [1], что для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами всюду разрешимой задачей является задача Коши, то есть для всюду разрешимости краевые условия выбираются специальным образом. В данной работе предлагается еще один способ постановки всюду разрешимых краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных дифференциальных уравнениях второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке. В настоящей статье описаны всевозможные всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке. В заключении приведены формулы резольвенты для найденных всюду разрешимых задач. Метод работы идейно близок к методам работ [2,3,4].

2 Вспомогательные утверждения и доказательства теорем

Теорема 1. *В пространстве $L_2[0,1]$ решение задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами вида:*

$$y^{''}(x)+p_1(x)y^{'}(x)+p_2(x)y(x)=f(x), 0<x<1, \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$y(0)=0, y^{'}(0)=0, \tag{2}$$

задается формулой:

$$y(x)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt, \tag{3}$$

где

$$k(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} y_1'(t) & y_2'(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $y_1(x)$, $y_2(x)$ - решения однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Доказательство. Докажем, что правая часть соотношения (3) удовлетворяет краевой задаче (1), (2). Для этого находим $y'(x)$, $y''(x)$.

$$y'(x) = \int_0^x k'_x(x,t)f(t)dt + k(x,x)f(x).$$

Вычислим $k(x,x)$ по формуле

$$k(x,x) = \frac{1}{\Delta(x)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Следовательно, имеем

$$y'(x) = \int_0^x k'_x(x,t)f(t)dt. \tag{7}$$

$$y''(x) = \int_0^x k''_{xx}(x,t)f(t)dt + k'_x(x,x)f(x).$$

Вычислим $k'_x(x,x)$ по формуле

$$k'_x(x,x) = \frac{1}{\Delta(x)} \begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, имеем

$$y''(x) = \int_0^x k''_{xx}(x,t)f(t)dt + f(x) \tag{8}$$

Теперь формулы (3), (7), (8) поставим в формулу (1).

$$\int_0^x k''_{xx}(x,t)f(t)dt + f(x) + p_1(x)\int_0^x k'_x(x,t)f(t)dt + p_2(x)\int_0^x k(x,t)f(t)dt =$$

$$= \int_0^x \left[k''_{xx}(x,t) + p_1(x)k'_x(x,t) + p_2(x)k(x,t)\right] f(t)dt + f(x) = f(x). \tag{9}$$

Так как

$$k(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}, \; k'_x(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}$$

$$k''_{xx}(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y''_1(x) & y''_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} = -p_1(x)k'_x(x,t) - p_2(x)k(x,t),$$

то, при $0 \le t < x < 1$, $k''_{xx}(x,t) + p_1(x)k'_x(x,t) + p_2(x)\,k(x,t) = 0$. Из формул (3) и (7) выполнение начальных условий очевидна.

Теорема 1 доказана.

Пусть $h(x)$ - произвольная дважды дифференцируемая на отрезке [0, 1] функция. Введем новую функцию по формуле:

$$I(x) = \int_0^x k(x,t)\left[h''(t) + p_1(t)h'(t) + p_2(t)h(t)\right] dt. \tag{10}$$

Какими свойствами обладает $I(x)$ функция? Вычислим значение функции $I(x)$ в точке $x=0$.

$$I(0)=\int_0^0 k(0,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=0. \tag{11}$$

Теперь найдем производную первого порядка функции $I(x)$ и найдем ее значение в точке $x=0$.

$$I^{'}(x)=\int_0^x k_x^{'}(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+k(x,x)\left[h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x)\right],$$

так как $k(x,x)=0$, то получим следующую формулу:

$$I^{'}(x)=\int_0^x k_x^{'}(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt, \tag{12}$$

$$I^{'}(0)=\int_0^0 k_x^{'}(0,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=0. \tag{13}$$

Найдем производную второго порядка функции $I(x)$:

$$I^{''}(x)=\int_0^x k_{xx}^{''}(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+$$

$$+k_x^{'}(x,x)\left[h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x)\right],$$

так как $k_x^{'}(x,x)=1$, то получим следующую формулу:

$$I^{''}(x)=\int_0^x k_{xx}^{''}(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x). \tag{14}$$

Если взять линейную комбинацию (10), (12), (14) в виде $I^{''}(x)+p_1I^{'}(x)+p_2I(x)$, то получим

$$I^{''}(x)+p_1I^{'}(x)+p_2I(x)=\int_0^x\left[k_{xx}^{''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'}(x,t)+p_2(x)k(x,t)\right]$$

$$\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x),$$

то есть

$$I^{''}(x)+p_1I^{'}(x)+p_2I(x)=h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x). \tag{15}$$

Здесь учтено, что при $0\le t<x<1$, $k_{xx}^{''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'}(x,t)+p_2(x)\,k(x,t)=0$.

Таким образом, мы показали, что значение самой функции $I(x)$ и производной первого порядка в точке $x=0$ равно нулю и существует производная второго порядка, причем выполняется соотношение (15).

