Метод декомпозиции области для обыкновенных дифференциальных уравнений

А.А. Базарбекова
Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск
ainur.bazarbekova@gmail.com

Аннотация

В данной статье доказана сходимость альтернирующего метода Шварца для обыкновенных дифферннциальных уравнений с переменными коэффициентами.

При решении краевых задач для дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными полезно свести процесс решения задачи к последовательному решению однотипных задач по подобластям. Для реализации этой цели оказывается полезным метод декомпозиции области, в частности, метод Шварца.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' - q\ (x)\ \ y = 0, \quad a < x < b. \tag{1}$$

где $q\ (x) \in C\ [a,\ b]$, причем $q\ (x) \geq 0$ на этом отрезке.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1):

$$y\ (a) = A,\ \ y\ (b) = B, \tag{2}$$

где A и B – заданные числа.

Нетрудно доказать, что решение краевой задачи (1), (2) удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$y\ (x) = \frac{B-A}{b-a}x + \frac{Ab-aB}{b-a} + \int\limits_a^b G\,(x,\xi)\ \ f(\xi)\,d\xi, \tag{3}$$

где

$$G(x,\xi) = \frac{1}{b-a}\left\{ \begin{array}{ll} (\xi-b)(x-a), & a \leq x \leq \xi, \\ (\xi-a)(x-b), & \xi \leq x \leq b \end{array} \right.$$

есть функция Грина краевой задачи (2) для уравнения $y'' = f\ (x)$.

Отметим, что решение краевой задачи (1) – (2) равносильно решению интегрального уравнения (3).

Приведем ряд простых предложений, доказательство которых опускаем.

Предложение 1. В области $y > 0$, $a < x < b$ графики всех решений уравнения (1) выпуклы вниз, а в области $y < 0$, $a < x < b$ - выпуклы вверх.

Предложение 2. Любое решение уравнения (1), отличное от постоянной, на интервале $(a,\ b)$ не может иметь ни положительных максимумов, ни отрицательных минимумов.

Предложение 3. Любое решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям $y\ (a) = y\ (b) = 0$, является тождественным нулем, т. е. $y\ \ (x) \equiv 0$, $a < x < b$.

Предложение 4. Любые два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1), принимающие на границе интервала $(a,\ b)$ одинаковые значения, тождественно равны на отрезке $[a,\ b]$.

Предложение 5. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям $y_1(a) \geq y_2(a)$ и $y_1(b) \geq y_2(b)$. Тогда утверждается, что $y_1(x) \geq y_2(x)$ всюду на отрезке $[a, b]$.

Предложение 6. Предел любой монотонно возрастающей и равномерно ограниченной сверху последовательности решений уравнения (1) есть также решение этого уравнения (аналогичное утверждение верно и для монотонно убывающей и равномерно ограниченной снизу последовательности).

Рассмотрим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-y'' + q(x)\,\mathrm{y} = f(x) \tag{4}$$

где $f\ (x) \in C\ [a, b]$ и $q\ (x) \in C\ [a, b]$ и $q\ \ (x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$.

Пусть c и d – два числа удовлетворяющие неравенствам $a < c < d < b$. Альтернирующий метода Шварца решения задачи (4), (2) заключается в последующих друг за другом решении следующих задач:

$$-u''_{i+1} + q(x)\ u_{i+1} = f\ (x)\,, \quad x \in (a,\ d)\,, \tag{5}$$

$$u_{i+1}(a) = A, \quad u_{i+1}\ (d) = v_i\ (d)$$

и

$$-v''_{i+1} + q\ (x)\ v_{i+1} = f\ (x)\,, \quad x \in\ (c,\ b)\,, \tag{6}$$

$$v_{i+1}\ (c) = u_{i+1}\ (c)\,, \quad v_{i+1}\ (b) = B,$$

где $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, а $v_0\ (d)$ – начальное приближение, которое задается произвольным образом.

Пусть $y(x)$ есть точное решение задачи (4), (2), которое, как известно, существует. Заметим, что это решение принадлежит классу $C^2[a, b]$, т.е. оно дважды непрерывно дифференцируемо на отрезке $[a, b]$.

Введем следующие функции:

$$g_i\ (x) = y\ (x) - u_i\ (x)\,\text{и} \quad h_i\ (x) = y\ (x) - v_i\ (x)\,.$$

Эти функции являются погрешностями приближенных решений $u_i(x)$ и $v_i(x)$ к точному решению $y(x)$ на i-м шаге метода Шварца.

