О периодической краевой задаче для систем интегро - дифференциальных уравнений гиперболического типа

А.Т. Асанова
Институт математики МОиН РК, Алматы, Казахстан
e-mail: anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Аннотация

Методом введения функциональных параметров исследуется периодическая краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Установлены достаточные условия существования единственного классического решения рассматриваемой задачи в терминах исходных данных и предложен алгоритм нахождения этого решения.

На $\bar{\Omega} = \{(t,x) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le \omega\}$ рассматривается периодическая краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) +$$

$$+ \int_0^x \int_0^T \left\{ K_1(t,x,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} + K_2(t,x,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial s} + K_3(t,x,s,\xi)u(s,\xi) \right\} ds d\xi, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(T,x)}{\partial x}, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (3)$$

где $u = colon(u_1, u_2, ..., u_n)$, $n \times n$ - матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n - вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, $n \times n$ - матрицы $K_i(t,x,s,\xi)$ непрерывны на $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, $i = 1,2,3$, n - вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Функция $u(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1) - (3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$ и граничным условиям (2), (3).

Рассматриваются вопросы существования, единственности и нахождения классического решения задачи (1)-(3). Достаточные условия существования периодических по t с периодом T решений систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными (1) с импульсным воздействием установлены численно-аналитическим методом в работе [1]. Для исследования и решения краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений со смешанной производной (1) без интегрального слагаемого было предложено обобщение метода параметризации [2, 3], разработанного для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, на уравнения в частных производных - метод введения функциональных параметров [4,5]. Были получены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных и предложены алгоритмы нахождения классического решения. На основе эквивалентности корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости в терминах исходных данных рассматриваемой задачи [6-8]. Краевая задача с данными на характеристиках для систем интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа в случае, когда интегральный слагаемый содержит только интеграл по переменной t исследован в [9, 10] методом введения функциональных параметров. Также были установлены достаточные, необходимые и достаточные условия однозначной и корректной разрешимости исследуемой задачи.

В настоящей работе метод введения функциональных параметров развивается на системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа (1). Получены коэффициентные условия существования единственного классического решения периодической краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа в терминах исходных данных и предложен алгоритм его нахождения.

Схема метода. Возьмем число N, $N = 1, 2, ...$, и разобьем область $\bar{\Omega}$ на N частей: $[0, T] \times [0, \omega] = [0, h) \times [0, \omega] \bigcup [h, 2h) \times [0, \omega] \bigcup ... \bigcup [(N-1)h, Nh] \times [0, \omega]$, $h = T/N$.

Через $u_r(t, x)$ обозначим сужение функции на Ω_r, где $\Omega_r = [(r-1)h, rh) \times [0, \omega]$, $r = \overline{1, N-1}$, $\Omega_N = [(N-1)h, T] \times [0, \omega]$. Вводятся функциональные параметры $\lambda_r(x)$ как значения функции $u_r(t, x)$ на линиях $t = (r-1)h$: $\lambda_r(x) = u_r((r-1)h, x)$. С помощью замены $u_r(t, x) = \widetilde{u}_r(t, x) + \lambda_r(x)$, $r = \overline{1, N}$, задача (4)-(6) переходит к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}_r}{\partial t \partial x} = A(t, x)\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial x} + A(t, x)\lambda_r(x) + B(t, x)\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial t} + C(t, x)\widetilde{u}_r + C(t, x)\lambda_r(x) + f(t, x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^x \int_{(i-1)h}^{ih} \Big\{ K_1(t, x, s, \xi)\frac{\partial \widetilde{u}_i(s, \xi)}{\partial \xi} + K_1(t, x, s, \xi)\lambda_i'(\xi) + K_2(t, x, s, \xi)\frac{\partial \widetilde{u}_i(s, \xi)}{\partial s} +$$

$$+ K_3(t, x, s, \xi)\widetilde{u}_i(s, \xi) + K_3(t, x, s, \xi)\lambda_i(\xi) \Big\} ds d\xi, \qquad (t, x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, N}, \tag{4}$$

$$\widetilde{u}_r((r-1)h, x) = 0, \qquad r = \overline{1, N}, \quad x \in [0, \omega], \tag{5}$$

$$\widetilde{u}_r(t, 0) = \psi(t) - \psi((r-1)h), \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N-1}, t \in [(N-1)h, T], \tag{6}$$

$$\lambda_1'(x) = \widetilde{v}_N(T, x) + \lambda_N'(x), \qquad x \in [0, \omega], \tag{7}$$

$$\lambda_p'(x) + \lim_{t \to ph-0} \frac{\partial \widetilde{u}_p(t, x)}{\partial x} = \lambda_{p+1}'(x), \qquad p = \overline{1, N-1}, \quad x \in [0, \omega], \tag{8}$$

