Корректные краевые задачи для оператора Лапласа

А.А. Анияров
Семипалатинский государственный педагогический институт, Семей, Казахстан
e-mail: almir84@mail.ru

Аннотация

В работе дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа в круге. Затем выписаны их конечномерные возмущения, которые также корректно разрешимы. Приведены формулы резольвенты указаных операторов.

1 Введение

Известно [1], что для оператора Лапласа корректной краевой задачей является задача Дирихле, то есть для корректности краевые условия выбираются специальным образом. в данной работе предлагается еще один способ постановки корректных краевых задач для уравнений с частными производными. Для наглядности все результаты иллюстрируются на операторе Лапласа в круге. В настоящей статье описаны все возможные корректные краевые задачи для оператора Лапласа в круге. В заключении приведены формулы резольвент для найденных корректных задач. Метод работы идейно близок к методам работ [2, 3, 4].

2 Вспомогательные утверждения и доказательство теорем

В дальнейшем нам понадобится известное утверждение [1].

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге* $\Delta W(x,y) = f(x,y)\,, x^2+y^2<r^2$
с граничным условием

$$W|_{x^2+y^2=r^2}=0$$

задается формулой $W(x,y)=\int\int G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$
где

$$G(x,y,\xi,\eta)=d\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)-$$
$$-d\ln\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\right]$$

d-некоторая константа, конкретный вид которой не играет роли.

Обсуждение теоремы 1. Теорема 1 утверждает, что функция Грина задачи Дирихле для круга выписывается в явном виде. Заметим также, что функция влияния $G(x,y,\xi,\eta)$ принимает только отрицательные значения при любых (x,y) и (ξ,η), поскольку задаче Дирихле для гармонического уравнения соответствует отрицательно определенный оператор.

Доказательство. Известно [1], что фундаментальное решение гармонического уравнения имеет вид при $(x,y)\,,(\xi,\eta)\in\Omega=\{x^2+y^2<r^2\}$

$$\varepsilon(x,y,\xi,\eta)=d\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right),$$

где d - некоторая константа.

Введем обозначения

$$X^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$
$$Y^2 = \tfrac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left[\left(x - \tfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2 + \left(y - \tfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right],$$
$$Z^2 = r^2\left(1 - \tfrac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1 - \tfrac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right).$$

Для указанных чисел справедливо тождество $X^2 = Y^2 - Z^2$, которое проверяется непосредственно. Отсюда, в частности, следует неравенство $Y^2 > Z^2$ при $(x,y) \neq (\xi,\eta)$. Рассмотрим фундаментальное решение

$$\varepsilon(x,y,\xi,\eta) = d\ln X^2 = d\ln(Y^2 - Z^2) = d\ln Y^2 + d\ln\left(1 - \tfrac{Z^2}{Y^2}\right) =$$
$$= d\ln Y^2 + d\left[-\tfrac{Z^2}{Y^2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{Z^4}{Y^4} - ...\right]$$

Указанные преобразования верны, поскольку $Y^2 > Z^2$, отсюда получим тождество

$$d\ln X^2 - d\ln Y^2 = -d\left[\frac{Z^2}{Y^2} + \frac{1}{2}\frac{Z^4}{Y^4} + ...\right] \tag{1}$$

Обозначим левую часть тождества через $G(x,y,\xi,\eta)$, тогда $G(x,y,\xi,\eta) = d\ln X^2 - d\ln Y^2$. Покажем, что введенная функция $G(x,y,\xi,\eta)$ - представляет функцию Грина задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге. Для простоты при доказательстве теоремы считаем, что $r = 1$. Функция Грина состоит из фундаментального решения и компенсирующей функции:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \varepsilon(x,y,\xi,\eta) - K(x,y,\xi,\eta),$$

где,

$$\varepsilon(x,y,\xi,\eta) = d\ln X^2 = d\ln\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right),$$

$$K(x,y,\xi,\eta) = d\ln Y^2 = d\ln\left[(\xi^2+\eta^2)\left[\left(x - \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\right],$$

Вычислим в начале

$$\Delta_{x,y}G(x,y,\xi,\eta) = \Delta_{x,y}\left[\varepsilon(x,y,\xi,\eta) - K(x,y,\xi,\eta)\right],$$