Функции $g_i(x)$ и $h_i(x)$ являются решениями следующих задач:

$$-g''_{i+1} + q(x)\,g_{i+1} = 0, \quad x \in (a, d)\,, \tag{7}$$

$$g_{i+1}(a) = 0, \quad g_{i+1}(d) = h_i(d)\,, \tag{8}$$

и

$$-h''_{i+1} + q(x)\,h_{i+1} = 0, \quad x \in (c, b)\,, \tag{9}$$

$$h_{i+1}(c) = g_{i+1}(c), \quad h_{i+1}(b) = 0. \quad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Пусть $m = |h_0(d)|$.

Через $g_1^+(x)$ обозначим решение уравнения (1) на интервале $a < x < d$, удовлетворяющие граничным условиям

$$g_1^+(a) = 0, \quad g_1^+(d) = m. \tag{11}$$

Через $h_1^+(x)$ обозначим решение уравнения (1) на интервале $c < x < b$, удовлетворяющие граничным условиям

$$h_1^+(c) = g_1^+(c), \quad h_1^+(b) = 0. \tag{12}$$

При $n = 2, 3, \ldots$ через $g_n^+(x)$ обозначим решения уравнения (1) на интервале $a < x < d$, удовлетворяющие граничным условиям

$$g_n^+(a) = 0, \quad g_n^+(d) = h_{n-1}^+(d), \tag{13}$$

а через $h_n^+(x)$ обозначим решения уравнения (1) на интервале $c < x < d$, удовлетворяющие граничным условиям

$$h_n^+(c) = g_n^+(c), \quad h_n^+(b) = 0. \tag{14}$$

Так как на границе интервала (a, d) $\quad g_1^+(x) \geq g_1(x)$, то в силу предложения 5

$$g_1^+(x) \geq g_1(x) \ \text{ при } \ a \leq x \leq d,$$

в частности,

$$h_1^+(c) = g_1^+(c) \geq g_1(c) = h_1(c),$$

и так как $h_1^+(b) = h_1(b)$, то опять в силу предложения 5

$$h_1^+(x) \geq h_1(x) \ \text{ при } \ c \leq x \leq b.$$

Аналогичными рассуждениями при $n = 2, 3, \ldots$ можно установить, что

$$g_n^+(x) \geq g_n(x) \ \text{ при } \ a \leq x \leq d,$$

и

$$h_n^+(x) \geq h_n(x) \ \text{ при } \ c \leq x \leq b,$$

Итак, нами построены последовательности функций $\{g_n^+(x)\}$, $a \leq x \leq d$ и $\{h_n^+(x)\}$, $c \leq x \leq b$, которые мы называем мажорантными последовательностями.

Аналогично строятся минорантные последовательности.

Определяем $g_n^-(x)$ и $h_n^-(x)$, как решения уравнения (1), определенные соответственно в интервалах $a < x < d$ и $c < x < b$, и удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$g_1^-(a) = 0, \quad g_1^-(d) = -m,$$

$$h_1^-(c) = g_1^-(c), \quad h_1^-(b) = 0$$

и при $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$g_n^-(a) = 0, \quad g_n^-(d) = h_{n-1}^-(d),$$

$$h_n^-(c) = g_n^-(c), \quad h_n^-(b) = 0.$$

С помощью рассуждений подобных тем, которые были проведены для мажорантных последовательностей, можно установить для минорантных последовательностей следующие неравенства:

$$g_n^-(x) \leq g_n(x) \quad \text{при} \quad a \leq x \leq d$$

и

$$h_n^-(x) \leq h_n(x) \quad \text{при} \quad c \leq x \leq b.$$

Итак, для последовательностей $\{g_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$ нами построены мажорантные последовательности $\{g_n^+(x)\}$, $\{h_n^+(x)\}$ и минорантные последовательности $\{g_n^-(x)\}$, $\{h_n^-(x)\}$, удовлетворяющие неравенствам

$$g_n^-(x) \leq g_n(x) \leq g_n^+(x), \quad a \leq x \leq d, \tag{15}$$

$$h_n^-(x) \leq h_n(x) \leq h_n^+(x), \quad c \leq x \leq b. \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{16}$$

Теперь исследуем сходимость построенных мажорантных и минорантных последовательностей.