где (8) являются условиями склеивания (непрерывности) производной по x функции $u(t, x)$ - решения задачи (1)-(3), на внутренних линиях разбиения. Из склеивания (непрерывности) производной по x решения на внутренних линиях вытекает склеивание (непрерывность) решения, производной по t решения и смешанной производной по x, t решения. Задачи (1)-(3) и (4)-(8) эквивалентны в следующем смысле. Если функция $u^*(t, x)$ является решением задачи (1)-(3), то система пар $(\lambda_r^*(x), u_r^*(t, x))$ где $\lambda_r^*(x) = u_r^*((r-1)h, x)$, $u_r^*(t, x) = u^*(t, x) - u_r^*((r-1)h, x)$, $(t, x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, N}$, будет решением задачи (4)-(8). И наоборот, если система пар $(\lambda_r^{**}(x), u_r^{**}(t, x))$, $(t, x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, N}$, является решением задачи (4)-(8), то функция $u^{**}(t, x)$, определяемая равенствами

$u^{**}(t,x)=\lambda_r^{**}(x)+\lim\limits_{t\to rh-0}u_r^{**}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (1)-(3). Введем обозначения $\widetilde{v}_r(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t}$, тогда из условий (5), (6) вытекает $\widetilde{v}_r((r-1)h,x)=0$, $\widetilde{w}_r(t,0)=\dot{\psi}(t)$. При фиксированных $\lambda_r(x)$ $(\lambda_r'(x))$ задача (4)-(6) является задачей Гурса для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа на Ω_r, $r=\overline{1,N}$, и она эквивалентна системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde{v}_r(t,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}[A(s,x)\widetilde{v}_r(s,x)+A(s,x)\lambda_r'(x)+B(s,x)\widetilde{w}_r(s,x)+$$
$$+C(s,x)\widetilde{u}_r(s,x)+C(s,x)\lambda_r(x)+f(s,x)]ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\{K_1(s,x,s_1,\xi)\widetilde{v}_i(s_1,\xi)+K_1(s,x,s_1,\xi)\lambda_i'(\xi)+K_2(s,x,s_1,\xi)\widetilde{w}_i(s_1,\xi)+$$
$$+K_3(s,x,s_1,\xi)\widetilde{u}_i(s_1,\xi)+K_3(s,x,s_1,\xi)\lambda_i(\xi)\}ds_1d\xi ds, \tag{9}$$
$$\widetilde{w}_r(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int\limits_{0}^{x}[A(t,\xi)\widetilde{v}_r(t,\xi)+A(t,\xi)\lambda_r'(\xi)+B(t,\xi)\widetilde{w}_r(t,\xi)+$$
$$+C(t,\xi)\widetilde{u}_r(t,\xi)+C(t,\xi)\lambda_r(\xi)+f(t,\xi)]d\xi+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{\xi}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\{K_1(t,\xi,s,\xi_1)\widetilde{v}_i(s,\xi_1)+K_1(t,\xi,s,\xi_1)\lambda_i'(\xi_1)+K_2(t,\xi,s,\xi_1)\widetilde{w}_i(s,\xi_1)+$$
$$+K_3(t,\xi,s,\xi_1)\widetilde{u}_i(s,\xi_1)+K_3(t,\xi,s,\xi_1)\lambda_i(\xi_1)\}dsd\xi_1d\xi, \tag{10}$$
$$\widetilde{u}_r(t,x)=\psi(t)-\psi((r-1)h)+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{0}^{x}[A(s,\xi)\widetilde{v}_r(s,\xi)+A(s,\xi)\lambda_r'(\xi)+B(s,\xi)\widetilde{w}_r(s,\xi)+$$
$$+C(s,\xi)\widetilde{u}_r(s,\xi)+C(s,\xi)\lambda_r(\xi)+f(s,\xi)]d\xi ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{\xi}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\{K_1(s,\xi,s_1,\xi_1)\widetilde{v}_i(s_1,\xi_1)+K_1(s,\xi,s_1,\xi_1)\lambda_i'(\xi_1)+$$
$$+K_2(s,\xi,s_1,\xi_1)\widetilde{w}_i(s_1,\xi_1)+K_3(s,\xi,s_1,\xi_1)\widetilde{u}_i(s_1,\xi_1)+K_3(s,\xi,s_1,\xi_1)\lambda_i(\xi_1)\}ds_1d\xi_1d\xi ds. \tag{11}$$