В правой части каждое слагаемое вычисляем по отдельности $\Delta_{x,y}\varepsilon(x,y,\xi,\eta) = = \Delta_{x,y}d\ln\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)$. С помощью формулы Лейбница можем записать соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varepsilon(x,y,\xi,\eta) = d\frac{(-1)}{\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)^2}\left(2(x-\xi)\right)^2 + 2d\frac{1}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varepsilon(x,y,\xi,\eta) = d\frac{(-1)}{\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)^2}\left(2(y-\eta)\right)^2 + 2d\frac{1}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \tag{3}$$

Складывая соотношения (2) и (3), получаем

$$\Delta_{x,y}\varepsilon\left(x,y,\xi,\eta\right)=-4d\cdot\frac{1}{\left(x-\xi\right)^{2}+\left(y-\eta\right)^{2}}+4d\cdot\frac{1}{\left(x-\xi\right)^{2}+\left(y-\eta\right)^{2}}=0$$

при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$. Так как точка (x,y) находится внутри области Ω, а точка $\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)$ вне области Ω, поэтому они не могут совпадать, и следовательно, аналогично предшествующему выполняется равенство $\Delta_{x,y}K\left(x,y,\xi,\eta\right)=0$. Поскольку $d\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)$ - фундаментальное решение, то $\Delta_{x,y}d\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)=\delta_\Omega\left((x,y),(\xi,\eta)\right)$, где $\delta_\Omega\left((x,y),(\xi,\eta)\right)$ - дельта функция Дирака в области Ω. Таким образом, функция $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta_{x,y}G\left(x,y,\xi,\eta\right)=\delta_\Omega\left((x,y),(\xi,\eta)\right)$. С другой стороны, $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ согласно тождеству (1) равняется правой части (1), то есть

$$G\left(x,y,\xi,\eta\right)=-d\left[\frac{Z^2}{Y^2}+\frac{1}{2}\frac{Z^4}{Y^4}+...\right]$$

Поскольку $Z^2=\left(1-\left(x^2+y^2\right)^2\right)\left(1-\left(\xi^2+\eta^2\right)^2\right)$, то след на границе $Z^2|_{(x,y)\in\partial\Omega}$ равен нулю. Поэтому функция $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ на границе $\partial\Omega$ удовлетворяет граничному условию Дирихле

$$G\left(x,y,\xi,\eta\right)|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\Omega}=0 \tag{4}$$

Теорема 1 полностью доказана.

Пусть $h\left(x,y\right)$ произвольная дважды дифференцируемая в круге Ω функция. Введем новую функцию по формуле

$$I\left(x,y\right)=\int\int\limits_{\Omega}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta$$

где $\Delta_{\xi,\eta}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ - оператор Лапласа по переменным ξ,η.

Ясно, что функция $I\left(x,y\right)$ обладает свойствами:

$$\Delta_{x,y}I\left(x,y\right)=\Delta_{x,y}h\left(x,y\right),\ (x,y)\in\Omega \tag{5}$$

$$I\left(x,y\right)|_{\partial\Omega}=0 \tag{6}$$

С другой стороны, вспоминая формулу Грина

$$\int\int\limits_{\Omega}\Delta uvdxdy=\int\int\limits_{\Omega}u\Delta vdxdy-\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\overline{n}}-\frac{\partial u}{\partial\overline{n}}v\right)ds,$$

функцию $I\left(x,y\right)$ можно переписать в виде

$$\begin{gathered}I\left(x,y\right)=\int\int\limits_{\Omega}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta=\int\int\limits_{\Omega}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)h\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta+\\+\int\limits_{\partial\Omega}\left(G\left(x,y,\xi,\eta\right)\frac{\partial h}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\right)ds_{\xi,\eta}\end{gathered} \tag{7}$$

где $\overline{n}_{\xi,\eta}$ - внешняя нормаль к окружности $\partial\Omega$ в точке (ξ,η). Заметим, что $G(x,y,\xi,\eta) = 0$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$, поскольку $G(x,y,\xi,\eta) = G(\xi,\eta,x,y)$ и верно (4). Точно также в силу симметрии функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ относительно пар (x,y) и (ξ,η) имеем равенство

$$\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta) = \delta_\Omega((x,y),(\xi,\eta)), \tag{8}$$

где $\delta_\Omega((x,y),(\xi,\eta))$ - дельта функция Дирака в области Ω.