С другой стороны если вспомнить формулу Лагранжа, то $I(x)$ функцию можно переписать в виде:

$$I(x)=\int_0^x k(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=$$

$$= \int_0^x h(t)\left[k''_{tt}(x,t) - (p_1(t)k(x,t))'_t + p_2(t)k(x,t)\right]dt +$$

$$+h(x) - h'(0)k(x,0) + h(0)k'_t(x,0) - h(0)p_1(0)k(x,0). \qquad (16)$$

Вычислим следующие выражения $k''_{tt}(x,t) - (p_1(t)k(x,t))'_t + p_2(t)k(x,t)$, $k(x,0)$, $k'_t(x,0)$ по отдельности.

$$k'_t(x\,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}},$$

$$k''_{tt}(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y''_1(t) & y''_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}^2}\begin{vmatrix} y''_1(t) & y''_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + p'_1(t)k(x,t) + p_1(t)k'_t(x,t) =$$

$$= -p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} - p_2(t)k(x,t) + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1^2k(x,t)+$$

$$+p'_1(t)k(x,t) + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}},$$

$$k''_{tt}(x,t) - (p_1(t)k(x,t))'_t + p_2(t)k(x,t) = -p_2(t)k(x,t) + p'_1(t)k(x,t) + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} +$$

$$+p_1^2(t)k(x,t) - p'_1(t)k(x,t) - p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} - p_1^2(t)k(x,t) + p_2(t)k(x,t) = 0,$$

$$k(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(0) & y'_2(0) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}}, \quad k'_t(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(0) & y'_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(0) & y'_2(0) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}} + p_1(0)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(0) & y'_2(0) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}},$$

где $y_1(0) = 1$, $y'_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y'_2(0) = 1$ фундаментальная система решений. Тогда получим, что

$$k(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = y_2(x), \qquad (17)$$

$$k_t^{'}(x,0)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}+p_1(0)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}=-y_1(x)+p_1(0)y_2(x). \tag{18}$$

То есть (16) формула примет следующий вид:

$$I(x)=h(x)-h^{'}(0)y_2(x)+h(0)\left(-y_1(x)+p_1(0)y_2(x)\right)-h(0)p_1(0)y_2(x)=$$

$$=h(x)-h(0)y_1(x)-h^{'}(0)y_2(x). \tag{19}$$

Удобно вести обозначение $M(x)=h(x)-I(x)$. Найдем производную первого и второго порядка функции $M(x)$.

$$M^{'}(x)=h^{'}(x)-I^{'}(x),$$

$$M^{''}(x)=h^{''}(x)-I^{''}(x).$$

Если взять линейную комбинацию $M^{''}(x)+p_1(x)M^{'}(x)+p_2(x)M(x)$, то в результате для любой гладкой функции $h(x)$ получим соотношение

$$M^{''}(x)+p_1(x)M^{'}(x)+p_2(x)M(x)=h^{''}(x)-I^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)-$$

$$-p_1(x)I^{'}(x)+p_2(x)h(x)-p_2(x)I(x)=0,$$

или

$$M^{''}(x)+p_1(x)M^{'}(x)+p_2(x)M(x)=0. \tag{20}$$

Теперь используем граничные условия (11), (13), тогда для произвольной гладкой функции $h(x)$ имеем граничные соотношения

$$h(x)|_{x=0}-M(x)|_{x=0}=0,$$

$$h^{'}(x)|_{x=0}-M^{'}(x)|_{x=0}=0. \tag{21}$$

В силу произвольности $h(x)$ при $t\in[0,1]$ из соотношения (18) убеждаемся в справедливости следующего свойства функции $k(x,t):$

$$k(x,t)|_{x=0,\,t=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}k(x,t)|_{x=0,\,t=0}=-1. \tag{22}$$

Поэтому сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждения.

Теорема 2. *Функция $k(x,t)$ задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке обладает свойствами:*
1) $k(P,Q)=k(Q,P),\forall Q,P\in[0,1]$,
2) $k(P,Q)\le 0,\forall Q,P\in[0,1]$,
3) $k_{xx}^{''}(Q,P)+p_1(Q)k_x^{'}(Q,P)+p_2(Q)k(Q,P)=0,\forall Q,P\in[0,1]$,
4) при $P=Q$, $k(P,Q)=0$
5)при $P=Q=0$ справедливо соотношение (22).

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(x) - I(x). \tag{23}$$

где $h(x)$ - произвольная достаточно гладкая функция. $I(x)$ - определяется по формуле (19).

Теорема 3. *Функция $W(x)$, введенная по формулам (23)и (19), является решением следующей задачи:*

$$W''(x) + p_1(x)W'(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 < x < 1, \tag{24}$$

$$W(x)|_{x=0} = h(x)|_{x=0}, \tag{25}$$

$$W'(x)|_{x=0} = h'(x)|_{x=0},$$

где $h(x)-$ произвольная достаточно гладкая функция.

Причем решение краевой задачи (24), (25) единственно, то есть решение зависит, только от граничных значений $h(x)|_{x=0}$, $h'(x)\big|_{x=0}$, но не зависит от $h(x)$, $h'(x)$ когда $0 < x < 1$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения (19) представление (23) можно переписать в виде

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(0)y_1(x) + h'(0)y_2(x). \tag{26}$$

Проверим, какими свойствами обладает $W(x)$ функция. Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x = 0$.

$$W(0) = \int_0^0 k(0,t)f(t)dt + h(0)y_1(0) + h'(0)y_2(0) = h(0). \tag{27}$$

Найдем производную $W'(x)$, $W''(x)$ и найдем значение $W'(x)|_{x=0}$.

$$W'(x) = \int_0^x k'_x(x,t)f(t)dt + k(x,x)f(t)dt + h(0)y'_1(x) + h'(0)y'_2(x), \tag{28}$$

$$W'(0) = \int_0^0 k'_x(0,t)f(t)dt + h(0)y'_1 + h'(0)y'_2(0) = h'(0). \tag{29}$$

$$W''(x) = \int_0^x k''_{xx}(x,t)f(t)dt + k'_x(x,x)f(x) + h(0)y''_1(x) + h'(0)y''_2(x),$$

$$W''(x) = \int_0^x k''_{xx}(x,t)f(t)dt + f(x) + h(0)y''_1(x) + h'(0)y''_2(x). \tag{30}$$

Если взять линейную комбинацию (26), (28), (30) в виде $W''(x)+p_1(x)W'(x)+p_2(x)W(x)$, то получим

$$W''(x)+p_1(x)W'(x)+p_2(x)W(x)=\int_0^x\Big[k''_{xx}(x,t)+p_1(x)k'_x(x,t)+p_2(x)k(x,t)\Big]f(t)dt+$$

$$+h(0)\Big[y_1^{''}(x)+p_1(x)y_1^{'}(x)+p_2(x)y_1(x)\Big]+h^{'}(0)\Big[y_2^{''}(x)+p_1(x)y_2^{'}(x)+p_2(x)y_2(x)\Big]+f(x),$$

$$W^{''}(x)+p_1(x)W^{'}(x)+p_2(x)W(x)=f(x). \tag{31}$$

Из формул (31), (27), (29) вытекает утверждение теоремы 3.