Пусть $D_i(x)=\int\limits_{(i-1)h}^{ih}A(s,x)ds$, $i=\overline{1,N}$. Подставим соответствующие выражения $\lim\limits_{t\to ph-0}\widetilde{v}_p(t,x)$, $p=\overline{1,N}$ из (9) в соотношения (7), (8), предварительно умножив (7) на $h>0$. Тогда получим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\lambda_1'(x)-[I+D_N(x)]\lambda_N'(x)=\int\limits_{(N-1)h}^{T}C(s,x)ds\lambda_N(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(N-1)h}^{T}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\{K_1(s,x,s_1,\xi)\lambda_i'(\xi)+K_3(s,x,s_1,\xi)\lambda_i(\xi)\}ds_1d\xi ds+$$

$$+\int\limits_{(N-1)h}^{T}[A(s,x)\widetilde{v}_N(s,x)+B(s,x)\widetilde{w}_N(s,x)+C(s,x)\widetilde{u}_N(s,x)+f(s,x)]ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(N-1)h}^{T}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\{K_1(s,x,s_1,\xi)\widetilde{v}_i(s_1,\xi)+K_2(s,x,s_1,\xi)\widetilde{w}_i(s_1,\xi)+$$

$$+K_3(s,x,s_1,\xi)\widetilde{u}_i(s_1,\xi)\}ds_1d\xi ds, \tag{12}$$

$$[I+D_p(x)]\lambda_p'(x)-\lambda_{p+1}'(x)=-\int\limits_{(p-1)h}^{ph}C(s,x)ds\lambda_p(x)-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(p-1)h}^{ph}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\{K_1(s,x,s_1,\xi)\lambda_i'(\xi)+K_3(s,x,s_1,\xi)\lambda_i(\xi)\}ds_1d\xi ds-$$

$$-\int\limits_{(p-1)h}^{ph}[A(s,x)\widetilde{v}_p(s,x)+B(s,x)\widetilde{w}_p(s,x)+C(s,x)\widetilde{u}_p(s,x)+f(s,x)]ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(p-1)h}^{ph}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\{K_1(s,x,s_1,\xi)\widetilde{v}_i(s_1,\xi)+K_2(s,x,s_1,\xi)\widetilde{w}_i(s_1,\xi)+$$

$$+K_3(s,x,s_1,\xi)\widetilde{u}_i(s_1,\xi)\}ds_1d\xi ds, \qquad p=\overline{1,N-1}, \tag{13}$$

где I - единичная матрица размерности $n\times n$.

Из условий согласования в точках $((r-1)h,0)$, $r=\overline{1,N}$, следует

$$\lambda_r(0)=\psi((r-1)h), \qquad r=\overline{1,N}. \tag{14}$$

Таким образом, получаем систему интегро-дифференциальных уравнений (12), (13) с условием (14). Обозначим через $Q(h,x)$ - матрицу размерности $nN\times nN$, соответствующую левой части систем (12), (13):

$$Q(h,x)=\begin{bmatrix} hI & 0 & 0 & \dots & 0 & h[I+D_N(x)] \\ I+D_1(x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+D_{N-1}(x) & -I \end{bmatrix}, \qquad x\in[0,\omega],$$

Для решения задачи с параметрами (4)-(8) имеем замкнутую систему уравнений (9)-(11) и (12)-(14). Неизвестными являются как функции $\widetilde{v}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)$, так и функции $\lambda_r'(x)$, $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,N}$. Поэтому для нахождения решения задачи (4)-(8) применяется итерационный метод, который строится по следующему алгоритму:

0-й шаг алгоритма. Полагая в системе интегро-дифференциальных уравнений (12), (13) $\widetilde{v}_r(t,x)=0$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\dot{\psi}(t)$, $\widetilde{u}_r(t,x)=\psi(t)-\psi((r-1)h)$, $\lambda_r(x)=\psi((r-1)h)$, $r=\overline{1,N}$, и предполагая обратимость матрицы $Q(h,x)$ для всех $x\in[0,\omega]$, определяем $\lambda_r'^{(0)}(x)$, $x\in[0,\omega]$. С помощью условия (14) определяем $\lambda_r^{(0)}(x)$: $\lambda_r^{(0)}(x)=\psi((r-1)h)+\int\limits_0^x\lambda_r'^{(0)}(\xi)d\xi$, $r=\overline{1,N}$. В интегральных уравнениях (9)-(11) считая в правой части $\lambda_r'(x)=\lambda_r'^{(0)}(x)$, $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, находим $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$.

