

Об одной эллиптической системе дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярной линией и точкой на плоскости

Д.С. Жусупова, А.Б. Тунгатаров
 ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, АО "Финансовая академия", Астана
 zhus_dinara@mail.ru, tun-mat@list.ru

Аннотация

В данной статье доказана сходимостъ альтернирующего метода Шварца для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Аннотация

В работе получено многообразие непрерывных решений одной эллиптической системы дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярной линией и точкой на плоскости и решена задача типа Робина для нее в бесконечно угловой области свободного раствора.

Пусть $0 < \varphi_1 \leq 2\pi$ и $G = \{z = x + iy = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \varphi_1\}$. Рассмотрим в области G уравнение

$$U_{z\bar{z}} + \frac{\alpha(\varphi)}{2r}(U_z - U_{\bar{z}}) + \frac{\beta(\varphi)\bar{U}}{4(x-y)^{\lambda}r^{2-\lambda}} = \frac{f(\varphi)r^{\nu+\lambda-2}}{4(x-y)^{\lambda}}, \quad (1)$$

где $\alpha(\varphi), \beta(\varphi), f(\varphi) \in C[0, \varphi_1]$; $\nu \geq 2, 0 < \lambda < 1$ - действительные числа, причем $\beta(\varphi) \neq 0$ для всех $\varphi \in [0, \varphi_1]$;

$$U_z = \frac{1}{2}(U_x + iU_y), U_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(U_x - iU_y), U_{z\bar{z}} = (U_z)_{\bar{z}} \quad (2)$$

Насколько нам известно, уравнения одновременно с сингулярной линией и точкой вида (1) ранее не были рассмотрены. Частные виды этого уравнения встречаются в задачах математической физики и дифференциальной геометрии. А.Бицадзе получено общее решение уравнения (1) и решена задача Дирихле для этого уравнения при $\alpha(\varphi) \equiv \beta(\varphi) \equiv f(\varphi) \equiv 0$ [1]. При $\lambda = 0$ уравнение (1) становится уравнением только с сингулярной точкой. Уравнение второго порядка с сингулярной точкой изучено в [2].

Решения уравнения (1) ищем в классе функций

$$W_p^2(G) \cap C(G), p \geq 1, \quad (3)$$

где $W_p^2(G)$ -пространство С.Л.Соболева [3]. Дифференциальные операторы (2) в полярных координатах записываются в виде [4]:

$$\begin{aligned} U_z &= \frac{e^{-i\varphi}}{2} \left(U_r - \frac{i}{r} U_\varphi \right), U_{\bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(U_r + \frac{i}{r} U_\varphi \right), \\ U_{z\bar{z}} &= \frac{1}{4} \left(U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Применяя формулы (4), уравнение (1) записываем в полярных координатах:

$$\begin{aligned} U_{rr} + \frac{1}{r}(1 - 2i \sin \varphi \cdot \alpha(\varphi))U_r - \frac{2i}{r^2} \cos \varphi \cdot \alpha(\varphi)U_\varphi = \\ = \frac{f(\varphi)}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^\lambda} r^{\nu-2} - \frac{\beta(\varphi)\overline{U_\varphi}}{r^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^\lambda} \end{aligned} \quad (5)$$

Решения уравнения (5) из класса (3) будем искать в виде

$$U(r, \varphi) = r^\nu \psi(\varphi), \quad (6)$$

где $\psi(\varphi)$ - новая неизвестная функция из класса $C^2[0, \varphi_1]$.

Подставив функцию, заданную формулой (6), в уравнение (5), получим

$$\begin{aligned} \psi'' - 2\alpha(\varphi)i \cos \varphi \cdot \psi' + (\nu^2 - 2\nu i \alpha(\varphi) \sin \varphi)\psi = \\ = \frac{f(\varphi)}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^\lambda} - \frac{\beta(\varphi)}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^\lambda} \overline{\psi} \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $\psi_1(\varphi), \psi_2(\varphi)$ - фундаментальная система решений уравнения (7) при $\beta(\varphi) \equiv f(\varphi) \equiv 0$. Такая фундаментальная система решений существует в силу того, что коэффициенты уравнения (7) при $\beta(\varphi) \equiv f(\varphi) \equiv 0$ непрерывны в $[0, \varphi_1]$.

