О некоторых оценках функционалов в конечномерных пространствах Лоренца

А.А. Таджигитов
Северо-Казахстанский государственный университет им. М.Козыбаева, Петропавловск, Казахстан
e-mail: tadjigit@yandex.ru

Аннотация

В работе исследуется экстремальная задача для квадратичной формы на некоторых многообразиях, порожденных нормами конечномерных пространств. Получены нижние и верхние оценки функционалов. С помощью полученных оценок получены двухсторонние оценки нормы оператора, задаваемого матрицей квадратичной формы в конечномерных пространствах Лоренца и Лебега.

Пусть дана матрица $A = \{a_{ij}\}$ размерности $N_1 \times N_2$. Нас интересуют оценки функционалов

$$F_{pq}(A) = \max_{\|x\|_{l_p}=1} \max_{\|y\|_{l_q}=1} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} x_k a_{kj} y_j$$

$$F^0_{pq}(A) = \max_{\|x\|_{l_{p1}}=1} \max_{\|y\|_{l_{q1}}=1} \sum_{k=1}^{N_1} x_k \sum_{j=1}^{N_2} a_{kj} y_j$$

в терминах элементов матрицы A.

Данные функционалы играют важное значение для получения оценок нормы операторов (см. [1]).

Лемма 1. *Пусть даны две неотрицательные последовательности* $\{a_k\}_{k=1}^N$, $\{b_k\}_{k=1}^N$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k \le \sum_{k=1}^N a_k^* \bar{b}_k,$$

где

$$\bar{b}_k = \max_{\substack{|e|=k \\ e\subset\{1,\dots,N\}}} \frac{1}{|e|} \sum_{m\in e} b_m.$$

Доказательство. Воспользуемся известным неравенством

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k \le \sum_{k=1}^N a_k^* b_k^* \le \sum_{k=1}^N a_k^* \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k b_m^*.$$

Учитывая, что для неотрицательной последовательности

$$\frac{1}{k}\sum_{m=1}^k b_m^* = \max_{\substack{|e|=k \\ e\subset\{1,\dots,N\}}} \sum_{m\in e} b_m,$$

получим нужное утверждение.

Теорема 1. *Пусть $1 \le p, q < \infty$, A-матрица с неотрицательными элементами, тогда*

$$(pq)^{-1} \max_{\substack{e\in M_1\\ \omega\in M_2}} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}} \sum_{m\in e, r\in\omega} a_{mr} \le F^0_{pq}(A) \le \max_{\substack{e\in M_1\\ \omega\in M_2}} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}} \sum_{m\in e, r\in\omega} a_{mr}, \qquad (1)$$

где $M_i = \{e \subset \{1,...,N\}, |e| \ge 1\}$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1, тогда

$$F^0_{pq}(A) \le \sup_{\|x\|_{l_{p1}}=1} \sup_{\|y\|_{l_{q1}}=1} \sum_{k=1}^{N_1} x_k^* \max_{\substack{|e|=k\\ e\in M_1}} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{m\in e} \sum_{j=1}^{N_2} a_{mj} y_j \right| \le$$

$$\le \sup_{\|x\|_{l_{p1}}=1} \sup_{\|y\|_{l_{q1}}=1} \sum_{k=1}^{N_1} x_k^* k^{\frac{-1}{p'}} \max_{\substack{|e|=k\\ e\in M_1}} \sum_{j=1}^{N_2} |y_j| \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \sum_{m\in e} a_{mj}.$$

К внутренней сумме также применим лемму 1.

$$F^0_{pq}(A) \le \max_{\|x\|_{l_{p1}}=1} \max_{\|y\|_{l_{q1}}=1} \sum_{k=1}^{N_1} x_k^* \max_{|e|=k} \sum_{j=1}^{N_2} y_j^* \max_{|\omega|=j} \frac{1}{|e||\omega|} \left(\sum_{r\in\omega} \sum_{m\in e} a_{mr} \right) \le$$

$$\le \max_{\|x\|_{l_{p1}}=1} \max_{\|y\|_{l_{q1}}=1} \sum_{k=1}^{N_1} k^{\frac{1}{p}-1} x_k^* \sum_{j=1}^{N_2} y_j^* k^{\frac{1}{q}-1} \max_{|e|=k, |\omega|=j} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}} \sum_{m\in e} \sum_{r\in\omega} a_{mr} \le$$

$$\le \max_{e>0, \omega>0} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}} \sum_{m\in e, r\in\omega} a_{mr}.$$

Таким образом мы получили правое неравенство (1).