Из (7) и (8) следует равенство

$$I(x,y) = h(x,y) - \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\,ds_{\xi,\eta} \tag{9}$$

Удобно вести обозначение $M(x,y) = h(x,y) - I(x,y)$. Подставим правую часть (9) в соотношение (5). В результате для любой гладкой функции $h(x,y)$ получим соотношение

$$\Delta_{x,y}M(x,y) = 0 \tag{10}$$

Теперь используем граничное условие (6). Подставим (9) в граничное условие (6), тогда для произвольной гладкой функции $h(x,y)$ имеем граничное соотношение

$$h|_{\partial\Omega} - M|_{\partial\Omega} = 0 \tag{11}$$

В силу произвольности $h(x,y)$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$ из соотношения (11) убеждаемся в справедливости следующего свойства функции Грина:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = \delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)), \tag{12}$$

где $\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ - дельта функция Дирака на границе $\partial\Omega$.
По-видимому, граничное соотношение (12) для функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ известно, но авторы не смогли найти точные координаты для ссылок. Поэтому сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждения

Теорема 2. *Функция Грина задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге обладает свойствами:*
1) $G(P,Q) = G(Q,P), \forall Q,P\in\Omega$,
2) $G(P,Q)\le 0, \forall Q,P\in\Omega$,
3) $\Delta_{x,y}G(Q,P) = \delta_\Omega(P,Q), \forall Q,P\in\Omega$,
4) $G(P,Q) = 0, P\in\partial\Omega, Q\in\Omega$,
5) при $P,Q\in\partial\Omega$ *справедливо соотношение* (12)

Теперь образуем новую функцию

$$W(x,y) = \int\int\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta + h(x,y) - I(x,y), \tag{13}$$

где $h(x,y)$ - произвольная достаточно гладкая функция. $I(x,y)$ - определяется по формуле (9).

Теорема 3. *Функция $W(x,y)$, введенная по формулам (13) и (9), является решением следующей задачи:*

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta W(x,y)=f(x,y)\,,\,(x,y)\in\Omega,\\ W(x,y)|_{\partial\Omega}=h(x,y)|_{\partial\Omega}\,,\end{array}\right. \tag{14}$$

где $h(x,y)$ - произвольная достаточно гладкая функция.

Причем решение задачи (14) единственно, то есть решение задачи (14) зависит только от граничных значений $h(x,y)|_{\partial\Omega}$, но не зависит от $h(x,y)$, когда $(x,y)\in\Omega$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения (9) представление (13) можно переписать в виде

$$W(x,y)=\int\int\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\,ds_{\xi,\eta} \tag{15}$$

Проверим для $W(x,y)$ первое соотношение из (14). Справедливость равенства (14) следует из того, что верны (10) и (8). Проверим для $W(x,y)$ второе соотношение из (14). Пусть $(x,y)\in\partial\Omega$. Тогда из равенства 4) теоремы 2 и соотношения (15) и (12) следует требуемое граничное соотношение из (14). Единственность задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге известна. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

Теперь покажем, как используя теорему 3 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного гармонического уравнения в круге.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x,y)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x,y)$, то есть пусть существует непрерывный оператор K, отображающий $f(x,y)$ в $h(x,y)$. Напомним $h(x,y)$ - гладкая функция. Итак, пусть $h=K(f)$. Тогда задача (14) примет вид

$$\Delta W(x,y)=f(x,y)\,,\,(x,y)\in\Omega, \tag{16}$$

$$W(x,y)|_{\partial\Omega}-K(\Delta W)|_{\partial\Omega}=0, \tag{17}$$

Условие (17) накладываемое на функцию $W(x,y)$, можно интерпретировать как дополнительное условие для того, чтобы уравнение (16) при любой правой части $f(x,y)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (16)- (17) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новым "краевым" условием вида (17). Слово "краевое" пишем в кавычках из-за того, что в общем случае, это условие не является граничным. Итак, справедлива

Теорема 4. *Для любого непрерывного оператора K отображающего пространство $\{f\}\in L_2(\Omega)$ в множество гладких функции $\{h\}\in W_2^2(\Omega)$ задача (16)- (17) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях f.*

Теперь докажем обратное утверждение

Теорема 5. *Если уравнение (16) при всех допустимых правых частях f с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор K, отображающий пространство $\{f\}\in L_2(\Omega)$ в множество гладких функции $\{h\}\in W_2^2(\Omega)$, такой что дополнительное условие примет вид (17).*