Применяя метод вариации постоянных, уравнение (7) приводим к интегральному уравнению

$$\psi(\varphi) = (B\psi)(\varphi) + c_1 J_0(\varphi) + c_2 I_0(\varphi) + F_0(\varphi), \quad (8)$$

где

$$J_0(\varphi) = \psi_1(\varphi), I_0(\varphi) = \psi_2(\varphi), (B\psi)(\varphi) = \int_0^\varphi b(\varphi, \gamma) \overline{\psi(\gamma)} d\gamma, F_0(\varphi) = \int_0^\varphi g(\varphi, \gamma) d\gamma,$$

$$b(\varphi, \gamma) = \frac{\beta(\gamma)(\psi_1(\varphi)\psi_2(\gamma) - \psi_1(\gamma)\psi_2(\varphi))}{(\cos \gamma - \sin \gamma)^\lambda \Delta(\gamma)}, g(\varphi, \gamma) = -\frac{f(\gamma)}{\beta(\gamma)} b(\varphi, \gamma),$$

$$\Delta(\varphi) = \psi_1(\varphi)\psi_2'(\varphi) - \psi_1'(\varphi)\psi_2(\varphi).$$

$\Delta(\varphi) \neq 0$ в $[0, \varphi_1]$ как вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (7) при $\beta(\varphi) \equiv f(\varphi) \equiv 0$.

Из условий $0 < \lambda < 1$, $\Delta(\varphi) \neq 0$ вытекает, что несобственные интегралы, определяющие функции $(B\psi)(\varphi)$ и $F_0(\varphi)$, сходятся.

Далее используем следующие функции и операторы:

$$(B^0 \varphi)(\varphi) = \psi(\varphi), (B^1 \varphi)(\varphi) = (B\psi)(\varphi), (B^k \varphi)(\varphi) = (B^{k-1} \psi)(\varphi),$$

$$J_k(\varphi) = \int_0^\varphi b(\varphi, \gamma) \overline{J_{k-1}(\gamma)} d\gamma, I_k(\varphi) = \int_0^\varphi b(\varphi, \gamma) \overline{I_{k-1}(\gamma)} d\gamma,$$

$$F_k(\varphi) = \int_0^\varphi b(\varphi, \gamma) \overline{F_{k-1}(\gamma)} d\gamma (k = \overline{1, \infty}).$$

Действуя оператором B на равенство (8), получаем новое выражение для $(B\psi)(\varphi)$, которое обратно подставляем в (8):

$$\psi(\varphi) = (B^2\psi)(\varphi) + c_1 J_0(\varphi) + \bar{c}_1 J_1(\varphi) + c_2 I_0(\varphi) + \bar{c}_2 I_1(\varphi) + F_0(\varphi) + F_1(\varphi) \quad (9)$$

Опять действуя оператором B на равенство (9), получим другое новое выражение для $(B\psi)(\varphi)$, которое снова подставляем в (8):

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) = & (B^3\psi)(\varphi) + c_1 (J_0(\varphi) + J_2(\varphi)) + \bar{c}_1 J_1(\varphi) + c_2 (I_0(\varphi) + I_2(\varphi)) + \bar{c}_2 I_1(\varphi) + \\ & + F_0(\varphi) + F_1(\varphi) + F_2(\varphi). \end{aligned}$$

Повторяя этот процесс $2n-1$ раз, имеем интегральное представление для $\psi(\varphi)$

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) = & (B^{2n}\psi)(\varphi) + c_1 \sum_{k=0}^n J_{2k}(\varphi) + \bar{c}_1 \sum_{k=1}^n J_{2k-1}(\varphi) + c_2 \sum_{k=0}^n I_{2k}(\varphi) + \\ & + \bar{c}_2 \sum_{k=1}^n I_{2k-1}(\varphi) + \sum_{k=0}^{2n-1} F_k(\varphi) \end{aligned} \quad (10)$$

Имеют место следующие легко проверяемые оценки:

$$\begin{aligned} |(B^k\psi)(\varphi)| & \leq |\psi|_0 \cdot \frac{(|b|_1 \cdot \varphi)^k}{k!}, |J_k(\varphi)| \leq |\psi_1|_0 \cdot \frac{(|b|_1 \cdot \varphi)^k}{k!}, \\ |I_k(\varphi)| & \leq |\psi_2|_0 \cdot \frac{(|b|_1 \cdot \varphi)^k}{k!}, |F_k(\varphi)| \leq |g|_1 \cdot \frac{(|b|_1 \cdot \varphi)^k}{k!} \cdot \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$|b|_1 = \max_{0 \leq \varphi, \gamma \leq \varphi_1} |b(\varphi, \gamma)|, |g|_1 = \max_{0 \leq \varphi, \gamma \leq \varphi_1} |g(\varphi, \gamma)|, |\psi|_0 = \max_{0 \leq \varphi \leq \varphi_1} |\psi(\varphi)|.$$