Покажем обратное неравенство. Пусть e, ω два произвольных непустых подмножества соответственно множеств $\{1,...,N_1\}, \{1,...,N_2\}$. Пусть $X = \{x_k\}_{k=1}^{N_1}$, $Y = \{y_k\}_{k=1}^{N_2}$.

$$x_k = \begin{cases} 1, k \in e \\ 0, k \notin e \end{cases} \quad k \in \{1,...,N_1\}. \quad y_k = \begin{cases} 1, k \in \omega \\ 0, k \notin \omega \end{cases} \quad k \in \{1,...,N_2\}.$$

Тогда

$$\|X\|_{l_{p1}} = \sum_{k=1}^{|e|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}}, \qquad \|Y\|_{l_{q1}} = \sum_{m=1}^{|\omega|} \frac{1}{m^{\frac{1}{q'}}}.$$

В силу того, что

$$X_0 = \left(\sum_{m=1}^{|e|} \frac{1}{m^{\frac{1}{p'}}} \right)^{-1} \cdot X, \qquad Y_0 = \left(\sum_{m=1}^{|\omega|} \frac{1}{m^{\frac{1}{q'}}} \right)^{-1} \cdot Y,$$

тогда $\|X_0\|_{l_{p1}} = 1$, $\|Y_0\|_{l_{q1}} = 1$ и получим

$$F_{pq}(A) \ge \left(\sum_{m=1}^{|e|} \frac{1}{m^{\frac{1}{p'}}} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{m=1}^{|\omega|} \frac{1}{m^{\frac{1}{q'}}} \right)^{-1} \cdot \left| \sum_{i=1}^{|e|} \sum_{j=1}^{|\omega|} a_{ij} \right|.$$

Учитывая, что

$$\sum_{m=1}^{|e|} \frac{1}{m^{\frac{1}{p'}}} \le p|e|^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\sum_{m=1}^{|\omega|} \frac{1}{m^{\frac{1}{q'}}} \le q|\omega|^{\frac{1}{q}}$$

получаем, что

$$F_{pq}(A) \ge \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}|\omega|^{\frac{1}{q}}pq}\left[\sum_{m\in e}\sum_{r\in\omega} a_{mr}\right].$$

Учитывая что множества e и ω выбраны произвольно, получаем

$$F_{pq}(A) \ge \frac{1}{pq}\sup_{e,\omega}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}}\left[\sum_{m\in e}\sum_{r\in\omega} a_{mr}\right].$$

Теорема доказана.

Лемма 2. *Имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{|e|=k}\frac{1}{|e|}\sum_{m\in e}|b_m| \le 2\sup_{|e|\ge\frac{k}{3}}\frac{1}{|e|}\left|\sum_{m\in e} b_m\right|.$$

Следствие 1. *Пусть $1 \le p, q < \infty$. A-матрица размерности $N_1 \times N_2$. Тогда для функционала $F_{pq}(A)$ справедлива следующая оценка:*

$$\frac{1}{pq}\max_{e,\omega}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}}\left|\sum_{m\in e}\sum_{r\in\omega} a_{mr}\right| \le F^0_{pq}(A) \le \max_{e,\omega}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}}\left|\sum_{m\in e}\sum_{r\in\omega} a_{mr}\right| \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $\tilde{A}-$ оператор, соответствующий матрице $\{|a_{kj}|\}$. Тогда из правой оценки

$$F_{pq}(A) \le F_{pq}(\tilde{A}) \le \max_{|e|>0,|\omega|>0}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}|\omega|^{\frac{1}{q}}}\sum_{k\in e, j\in\omega}|a_{kj}|.$$

Воспользуемся леммой 2, получаем

$$F_{pq}(A) \le 4\max_{|e|>0,|\omega|>0}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}|\omega|^{\frac{1}{q}}}\left|\sum_{k\in e, j\in\omega} a_{kj}\right|$$

Нижние оценки (2) получаются аналогично.