1-й шаг алгоритма. Полагая в системе интегро-дифференциальных уравнений (12), (13) $\widetilde{v}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)=\widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $r=\overline{1,N}$, и предполагая обратимость матрицы $Q(h,x)$ для всех $x\in[0,\omega]$, определяем $\lambda_r'^{(1)}(x)$, $x\in[0,\omega]$. С помощью условия (14) определяем $\lambda_r^{(1)}(x)$: $\lambda_r^{(1)}(x)=\psi((r-1)h)+\int\limits_0^x\lambda_r'^{(1)}(\xi)d\xi$, $r=\overline{1,N}$. В интегральных уравнениях (9)-(11) считая в правой части $\lambda_r'(x)=\lambda_r'^{(1)}(x)$, $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, находим $\widetilde{v}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{u}_r^{(1)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$.

И т.д. на k-м шаге алгоритма находим $\lambda_r'^{(k)}(x)$, $\lambda_r^{(k)}(x)$, $\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)$, $r=\overline{1,N}$, $k=0,1,2,:.$

Алгоритм метода введения функциональных параметров процесс нахождения неизвестных функций разбивает на два этапа:
1) нахождение производных введенных функциональных параметров $\lambda_r'(x)$ из системы интегральных уравнений Вольтерра (15), определение $\lambda_r(x)$ с помощью условия (14) и найденных $\lambda_r'(x)$.
2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{v}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)$ из системы интегральных уравнений (10) – (12).

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, а также существование единственного классического решения задачи (1)-(3) обеспечивает

Теорема 1. *Пусть матрица $Q(h,x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и выполнены условия:*

a) $||[Q(h,x)]^{-1}||\le\gamma(h,x)$; *b)* $q(h,x)=\gamma(h,x)\cdot\alpha(x)h\times$
$$\times\exp\left\{hT\gamma(h,x)\int\limits_0^x k_1(x,\xi)d\xi\right\}\cdot\left(\exp\left\{h\alpha(x)+hT\gamma(h,x)\int\limits_0^x k_1(x,\xi)d\xi\right\}-1\right)\le\chi<1,$$
где $\gamma(x)$ - непрерывная на $[0,\omega]$ функция, $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,t]}||A(t,x)||$,
$k_1(x,\xi)=\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}||K_1(t,x,s,\xi)||$, *$\chi$-const.*

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 2 из [5] на основе вышеприведенного алгоритма.

Результаты исследования периодической краевой задачи для систем ин тегро - дифференциальных уравнений (1)-(3) методом введения одного функционального параметра анонсированы в [11].

Литература

[1] *Ткач А.Б.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений

интегро - дифференциальных уравнений с частными производными с импульсным воздействием. // Нелинейные колебания. - 2005, - Т. 8, - N 1, – С. 123-131.

[2] *Джумабаев Д.С.* Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Вестник АН КазССР. - 1988, - N 1, – С. 48-52.

[3] *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1989, Т. 29, - N 1, – С. 50-66.

[4] *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений.// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2002, Т. 42, - N 11. – С. 1673-1685.

[5] *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений.// Дифференц. уравнения. - 2003, Т. 39, - N 10, – С. 1343-1354.

[6] *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений. // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. - 2002, - N 3, – С. 20-26.

[7] *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений. // Доклады Российской АН. - 2003, Т. 391, - N 3, – С. 295-297.

[8] *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений. // Дифференц. уравнения. - 2005, Т. 41, - N 3, – С. 337-346.

[9] *Асанова А.Т.* О нелокальной краевой задаче для систем интегро - дифференциальных уравнений гиперболического типа со смешанной производной. // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. - 2007, - N 5, – С. 3-8.

[10] *Асанова А.Т.* О корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем интегро - дифференциальных уравнений гиперболического типа. // Математический журнал. - 2009, Т. 9, - N 1, – С. 26-33.

[11] *Асанова А.Т.* О полупериодической краевой задаче для систем интегро - дифференциальных уравнений гиперболического типа. // Материалы межд. научно-практической конф. "Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления", посв. 60-лет. д.т.н., проф., акад. НИА Биярова Т.Н., Алматы, 19-20 ноября 2009 г. – Алматы. - 2009. Ч. 2, – С. 481-485.