Теперь покажем, как используя теорему 3 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке $[0,1]$.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x)$, то есть, пусть существует непрерывный оператор K, отображающий $f(x)$ в $h(x)$. Напомним $h(x)$ - гладкая функция. Итак, пусть $h=Kf(x)$. Тогда задача (24), (25) примет вид

$$W^{''}(x)+p_1(x)W^{'}(x)+p_2(x)W(x)=f(x), 0<x<1, \tag{32}$$

$$W(x)|_{x=0}-K(W^{''}+p_1W^{'}+p_2W)(x)|_{x=0}=0, \tag{33}$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(W^{''}+p_1W^{'}+p_2W)(x)|_{x=0}=0.$$

Условия (33), накладываемые на функцию $W(x)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (32) при любой правой части $f(x)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (32), (33) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми" условиями вида (33). Итак, справедлива

Теорема 4. *Для любого непрерывного оператора K, отображающего пространство $\{f\}\in L_2[0,\,1]$ во множество гладких функций $\{h\}\in W_2^2[0,\,1]$ задачи (32), (33) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях $f(x)$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 5. *Если уравнение (32) при всех правых частях $f(x)$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор K, отображающий пространство $\{f\}\in L_2[0,1]$ во множество гладких функций $\{h\}\in W_2^2[0,1]$, такое, что дополнительное условие примет вид (33).*

Доказательство. Пусть уравнение (32) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x,f)$. Для удобства введем новую функцию $u_0(x,f)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt$. Рассмотрим разность $\upsilon(x)=W(x,f)-u_0(x,f)$. Функция $\upsilon(x)$ удовлетворяет условию $\upsilon^{''}+p_1\upsilon^{'}+\,+p_2\upsilon=0$. Таким образом, для любого f единственным образом находим υ, то есть $\upsilon=Kf(x)$. С другой стороны, введем новую функцию $\omega(x,f)=u_0(x,f)+\upsilon(0,f)y_1(x)+\upsilon^{'}(0,f)y_2(x)$. Последняя формула аналогична формуле (26). В данном случае роль $h(x)$ играет функция $\upsilon(x)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\omega^{''}(x)+p_1(x)\omega^{'}(x)+p_2(x)\omega(x)=f(x), \tag{34}$$

$$\omega(x)|_{x=0}=\upsilon(x,f)|_{x=0}, \tag{35}$$

$$\frac{d}{dx}\omega(x)|_{x=0}=\frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0},$$

где $\upsilon(x) = Kf(x)$ или $\upsilon(x) = K(\omega'' + p_1\omega' + p_2\omega)(x)$.
С другой стороны, ясно что $W(x,f) = u_0(x,f) + \upsilon(x)$. Следовательно, имеем

$$\begin{gathered} W''(x) + p_1(x)W'(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 < x < 1, \\ W(x,f)|_{x=0} = \upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}W(x,f)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \end{gathered} \tag{36}$$

Сравнивая соотношения (35) и (36) видим, что $W(x,f) = \omega(x,f)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид:

$$W(x)|_{x=0} - K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)|_{x=0} = 0.$$

Теорема 5 полностью доказана.

Из теоремы 5 следует, что решение (32), (33) имеют вид

$$W(x,f) = u_0(x,f) + Kf(x)|_{x=0}y_1(x) + \frac{d}{dx}Kf(x)|_{x=0}y_2(x). \tag{37}$$

Оператор, соответсвующий задаче (32), (33) обозначим через L_K. Тогда L_0 соответствует задаче Коши из теоремы 1. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора L_K.

Теорема 6. *Если K - линейный непрерывный оператор из теорем 4 и 5, то резольвента оператора L_K имеет вид:*

$$\begin{gathered} (L_K - \lambda I)^{-1}f(x) = (L_0 - \lambda I)^{-1}f(x) + KL_0\,(L_0 - \lambda I)^{-1}f(x)|_{x=0}\,L_K(L_K- \\ -\lambda I)^{-1}y_1(x) + \frac{d}{dx}KL_0\,(L_0 - \lambda I)^{-1}f(x)|_{x=0}\,L_K(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x). \end{gathered} \tag{38}$$

Для доказательства теоремы 6 нам понадобятся следующие леммы. Удобно вести обозначения:

$$\begin{gathered} \widetilde{u_0}(x,\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}f(x), \\ u_{K1}(x,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}y_1(x), \\ u_{K2}(x,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x). \end{gathered}$$

Тогда формула (38) примет следующий вид

$$W(x,\lambda) = \widetilde{u_0}(x,\lambda) + KL_0\widetilde{u_0}(x,\lambda)|_{x=0}u_{K1}(x,\lambda) + \frac{d}{dx}KL_0\widetilde{u_0}(x,\lambda)|_{x=0}u_{K2}(x,\lambda)$$

или

$$W(x,\lambda) = \widetilde{u_0}(x,\lambda) + \alpha u_{K1}(x,\lambda) + \beta u_{K2}(x,\lambda), \tag{39}$$