Теорема 2. *Пусть $1 \le s, h, \theta \le \infty$, $0 < p, r, q < \infty$, $A = \{a_{kj}\}$-матрица с неотрицательными элементами, размерности $N \times N$ и*

$$\frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{h} - \frac{1}{\theta}, \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 2 \qquad (3)$$

Тогда

$$F_{(ph),(q\theta)}(A) \le \left(\sum_{j=1}^{N} \left[j^{\frac{1}{r}} (g_j + f_j) \right]^s \cdot \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{s}},$$

где

$$f_j = \max_{\substack{1 \le |\omega| \le j \\ |e| = j}} \frac{1}{|e|} \frac{1}{|\omega|} \sum_{\substack{m \in e \\ l \in \omega}} a_{ml}; \qquad g_j = \max_{\substack{1 \le |e| \le j \\ |\omega| = j}} \frac{1}{|e|} \frac{1}{|\omega|} \sum_{\substack{m \in e \\ l \in \omega}} a_{ml}.$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 1, тогда

$$F_{(ph),(q\theta)}(A) \le \sup_{\|x\|_{l_{ph}}=1} \sup_{\|y\|_{l_{q\theta}}=1} \sum_{k=1}^{N} x_k^* \max_{|e|=k} \frac{1}{|e|} \sum_{m \in e} \sum_{j=1}^{N} a_{mj} y_j.$$

Оценим слагаемые для каждого фиксированного $k = \overline{1, N}$:

$$\sup_{|e|=k} \frac{1}{|e|} \sum_{m \in e} \sum_{j=1}^{N} y_j a_{mj} \le \sup_{|e|=k} \frac{1}{|e|} \sum_{m \in e} \sum_{j=1}^{N} y_j^* \max_{|\omega|=j} \frac{1}{|\omega|} \sum_{l \in \omega} \sum_{m \in e} a_{ml} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} y_j^* \max_{\substack{|\omega|=j \\ |e|=k}} \frac{1}{|\omega||e|} \sum_{m \in e} \sum_{l \in \omega} a_{ml}.$$

Тогда получим

$$F_{(ph),(q\theta)}(A) \le \sup_{\|x\|_{l_{ph}}=1} \sup_{\|y\|_{l_{q\theta}}=1} \sum_{k=1}^{N} x_k^* \sum_{j=1}^{N} y_j^* \left(\max_{\substack{|\omega|=j \\ |e|=k}} \frac{1}{|e|} \frac{1}{|\omega|} \sum_{\substack{m \in e \\ l \in \omega}} a_{ml} \right) \tag{4}$$

Разобьем внутреннюю сумму на два слагаемых, имеем

$$\sum_{j=1}^{N} y_j^* \left(\max_{\substack{|\omega|=j \\ |e|=k}} \frac{1}{|e|} \frac{1}{|\omega|} \sum_{\substack{m \in e \\ l \in \omega}} a_{ml} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} y_j^* \left(\max_{\substack{|\omega|=j \\ |e|=k}} \frac{1}{|e|} \frac{1}{|\omega|} \sum_{\substack{m \in e \\ l \in \omega}} a_{ml} \right) + \sum_{j=k+1}^{N} y_j^* \left(\max_{\substack{|\omega|=j \\ |e|=k}} \frac{1}{|e|} \frac{1}{|\omega|} \sum_{\substack{m \in e \\ l \in \omega}} a_{ml} \right) \le$$

$$\le \left(\max_{\substack{1 \le |\omega| \le k \\ |e|=k}} \frac{1}{|\omega||e|} \sum_{m \in e} \sum_{l \in \omega} a_{ml} \right) \sum_{j=1}^{k} y_j^* + \sum_{j=k+1}^{N} \left(\max_{\substack{|\omega|=j \\ |e|=k}} \frac{1}{|\omega||e|} \sum_{m \in e} \sum_{l \in \omega} a_{ml} \right).$$

Тогда сумма в правой части (4) оценивается следующим образом:

$$F_{(ph),(q\theta)}(A) \le \sup_{\|x\|_{l_{ph}}=1} \sup_{\|y\|_{l_{q\theta}}=1} \sum_{k=1}^{N} k x_k^* \left(\max_{\substack{1 \le |\omega| \le k \\ |e|=k}} \frac{1}{|\omega||e|} \sum_{m \in e} \sum_{l \in \omega} a_{ml} \right) \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} y_j +$$

$$
+\sum_{k=1}^{N} x_k^* \sum_{j=k+1}^{N} y_j^* \left(\max_{\substack{|\omega|=j\\|e|=k}} \frac{1}{|\omega||e|} \sum_{m\in e}\sum_{l\in\omega} a_{ml} \right) =
$$

$$
=\sum_{k=1}^{N} k x_k^* \left(\max_{\substack{1\le|\omega|\le k\\|e|=k}} \frac{1}{|\omega||e|} \sum_{m\in e}\sum_{l\in\omega} a_{ml} \right) \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_j +
$$

$$
+\sum_{j=1}^{N} j y_j^* \left(\max_{\substack{|\omega|=j\\1\le|e|\le j}} \frac{1}{|\omega||e|} \sum_{m\in e}\sum_{l\in\omega} a_{ml} \right) \left(\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_k^* \right).
$$