Доказательство. Пусть уравнение (16) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x,y)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x,y,f)$. Введем функцию $u(x,y,f) = = \int\int\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta)\, f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta$ и составим разность

$$v(x,y) = W(x,y,f) - u(x,y,f) \tag{18}$$

Ясно, что $v(x,y)$ является решением однородного уравнения $\Delta v = 0$ и однозначно определяется по f. Таким образом, любому элементу f соответствует единственная функция v , которая представляет достаточно гладкую функцию и является гармонической функцией. Обозначим через K оператор, ставящий каждой f в соответствие v, то есть $v = K(f)$. Рассмотрим совершенно новую функцию по формуле

$$w(x,y) = u(x,y,f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta}$$

Последняя формула аналогична формуле (15). В данном случае роль $h(x,y)$ играет функция $v(x,y)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\begin{array}{l} \Delta w(x,y) = f(x,y) \\ w(x,y)|_{\partial\Omega} = v(x,y)|_{\partial\Omega} \end{array} \tag{19}$$

где $v(x,y) = K(f)$ или $v(x,y) = K(\Delta w)$.

С другой стороны, из представления (18) следует, что $W(x,y,f) = u(x,y,f) + v(x,y)$ также удовлетворяет соотношениям (19). Поэтому, из теоремы единственности вытекает, что $W(x,y,f) = w(x,y)$. Следовательно, дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид (19). Теорема 5 полностью доказана.

Для конкретности приведем пример, вытекающие из теорем 4 и 5. Согласно теореме 4, выбирая оператор K, можно получить те или иные корректные задачи для неоднородного гармонического уравнения в круге. Причем согласно теореме 5 этот способ позволяет описать все возможные корректные задачи.

Пример 1. Пусть оператор K имеет интегральный вид

$$(Kf)(x,y) = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t,s)\, f(t,s)\, dt ds,$$

где $K(x,y,t,s)$ - достаточно гладкое по (x,y) ядро интегрального оператора. Тогда дополнительное условие (17) примут вид

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} - \int\limits_{\Omega} K(x,y,t,s)\, \Delta W(t,s)\, dt ds|_{\partial\Omega} = 0 \tag{20}$$

Если к тому же ядро $K(x,y,t,s)$ по переменным (t,s) является гармонической функцией, то дополнительное условие (20), используя формулу Грина, можно записать в виде краевого условия

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} - \tag{21}$$

$-\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{t,s}}W\left(t,s\right)\Delta_{t,s}K\left(x,y,t,s\right)-W\left(t,s\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{t,s}}\Delta_{t,s}K\left(x,y,t,s\right)\right)ds_{t,s}|_{\partial\Omega}=0$

Таким образом, краевая задача (16) - (21) однозначно разрешима при любых допустимых правых частях, если $K\left(x,y,t,s\right)$ - гладкая по (x,y) и гармоническая по (t,s).

Пример 2. Если оператор K имеет вид

$$\left(Kf\right)\left(x,y\right)=\int\limits_{\Omega}K\left(x,y,t,s\right)\exp\left(-\frac{1}{\left|f\left(t,s\right)\right|}\right)dtds,$$

где $K\left(x,y,t,s\right)$ - достаточно гладкое по (x,y) ядро интегрального оператора, то приходим к нелинейному граничному условию. На самом деле, для записи дополнительного условия (17) нам нет необходимости знать значения $\left(Kf\right)\left(x,y\right)$ во внутренних точках (x,y) из Ω. Достаточно знание информации о следах $\left(Kf\right)\left(x,y\right)$ на границе $\partial\Omega$.

В дальнейшем нам удобно вместо $K\left(f\right)$ писать $\left(Kf\right)\left(x,y\right)$ и считать K - линейным оператором. Оператор, соответствующий задаче (16)- (17) обозначим через L_K. Тогда L_0 соответствует задаче Дирихле из теоремы 1. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора L_K.

Теорема 6. *Если K - линейный непрерывный оператор из теоремы 4 и 5, то резольвента оператора L_K имеет вид*

$$\left(L_K-\lambda I\right)^{-1}f\left(x,y\right)=\left(L_0-\lambda I\right)^{-1}f\left(x,y\right)+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left[L_K\left(L_K-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial G\left(x,y,\xi,\eta\right)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\right]KL_0\left(L_0-\lambda I\right)^{-1}f\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}$$

Согласно теореме 6 для вычисления резольвенты на произвольном элементе f достаточно уметь вычислять значения резольвенты на конкретных функциях $\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$.