Переходя к пределу в (10) при $n \rightarrow \infty$, при этом используя оценки (11), получим

$$\psi(\varphi) = c_1 P_2(\varphi) + \bar{c}_1 P_1(\varphi) + c_2 Q_2(\varphi) + \bar{c}_2 Q_1(\varphi) + F(\varphi), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(\varphi) & = \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(\varphi), P_2(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\varphi), Q_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k-1}(\varphi), \\ Q_2(\varphi) & = \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k}(\varphi), F(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\varphi). \end{aligned}$$

Используя неравенства (11), оценим функции $P_1(\varphi), P_2(\varphi), Q_1(\varphi), Q_2(\varphi), F(\varphi)$:

$$\begin{aligned} |P_1(\varphi)| & \leq |\psi_1|_0 \sinh(|b|_1 \cdot \varphi), |P_2(\varphi)| \leq |\psi_1|_0 \cosh(|b|_1 \cdot \varphi), \\ |Q_1(\varphi)| & \leq |\psi_2|_0 \cosh(|b|_1 \cdot \varphi), |Q_2(\varphi)| \leq |\psi_2|_0 \sinh(|b|_1 \cdot \varphi), \\ |F(\varphi)| & \leq |g|_1 \exp(|b|_1 \cdot \varphi) \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Из формул (6) и (12) следует

$$U(r, \varphi) = r^\nu (c_1 P_2(\varphi) + \bar{c}_1 P_1(\varphi) + c_2 Q_2(\varphi) + \bar{c}_2 Q_1(\varphi) + F(\varphi)) \quad (13)$$

Используя свойства функций $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$, $Q_1(\varphi)$, $Q_2(\varphi)$, $F(\varphi)$, можно показать, что функция $U(r, \varphi)$, определяемая по формуле (13), принадлежит классу (3) и удовлетворяет уравнению (1). Следовательно имеет место

ТЕОРЕМА 1 Уравнение (1) имеет многообразие решений из класса (3), которое определяется по формуле (13).

Теперь рассмотрим краевую задачу типа Робина для уравнения (1).

ЗАДАЧА R Найти решение уравнения (1) в классе (3), удовлетворяющее граничным условиям

$$U(r, 0) = \alpha_1 r^\nu, U'_\varphi(r, 0) = \alpha_2 r^\nu, \quad (14)$$

где α_1, α_2 -действительные числа.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ Для решения задачи используем формулу (13). Имеем

$$P_1(0) = Q_1(0) = F(0) = 0, P_2(0) = \psi_1(0), Q_2(0) = \psi_2(0),$$

$$P'_1(0) = Q'_1(0) = F'(0) = 0, P'_2(0) = \psi'_1(0), Q'_2(0) = \psi'_2(0) \quad (15)$$

Если подставим (13) в (14), то с учетом (15) получим

$$c_1 \psi_1(0) + c_2 \psi_2(0) = \alpha_1,$$

$$c_1 \psi'_1(0) + c_2 \psi'_2(0) = \alpha_2.$$

Так как $\Delta(0) \neq 0$, то решение этой системы существует и определяется по формуле

$$c_1 = \frac{\alpha_1 \cdot \psi'_2(0) - \alpha_2 \cdot \psi_2(0)}{\Delta(0)}, c_2 = \frac{\alpha_2 \cdot \psi_1(0) - \alpha_1 \cdot \psi'_1(0)}{\Delta(0)}$$

Полученные значения c_1 и c_2 подставляем в (13):

$$U(r, \varphi) = \frac{r^\nu}{\Delta(0)} \left((\alpha_1 \cdot \psi'_2(0) - \alpha_2 \cdot \psi_2(0)) P_2(\varphi) + (\alpha_1 \cdot \overline{\psi'_2(0)} - \alpha_2 \cdot \overline{\psi_2(0)}) P_1(\varphi) + \right. \\ \left. + (\alpha_2 \cdot \psi_1(0) - \alpha_1 \cdot \psi'_1(0)) Q_2(\varphi) + (\alpha_2 \cdot \overline{\psi_1(0)} - \alpha_1 \cdot \overline{\psi'_1(0)}) Q_1(\varphi) + F(\varphi) \right) \quad (16)$$

Таким образом справедлива

ТЕОРЕМА 2 Задача R имеет единственное решение в виде (6), которое определяется по формуле (16).

Литература

- [1] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных.- М. : Наука, 1981. - 448с.
- [2] Тунгатаров А.Б., Алтынбек С.А. Задача Дирихле для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Фукса // Вестник ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, серия естественно-технических наук, 2006, N6(52). - С. 21-28.
- [3] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. - М. : ГИФМЛ, 1959. - 616с.
- [4] Алтынбек С.А. Об одной неоднородной линейной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Фукса на плоскости // Евразийский математический журнал, 2006, N2. - С. 10-22.