Далее, учитывая равенство (3) и обозначения

$$
x_k^{**} = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} x_m^*, \;\; y_k^{**} = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} y_m^*,
$$

получаем:

$$
F_{(ph),(q\theta)}(A) \le \sup_{\|x\|_{l_{ph}}=1} \sup_{\|y\|_{l_{q\theta}}=1} \sum_{k=1}^{N} \left(k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{h}} x_k^* \right) \left(y_k^{**} k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \right) \left(k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} f_k \right) +
$$

$$
+\sum_{j=1}^{N} \left(j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{h}} x_j^{**} \right) \left(y_j^* j^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \right) \left(j^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} g_j \right).
$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая что $\frac{1}{s} = \left(1 - \frac{1}{h} - \frac{1}{\theta}\right)$, имеем

$$
F_{(ph),(q\theta)}(A) \le \sup_{\|x\|_{l_{ph}}=1} \sup_{\|y\|_{l_{q\theta}}=1} \|x^{**}\|_{l_{ph}} \|y^{**}\|_{l_{q\theta}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left[j^{\frac{1}{r}} (g_j + f_j) \right]^s \cdot \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{s}} \le
$$

$$
\le c \left(\sum_{j=1}^{N} \left[j^{\frac{1}{r}} (g_j + f_j) \right]^s \cdot \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{s}}.
$$

Здесь учитывается, что

$$
\|x^{**}\|_{l_{ph}} \sim \|x\|_{l_{ph}}, \|y^{**}\|_{l_{q\theta}} \sim \|y\|_{l_{q\theta}}.
$$

Теорема доказана.

Следствие 2 (Неравенство O'Нейла [2]). *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $\{a_n\}_{n=1}^N$

$$
Ax = \left\{ \sum_{k=1}^{N} x_k a_{k+j} \right\}_{j=1}^{N}.
$$

Тогда

$$
\|A\|_{l_p^N \to l_q^N} \le c \sup_{1\le|e|\le N} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \left| \sum_{m\in e} a_m \right|.
$$

Доказательство. Известно, что

$$\|A\|_{l_p^N\to l_q^N}=\sup_{\substack{\|x\|_{l_{pp}^N=1}\\ \|y\|_{l_{q'q'}^N=1}}}\sum_{k=1}^N x_k\sum_{j=1}^N y_j a_{k+j}=F_{(p,p),(q,q)}(A),$$

где $\frac{1}{q'}=1-\frac{1}{q}$ - сопряженный параметр.

Следовательно

$$\|A\|_{l_p^N\to l_q^N}\le c\max_{1\le|e|\le|\omega|\le N}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}}\sum_{l\in\omega}\sum_{m\in e}|a_{m+l}|+$$

$$+\max_{1\le|\omega|\le|e|\le N}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q}}}\sum_{l\in\omega}\sum_{m\in e}|a_{m+l}|\le 2c\sup_{1\le|e|\le N}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\left|\sum_{m\in e}a_m\right|.$$

Следствие 3. *Пусть* $N\in\mathbf{N}$, $1<p<q<\infty$. *Тогда*

$$\|A\|_{l_{p1}^N\to l_{q\infty}^N}\asymp c\sup_{\substack{1\le|e|\le N\\ 1\le|\omega|\le N}}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{q'}}}\left|\sum_{m\in e}\sum_{l\in\omega}a_{ml}\right|.$$

причем константа не зависит от N.

Доказательство. Отметим, что

$$\|A\|_{l_{p1}^N\to l_{q\infty}^N}\asymp F_{pq}^0(A).$$

Тогда из следствия 1 следует наше утверждение.

Для интегральных операторов, аналог этого утверждения был доказан в работе [3].

Литература

[1] E. Nursultanov, S. Tikhonov *Net spaces and boundedness of integral operators*// Centre de recerca matematica, Preprint Y 800, April 2008.

[2] O‘Neil R.O. *Convolution operators and L_{pq} spaces* // Duke Math. J. – 1963. – V. 30. – P. 129 – 142.

[3] Костюченко А.Г., Нурсултанов Е.Д. *Об интегральных операторах в L_p – пространствах* // Фундаментальная и прикладная математика. – 1999. – T.5, N2. – C. 475 – 491.