где α и β не зависят от x и задаются по формулам:

$$\alpha = KL_0\widetilde{u_0}(x,\lambda)|_{x=0},$$

$$\beta = \frac{d}{dx} K L_0 \widetilde{u}_0(x,\lambda)|_{x=0}.$$

Лемма 1. *Функция $\widetilde{u}_0(x,\lambda)$ является решением следующей задачи Коши с условиями в нуле:*

$$\widetilde{u_0}''(x) + p_1(x)\widetilde{u_0}'(x) + p_2(x)\widetilde{u}_0(x) - \lambda\widetilde{u}_0(x) = f(x), 0 < x < 1,$$

$$\widetilde{u}_0(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\widetilde{u}_0(x)|_{x=0} = 0.$$

Доказательство. Если на соотношение

$$\widetilde{u}_0(x,\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1} f(x),$$

подействовать оператором $(L_0 - \lambda I)$, то функция $\widetilde{u}_0(x,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$\widetilde{u_0}''(x) + p_1(x)\widetilde{u_0}'(x) + p_2(x)\widetilde{u}_0(x) - \lambda\widetilde{u}_0(x) = f(x),$$

Так как оператор L_0 соответствует задаче Коши, то справедливость начальных условий очевидно.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Функция $u_{K1}(x,\lambda)$ является решением следующей краевой задачи:*

$$u''_{K1}(x) + p_1(x)u'_{K1}(x) + p_2(x)u_{K1}(x) - \lambda u_{K1}(x) = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$u_{K1}(x)|_{x=0} - K(u''_{K1} + p_1 u'_{k1} + p_2 u_{K1})(x)|_{x=0} = 1,$$

$$\frac{d}{dx}u_{K1}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(u''_{K1} + p_1 u'_{k1} + p_2 u_{K1})(x)|_{x=0} = 0.$$

Доказательство. Соотношение $u_{K1}(x,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1} y_1(x)$ можно переписать в виде $u_{K1}(x,\lambda) = (L_K - \lambda I + \lambda I)(L_K - \lambda I)^{-1} y_1(x) = y_1(x) + \lambda(L_K - \lambda I)^{-1} y_1(x)$.

Обозначим $(L_K - \lambda I)^{-1} y_1(x) = \widetilde{w}(x)$ и подействуем на данное соотношение слева оператором $(L_K - \lambda I)$, то получим

$$\widetilde{w}''(x) + p_1(x)\widetilde{w}'(x) + p_2(x)\widetilde{w}(x) - \lambda\widetilde{w}(x) = y_1(x),$$

$$\widetilde{w}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{w}'' + p_1\widetilde{w}' + p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\widetilde{w}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{w}'' + p_1\widetilde{w}' + p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0} = 0.$$

Если на соотношение $u_{K1}(x,\lambda) = y_1(x) + \lambda\widetilde{w}(x)$ подействовать слева через $(l - \lambda I)$, заметим, что здесь l - дифференциальное выражение, которое соответствует следующему виду: $l(y) = y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) - \lambda y(x)$, тогда функция $u_{K1}(x,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$u''_{K1}(x) + p_1(x)u'_{K1}(x) + p_2(x)u_{K1}(x) - \lambda u_{K1}(x) =$$

$$= y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x) - \lambda y_1(x) + \lambda y_1(x) = 0,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Теперь проверим справедливость краевых условии:

1-условие.

$$u_{K1}(x)|_{x=0} - K(u_{K1}'' + p_1 u_{k1}' + p_2 u_{K1})(x)|_{x=0} = y_1(x)|_{x=0} - K(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1)(x)|_{x=0} +$$

$$+\lambda\{\widetilde{w}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{w}'' + p_1\widetilde{w}' + p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0}\} = y_1(x)|_{x=0} = 1,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение

$$\widetilde{w}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{w}'' + p_1\widetilde{w}' + p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0} = 0.$$

2-условие.

$$\frac{d}{dx}u_{K1}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(u_{K1}'' + p_1 u_{k1}' + p_2 u_{K1})(x)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}K(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1)(x)|_{x=0} +$$

$$+\frac{d}{dx}y_1(x)|_{x=0} + \lambda\{\frac{d}{dx}\widetilde{w}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{w}'' + p_1\widetilde{w}' + p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0}\} = \frac{d}{dx}y_1(x)|_{x=0} = 0,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение

$$\frac{d}{dx}\widetilde{w}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{w}'' + p_1\widetilde{w}' + p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0} = 0.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Функция $u_{K2}(x, \lambda)$ является решением следующей краевой задачи:*

$$u_{K2}''(x) + p_1(x)u_{K2}'(x) + p_2(x)u_{K2}(x) - \lambda u_{K2}(x) = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$u_{K2}(x)|_{x=0} - K(u_{K2}'' + p_1 u_{K2}' + p_2 u_{K2})(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}u_{K2}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(u_{K2}'' + p_1 u_{k2}' + p_2 u_{K2})(x)|_{x=0} = 1.$$

Доказательство. Соотношение $u_{K2}(x, \lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x)$ можно переписать в виде $u_{K2}(x, \lambda) = (L_K - \lambda I + \lambda I)(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x) = y_2(x) + \lambda(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x)$.

Обозначим $(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x) = \widetilde{v}(x)$ и подействуем на данное соотношение слева оператором $(L_K - \lambda I)$, то получим

$$\widetilde{v}''(x) + p_1(x)\widetilde{v}'(x) + p_2\widetilde{v}(x) - \lambda\widetilde{v}(x) = y_2(x),$$

$$\widetilde{v}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\widetilde{v}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0} = 0.$$

Если на соотношение $u_{K2}(x, \lambda) = y_2(x) + \lambda\widetilde{v}(x)$ подействовать слева через $(l - \lambda I)$, то функция $u_{K2}(x, \lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$u_{K2}''(x) + p_1(x)u_{K2}'(x) + p_2(x)u_{K2}(x) - \lambda u_{K2}(x) =$$

$$= y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x) - \lambda y_2(x) + \lambda y_2(x) = 0,$$

так как функция $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Теперь проверим справедливость краевых условии:

1-условие.

$$u_{K2}(x)|_{x=0} - K(u_{K2}'' + p_1 u_{K2}' + p_2 u_{K2})(x)|_{x=0} = y_2(x)|_{x=0} - K(y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2)(x)|_{x=0} +$$

$$+\lambda\{\widetilde{v}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0}\} = y_2(x)|_{x=0} = 0,$$

так как $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\widetilde{v}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0} =$
$= 0$.