Доказательство. Удобно ввести следующие обозначения

$$u\left(x,y\right)=\left(L_0-\lambda I\right)^{-1}f\left(x,y\right),$$

$$v\left(x,y,\xi,\eta\right)=L_K\left(L_K-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial G\left(x,y,\xi,\eta\right)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}},$$

$$g\left(\xi,\eta\right)=\left(KL_0\left(L_0-\lambda I\right)^{-1}f\right)\left(\xi,\eta\right),$$

$$W\left(x,y\right)=u\left(x,y\right)+\int\limits_{\partial\Omega}v\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}$$

Покажем, что $\Delta W=\lambda W+f$, $(x,y)\in\Omega$. Действительно, рассмотрим

$$\Delta W=\Delta u+\Delta\int\limits_{\partial\Omega}v\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}=$$

$$=\lambda u+f+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\Delta L_K\left(L_K-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial G}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\right]g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}$$

Поскольку $L_K p(x,y) \equiv \Delta p(x,y)$ при $p \in D(L_K)$, то

$$\Delta L_K (L_K - \lambda I)^{-1} = \Delta \left(I + \lambda (L_K - \lambda I)^{-1} \right) =$$

$$= \Delta + \lambda \Delta (L_K - \lambda I)^{-1} = \Delta + \lambda L_K (L_K - \lambda I)^{-1}$$

Вспоминая также, что

$$\Delta_{x,y} \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} = 0, \ (x,y) \in \Omega,$$

можем записать соотношение

$$\Delta W = \lambda u + f + \lambda \int\limits_{\partial\Omega} v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} = \lambda W + f$$

Таким образом, функция W удовлетворяет требуемому дифференциальному соотношению

$$\Delta W = \lambda W + f$$

Остается проверить справедливость краевого условия вида (17). Для этого рассмотрим разность

$$\left[W - K(\Delta W) \right]\big|_{\partial\Omega} = \left. \left[u + \int\limits_{\partial\Omega} v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} - K(\lambda W + f) \right] \right|_{\partial\Omega} =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} L_K (L_K - \lambda I)^{-1} \left. \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \right|_{\partial\Omega} g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} - K(\lambda W + f)\big|_{\partial\Omega} =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left. \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \right|_{\partial\Omega} g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} + \lambda \int\limits_{\partial\Omega} (L_K - \lambda I)^{-1} \left. \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \right|_{\partial\Omega} g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} - K(\lambda W + f)\big|_{\partial\Omega}$$

Вспоминая соотношение (12), можно записать

$$\left[W - K(\Delta W) \right]\big|_{\partial\Omega} = g(x,y)\big|_{\partial\Omega} + \lambda \int\limits_{\partial\Omega} (L_K - \lambda I)^{-1} \left. \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \right|_{\partial\Omega} g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} -$$

$$- K(\lambda u + f)\big|_{\partial\Omega} - K \left. \left(\int\limits_{\partial\Omega} \lambda v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} \right) \right|_{\partial\Omega}$$

Заметим, что $g(x,y)\big|_{\partial\Omega} = K(\lambda u + f)\big|_{\partial\Omega}$, так как

$$\lambda u + f = \lambda (L_0 - \lambda I)^{-1} f + f = L_0 (L_0 - \lambda I)^{-1} f.$$

С другой стороны, функция $(L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \in D(L_K)$ и поэтому удовлетворяет соответствующим краевым условиям

$$(L_K - \lambda I)^{-1} \left. \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \right|_{\partial\Omega} = K \left. \left(L_K (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \right) \right|_{\partial\Omega} = K(v)\big|_{\partial\Omega}$$

Поэтому

$$\lambda \int\limits_{\partial\Omega} (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} = K\left(\int\limits_{\partial\Omega} \lambda v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\, ds_{\xi,\eta} \right)$$

поскольку K - линейный оператор. Следовательно, справедливо краевое условие $W|_{\partial\Omega} - K(\Delta W)|_{\partial\Omega} = 0$. Что и требовалось доказать.

Литература

[1] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. Москва.: Наука. 1976. 296 с.

[2] Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Диф.уравнения. 1981. т.17, N5. с. 873-885.

[3] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Диф.уравнения. 1981. т.17, N5. с. 1105-1121.

[4] Павлов Б.С. Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат. наук, т.42, N6(258), 1987. с. 99-131