2-условие.

$$\frac{d}{dx}u_{K2}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(u_{K2}'' + p_1 u_{K2}' + p_2 u_{K2})(x)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}K(y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2)(x)|_{x=0} +$$

$$+\frac{d}{dx}y_2(x)|_{x=0} + \lambda\{\frac{d}{dx}\widetilde{v}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0}\} = \frac{d}{dx}y_2(x)|_{x=0} = 1,$$

так как функция $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение

$$\frac{d}{dx}\widetilde{v}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0} = 0.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательства теоремы 6. Докажем, что функция

$$W(x,\lambda) = \widetilde{u}_0(x,\lambda) + \alpha u_{K1}(x,\lambda) + \beta u_{K2}(x,\lambda), \tag{39}$$

является решением следующей задачи:

$$W''(x) + p_1(x)W'(x) + p_2 W(x) - \lambda W(x) = f(x),\ 0 < x < 1 \tag{40}$$

$$W(x)|_{x=0} - K(W'' + p_1 W' + p_2 W)(x)|_{x=0} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W'' + p_1 W' + p_2 W)(x)|_{x=0} = 0.$$

Вспоминая леммы 1, 2, 3, легко заметить, что функция $W(x,\,\lambda)$ из формулы (39) удовлетворяет требуемому дифференциальному соотношению (40).

Остается проверить справедливость краевых условий.

1-условие.

$$W(x)|_{x=0} - K(W'' + p_1 W' + p_2 W)(x)|_{x=0} = \widetilde{u}_0(x)|_{x=0} - K(\widetilde{u}_0{}'' + p_1\widetilde{u}_0{}' + p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0} +$$

$$+\alpha[u_{K1}(x)|_{x=0} - K(u_{K1}'' + p_1 u_{k1}' + p_2 u_{K1})(x)|_{x=0}] + \beta[u_{K2}(x)|_{x=0} - K(u_{K2}'' + p_1 u_{k2}' +$$

$$+p_2 u_{K2})(x)|_{x=0}] = \alpha - K(\widetilde{u}_0{}'' + p_1\widetilde{u}_0{}' + p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0} = -K(\widetilde{u}_0{}'' + p_1\widetilde{u}_0{}' + p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0} +$$

$$+KL_0\widetilde{u}_0(x,\,\lambda) = -K(\widetilde{u}_0{}'' + p_1\widetilde{u}_0{}' + p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0} + K(\widetilde{u}_0{}'' + p_1\widetilde{u}_0{}' + p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0} = 0.$$

Здесь учтены (1)-ое соотношение из условий задачи Коши леммы 1, а также (1)-ые соотношения из условий краевых задач леммы 2, 3.

2-условие.

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(W''+p_1W'+p_2W)(x)|_{x=0}=\frac{d}{dx}\widetilde{u}_0(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(\widetilde{u}_0{}''+$$

$$+p_1\widetilde{u}_0{}'+p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0}+\alpha[\frac{d}{dx}u_{K1}(x,\,\lambda)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(u''_{K1}+p_1u'_{k1}+p_2u_{K1})(x)|_{x=0}]+$$

$$+\beta[\frac{d}{dx}u_{K2}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(u''_{K2}+p_1u'_{k2}+p_2u_{K2})(x)|_{x=0}]=\beta-K(\widetilde{u}_0{}''+p_1\widetilde{u}_0{}'+$$

$$+p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0}=-K(\widetilde{u}_0{}''+p_1\widetilde{u}_0{}'+p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0}+\frac{d}{dx}KL_0\widetilde{u}_0(x)|_{x=0}=$$

$$=-K(\widetilde{u}_0{}''+p_1\widetilde{u}_0{}'+p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0}+K(\widetilde{u}_0{}''+p_1\widetilde{u}_0{}'+p_2\widetilde{u}_0)(x)|_{x=0}=0.$$

Здесь учтены (2)-ое соотношение из условий задачи Коши леммы 1, а также (2)-ые соотношения из условий краевых задач леммы 2, 3.

Теорема 6 доказана.

Теперь рассмотрим всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на проколотом отрезке. Для этого применим вышеуказанный метод к проколотому отрезку $[0,c)\cup(c,1]$, где c - некоторая внутренняя точка отрезка $[0,1]$.

Пусть $h(x)$ - дважды дифференцируемая на проколотом отрезке $[0,c)\cup(c,1]$, функция. Нам уже известно, что функция

$$W(x)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt+h(x)-I(x).$$

Рассмотрим два случая $x<c$ и $x>c$.

$$I(x)=\int_0^x k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} h(x)-h(0)y_1(x)-h'(0)y_2(x), & x<c;\\ \int_0^{c-0}k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+ & \\ +\int_{c+0}^{x}k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt, & x>c.\end{array}\right.$$

Вычислим интеграл: $\int_0^{c-0}k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=?$

1) $\int_0^{c-0}k(x,t)h''(t)dt=\left[k(x,t)h'(t)-k'_t(x,t)h(t)\right]_{t=0}^{t=c-0}+\int_0^{c-0}h(t)k''_{tt}(x,t)dt,$

2) $\int_0^{c-0}k(x,t)p_1(t)h'(t)dt=k(x,t)p_1(t)h(t)|_{t=0}^{t=c-0}-\int_0^{c-0}h(t)\left(k(x,t)p_1(t)\right)'_t dt,$

3) $\int_0^{c-0}k(x,t)p_2(t)h(t)dt=\int_0^{c-0}h(t)k(x,t)p_2(t)dt.$

$$\int_0^{c-0}k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=k(x,c)h'(c-0)-k'_t(x,c)h(c-0)-$$

$$-k(x,0)h'(0)+k'_t(x,0)h(0)+p_1(c)k(x,c)h(c-0)-p_1(0)k(x,0)h(0)+$$

$$+\int_0^{c-0}h(t)\left[k''_{tt}(x,t)-\left(k(x,t)p_1(t)h(t)\right)'_t+k(x,c)p_2(t)\right]dt=$$

$$= k(x,c)h'(c-0) - k_t'(x,c)h(c-0) - y_2(x)h'(0) - h(0)y_1(x) + p_1(0)h(0)y_2(x)+$$
$$+p_1(c)k(x,c)h(c-0) - p_1(0)h(0)y_2(x) = -h'(0)y_2(x) - h(0)y_1(x) + k(x,c)h'(c-0)-$$
$$-k_t'(x,c)h(c-0) + p_1(c)k(x,c)h(c-0)$$

Здесь учтено, что $k_{tt}''(x,t) - (k(x,t)p_1(t)h(t))_t' + k(x,c)p_2(t) = 0$.

Таким же способом вычислим интеграл:

$$\int_{c+0}^{x} k(x,t)\left[h''(t) + p_1(t)h'(t) + p_2(t)h(t)\right]dt$$

1) $\int_{c+0}^{x} k(x,t)h''(t)dt = \left[k(x,t)h'(t) - k_t'(x,t)h(t)\right]_{t=c+0}^{t=x} + \int_{c+0}^{x} h(t)k_{tt}''(x,t)dt$,
2) $\int_{c+0}^{x} k(x,t)p_1(t)h'(t)dt = k(x,t)p_1(t)h(t)|_{t=c+0}^{t=x} - \int_{c+0}^{x} h(t)\,(k(x,t)p_1(t))_t'\,dt$,
3) $\int_{c+0}^{x} k(x,t)p_2(t)h(t)dt = \int_{c+0}^{x} h(t)k(x,t)p_2(t)dt$.

$$\int_{c+0}^{x} k(x,t)\left[h''(t) + p_1(t)h'(t) + p_2(t)h(t)\right]dt = k(x,x)h'(x) - k_t'(x,x)h(x)-$$
$$-k(x,c)h'(c+0) + k_t'(x,c)h(c+0) + p_1(x)k(x,x)h(x) - p_1(c)k(x,c)h(c+0)+$$
$$+\int_{c+0}^{x} h(t)\left[k_{tt}''(x,t) - (k(x,t)p_1(t)h(t))_t' + k(x,t)p_2(t)\right]dt =$$
$$= h(x) - k(x,c)h'(c+0) + k_t'(x,c)h(c+0) - p_1(c)k(x,c)h(c+0).$$

Так как, $k_{tt}''(x,t) - (k(x,t)p_1(t)h(t))_t' + k(x,t)p_2(t) = 0$, $k(x,x) = 0$, $k_t'(x,x) = -1$.

Теперь берем сумму интегралов:

$$\int_{0}^{c-0} k(x,t)\left[h''(t) + p_1(t)h'(t) + p_2(t)h(t)\right]dt + \int_{c+0}^{x} k(x,t)\left[h''(t) + p_1(t)h'(t)+\right.$$
$$\left.p_2(t)h(t)\right]dt = -h'(0)y_2(x) - h(0)y_1(x) + k(x,c)h'(c-0) - k_t'(x,c)h(c-0)+$$
$$+p_1(c)k(x,c)h(c-0) + h(x) - k(x,c)h'(c+0) + k_t'(x,c)h(c+0)-$$
$$-p_1(c)k(x,c)h(c+0) = h(x) - h(0)y_1(x) - h'(0)y_2(x) + p_1(c)k(x,c)[h]_c+$$
$$+k(x,c)[h']_c - k_t'(x,c)[h]_c.$$

Отсюда,

$$I(x) = \begin{cases} h(x) - h(0)y_1(x) - h'(0)y_2(x), & x < c; \\ h(x) - h(0)y_1(x) - h'(0)y_2(x)+ & \\ +(p_1(c)k(x,c) - k_t'(x,c))[h]_c + k(x,c)[h']_c, & x > c. \end{cases} \tag{42}$$

Поэтому аналог формулы (23) примет вид:

$$W(x) = \int_{0}^{x} k(x,c)f(t)dt + h(0)y_1(x) + h'(0)y_2(x)+$$
$$+\begin{cases} 0, & \text{если } x < c; \\ k_t'(x,c)[h]_c - p_1(c)k(x,c)[h]_c - k(x,c)[h']_c, & \text{если } x > c. \end{cases} \tag{43}$$

Формула (43) дает решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на проколотом отрезке $[0, c) \cup (c, 1]$.

Таким образом мы сможем сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. *Функция $W(x)$ введенная по формуле (43) является единственным решением следующей краевой задачи:*

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 < x < c,\ c < x < 1 \tag{44}$$

$$\begin{aligned} W(0) &= h(0), \\ W^{'}(0) &= h^{'}(0), \\ [W]_c &= [h]_c, \\ [W^{'}]_c &= [h^{'}]_c. \end{aligned} \tag{45}$$

Доказательство. $W(x)$ - дважды дифференцируемая на проколотом отрезке $[0, c) \cup (c, 1]$ функция. Какими свойствами обладает $W(x)$ функция? Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x = 0$,

$$W(0) = \int_0^0 k(0, t)f(t)dt + h(0)y_1(0) + h^{'}(0)y_2(0) = h(0), \qquad (46))$$

$$W^{'}(x) = \int_0^x k_x^{'}(x, t)f(t)dt + h(0)y_1^{'}(x) + h^{'}(0)y_2^{'}(x)+$$

$$+\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < c; \\ k_{tx}^{''}(x, c)[h]_c - p_1(c)k_x^{'}(x, c)[h]_c - k_x^{'}(x, c)[h^{'}]_c, & \text{если} \quad x > c. \end{cases}$$

Вычислим значение функции $W^{'}(x)$ в точке $x = 0$,

$$W^{'}(0) = \int_0^0 k_x^{'}(0, t)f(t)dt + h(0)y_1^{'}(0) + h^{'}(0)y_2^{'}(0) = h^{'}(0). \tag{47}$$

Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x = c - 0$,

$$W(c - 0) = \int_0^c k(c, t)f(t)dt + h(0)y_1(c) + h^{'}(0)y_2(c).$$

Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x = c + 0$,

$$W(c + 0) = \int_0^c k(c, t)f(t)dt + h(0)y_1(c) + h^{'}(0)y_2(c) + k_t^{'}(c, c)[h]_c -$$

$$-p_1(c)k(c, c)[h]_c - k(c, c)[h^{'}]_c = \int_0^c k(c, t)f(t)dt + h(0)y_1(c) + h^{'}(0)y_2(c) - [h]_c.$$

Вычислим линейную комбинацию

$$W(c - 0) - W(c + 0) = [W]_c = [h]_c. \tag{48}$$

Вычислим значение функции $W^{'}(x)$ в точке $x = c - 0$,

$$W^{'}(c - 0) = \int_0^c k_x^{'}(x, t)f(t)dt + h(0)y_1^{'}(c) + h^{'}(0)y_2^{'}(c).$$

Вычислим значение функции $W'(x)$ в точке $x = c+0$,

$$W'(c+0) = \int_0^c k'_x(x,t)f(t)dt + h(0)y'_1(c) + h'(0)y'_2(c) + k''_{tx}(c,c)[h]_c -$$

$$-p_1(c)k'_x(c,c)[h]_c - k'_x(c,c)[h']_c = \int_0^c k'_x(c,t)f(t)dt + h(0)y'_1(c) + h'(0)y'_2(c) - [h']_c.$$

Здесь учтено, что

$$k''_{tx}(c,c) = \frac{\begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}, k''_{tx}(c,c) = p_1(c), k'_x(c,c) = 1.$$

Вычислим линейную комбинацию

$$W'(c-0) - W'(c+0) = [W']_c = [h']_c. \tag{49}$$

Найдем производную второго порядка функции $W(x)$:

$$W''(x) = \int_0^x k''_{xx}(x,t)f(t)dt + f(x) + h(0)y''_1(x) + h'(0)y''_2(x) +$$

$$+\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < c; \\ k'''_{txx}(x,c)h]_c - p_1(c)k''_{xx}(x,c)[h]_c - k''_{xx}(x,c)[h']_c, & \text{если} \quad x > c. \end{cases} \tag{50}$$

Теперь вычислим линейную комбинацию:

$$W''(x) + p_1(x)W'(x) + p_2(x)W(x) = \int_0^x \Big[k''_{xx}(x,t) + p_1(x)k'_x(x,t) +$$

$$+p_2(x)k(x,t)\big] f(t)dt + h(0)\Big[y''_1(x) + p_1(x)y'_1(x) + p_2(x)y_1(x)\Big] + h'(0)\Big[y''_2(x) +$$

$$+p_1(x)y'_2(x) + p_2(x)y_2(x)\Big] + \Big[k'''_{txx}(x,c) + p_1(x)k''_{tx}(x,c) + p_2(x)k'_t(x,c)\Big][h]_c -$$

$$-p_1(c)\Big[k''_{xx}(x,c) + p_1(x)k'_x(x,c) + p_2(x)k(x,c)\Big][h]_c - \Big[k''_{xx}(x,c) + p_1(x)k'_x(x,c) +$$

$$+p_2(x)k(x,c)\big][h']_c + f(x) = f(x).$$

Так как, $k''_{xx}(x,t) + p_1(x)k'_x(x,t) + p_2(x)k(x,t) =$

$$= -p_1(x)\frac{\begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} - p_2(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} - -p_1(t)p_1(x)\frac{\begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} -$$

$$-p_1(t)p_2(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1(x)\frac{\begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1(t)p_1(x)\frac{\begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} +$$

$$+p_2(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1(t)p_2(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} = 0.$$

Таким образом, $W(x)$ функция является решением краевой задачи (44), (45).

Докажем единственность решении краевой задачи (44), (45). Для этого сначала рассмотрим задачу Коши на отрезке $[0, c)$.

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 < x < c,\ c < x < 1 \tag{51}$$

$$W(0) = h(0),$$

$$W^{'}(0) = h^{'}(0),$$

Решение для краевой задачи (51) находим единственно.

Для $W(x)$ при $0 < x < c$ вытекает, что единственным образом вычисляем $W(x - c), W(x + c)$, поэтому из последних двух выражении следует единственность $W(x)$ на проколотом отрезке $[0, c) \cup (c, 1]$.

Теорема 7 доказана.

Теперь покажем, как используя теорему 7 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на проколотом отрезке $[0, c) \cup (c, 1]$.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x)$, то есть, пусть существует непрерывный оператор K, отображающий $f(x)$ в $h(x)$. Напомним $h(x)$ - дважды дифференцируемая функция на проколотом отрезке $[0, c) \cup (c, 1]$. Итак, пусть $h = Kf(x)$. Тогда задача (44), (45) примет вид

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x),\ 0 < x < c,\ c < x < 1, \tag{52}$$

$$\begin{gathered} W(x)|_{x=0} - K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0, \\ \frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0, \\ [W(x)]_c - [K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)]_c = 0, \\ [\frac{d}{dx}W(x)]_c - [\frac{d}{dx}K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)]_c = 0. \end{gathered} \tag{53}$$

Условия (53) накладываемые на функцию $W(x)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (52) при любой правой части $f(x)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (52), (53) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми" условиями вида (53). Итак, справедлива

Теорема 8. *Для любого непрерывного оператора K, отображающего пространство $\{f\} \in L_2[0, 1]$ во множество функций $\{h\} \in W_2^2[0, c) \cup (c, 1]$ задачи (52), (53) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях $f(x)$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 9. *Если уравнение (52) при всех правых частях $f(x)$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение , то найдется* *непрерывный оператор K, отображающий пространство $\{f\} \in L_2[0,1]$ во множество функции $\{h\} \in W_2^2[0,c) \cup (c,1]$ такое, что дополнительное условие примет вид (53).*

Доказательство. Пусть уравнение (52) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x,f)$. Для удобства введем новую функцию $u_0(x,f) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt$. Рассмотрим разность $v(x) = W(x,f) - u_0(x,f)$. Функция $v(x)$ удовлетворяет условию $v'' + p_1 v' + +p_2 v = 0$. Таким образом, для любого f единственным образом находим v, то есть $v = Kf(x)$. С другой стороны, введем новую функцию

$$\omega(x,f) = \begin{array}{l} u_0(x,f) + v(0,f)y_1(x) + v'(0,f)y_2(x) + \\ + \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{если} \quad x < c; \\ k_t'(x,c)[v]_c - k(x,c)[v']_c - p_1(c)k(x,c)[v]_c, & \text{если} \quad x > c. \end{array} \right. \end{array}.$$

Последняя формула аналогична формуле (43). В данном случае роль $h(x)$ играет функция $v(x)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 7 показывают, что

$$\omega''(x) + p_1(x)\omega'(x) + p_2(x)\omega(x) = f(x), \tag{54}$$

$$\begin{gathered} \omega(x)|_{x=0} = v(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}\omega(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}v(x,f)|_{x=0}, \\ [\omega(x)]_c = [v(x,f)]_c, \\ [\frac{d}{dx}\omega(x)]_c = [\frac{d}{dx}v(x,f)]_c. \end{gathered} \tag{55}$$

где $v(x) = Kf(x)$ или $v(x) = K(\omega'' + p_1\omega' + p_2\omega)(x)$.
С другой стороны, ясно что $W(x,f) = u(x,f) + v(x)$. Следовательно, имеем

$$W''(x) + p_1(x)W'(x) + p_2(x)W(x) = f(x),\ 0 < x < c,\ c < x < 1,$$

$$\begin{gathered} W(x,f)|_{x=0} = v(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}W(x,f)|_{x=0} = \frac{d}{dx}v(x,f)|_{x=0}. \\ [W(x,f)]_c = [v(x,f)]_c, \\ [\frac{d}{dx}W(x,f)]_c = [\frac{d}{dx}v(x,f)]_c. \end{gathered} \tag{56}$$

Сравнивая соотношения (55) и (56) видим, что $W(x,f) = \omega(x,f)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид:

$$W(x)|_{x=0} - K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)|_{x=0} = 0.$$

$$[W(x)]_c - [K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)]_c = 0,$$

$$[\frac{d}{dx}W(x)]_c - [\frac{d}{dx}K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)]_c = 0.$$

Теорема 9 полностью доказана.

Из теоремы 9 следует, что решение (52), (53) имеет вид

$$W(x,f) = u_0(x,f) + Kf(x)|_{x=0}y_1(x) + \frac{d}{dx}Kf(x)|_{x=0}y_2(x) +$$

$$+\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < c; \\ \left(k_t'(x,c) - p_1(c)k(x,c)\right)[Kf(x)]_c - k(x,c)[\frac{d}{dx}Kf(x)]_c, & \text{если} \quad x > c. \end{cases} \qquad (57)$$

Оператор, соответствующий задаче (52), (53) обозначим через L_K. Тогда L_0 соответствует задаче Коши. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора L_K.

Теорема 10. *Если K - линейный непрерывный оператор из теорем 8 и 9, то резольвента оператора L_K имеет вид:*

$$(L_K - \lambda I)^{-1}f(x) = (L_0 - \lambda I)^{-1}f(x) + KL_0\,(\,L_0 - \lambda I)^{-1}f(x)|_{x=0}\,L_K(L_K -$$

$$-\lambda I)^{-1}y_1(x) + \frac{d}{dx}KL_0\,(L_0 - \lambda I)^{-1}f(x)|_{x=0}\,L_K(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x) + \qquad (58)$$

$$+\begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x < c; \\ \begin{array}{l} L_K(L_K - \lambda I)^{-1}\left(k_t'(x,c) - p_1(c)k(x,c)\right)[KL_0(L_0 - \lambda I)^{-1}f(x)]_c - \\ -L_K(L_K - \lambda I)^{-1}k(x,c)[\frac{d}{dx}KL_0(L_0 - \lambda I)^{-1}f(x)]_c \end{array}, & \textit{если} \quad x > c. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 10 аналогично доказательству теоремы 6.

Литература

[1] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., Наука. 1969. 528 стр.

[2] *Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О.* О регулярных задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Диф. уравнения. 1981. т.17, N5. с. 873-885.

[3] *Кальменов Т.Ш.* О регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Диф. уравнеия. 1981. т.17, N5, с. 1105-1121.

[4] *Павлов Б.С.* Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат. науки, т.42, N6(258), 1987. с. 99-131.