Рассмотрим сначала мажорантные последовательности $\{g_n^+(x)\}, \{h_n^+(x)\}$. Так как в силу (11) граничные значения функции $g_1^+(x)$ на интервале (a, d) не превосходят числа m, то в силу предложения 2 имеем

$$g_1^+(x) \leq m \quad \text{при} \quad a \leq x \leq d.$$

Тогда в силу (12) имеем $h_1^+(c) = g_1^+(c) \leq m$, и, следовательно, граничные значения функции $h_1^+(x)$ на интервале (c, b) также не превосходят m, и опять в силу предложения 2 имеем

$$h_1^+(x) \leq m \quad \text{при} \quad c \leq x \leq b.$$

В частности, отсюда имеем $h_1^+(d) \leq m$.

Сравним между собой граничные значения $g_1^+(x)$ и $g_2^+(x)$ на интервале (a, d).

Имеем

$$g_1^+(0) = g_2^+(0) = 0,$$

$$g_2^+(d) = h_1^+(d) \leq m \quad \text{и} \quad g_1^+(d) = m.$$

Следовательно, на границе интервала (a, d) имеем $g_2^+ \leq g_1^+$, поэтому в силу предложения 5

$$g_1^+(x) \geq g_2^+(x) \quad \text{при} \quad a \leq x \leq d. \tag{17}$$

В силу (12) и (14) имеем

$$h_1^+(c) = g_1^+(c), \qquad h_2^+(c) = g_2^+(c) \quad \text{и} \quad h_1^+(b) = h_2^+(b) = 0.$$

Учитывая неравенство (17) при $x = c$, отсюда получим

$$h_1^+(c) \geq h_2^+(c) \quad \text{и} \quad h_1^+(b) = h_2^+(b).$$

Отсюда, пользуясь предложением 5, получим

$$h_1^+(x) \geq h_2^+(x) \quad \text{при} \quad c \leq x \leq b.$$

Пользуясь подобными рассуждениями, выводим, что последовательности $\{g_n^+(x)\}$, $\{h_n^+(x)\}$, монотонно убывающие на соответствующих отрезках $[a,d]$ и $[c,b]$, т. е.

$$g_1^+(x) \geq g_2^+(x) \geq \cdots \geq g_n^+(x) \geq \ldots \quad \text{при} \quad a \leq x \leq d, \tag{18}$$

$$h_1^+(x) \geq h_2^+(x) \geq \cdots \geq h_n^+(x) \geq \ldots \quad \text{при} \quad c \leq x \leq b.$$

Используя второе утверждение предложения 2 относительно отрицательных минимумов и предложение 5, аналогичными рассуждениями получаем, что последовательности $\{g_n^-(x)\}$ и $\{h_n^-(x)\}$ монотонно возрастающие, т.е.

$$g_1^-(x) \leq g_2^-(x) \leq \cdots \leq g_n^-(x) \leq \ldots \quad \text{при} \quad a \leq x \leq d \tag{19}$$

$$h_1^-(x) \leq h_2^-(x) \leq \cdots \leq h_n^-(x) \leq \ldots \quad \text{при} \quad c \leq x \leq b.$$

В силу (15) и (19) имеем

$$g_n^-(x) \geq g_1^-(x), \quad g_n^+(x) \geq g_n^-(x),$$

поэтому $g_n^+(x) \geq g_1^-(x)$, т. е. последовательность $\{g_n^+(x)\}$ равномерно ограничена снизу.

Итак, последовательность $\{g_n^+(x)\}$ - монотонно убывающая и равномерно ограниченная снизу последовательность на отрезке $[a,d]$, поэтому она сходится на этом отрезке к некоторой функции $g^+(x)$, которая в силу предложения 6 является решением уравнения (1).

Аналогично можно показать, что последовательность $\{h_n^+(x)\}$ сходится на отрезке $[c,b]$ к некоторому решению $h^+(x)$ уравнения (1).

Покажем теперь, что на отрезке $[c,d]$ имеет место равенство

$$g^+(x) = h^+(x), \quad c \leq x \leq d. \tag{20}$$

Действительно, в силу самого определения функции $g_n^+(x)$ и $h_n^+(x)$ имеют место равенства

$$g_n^+(d) = h_{n-1}^+(d) \quad \text{и} \quad g_n^+(c) = h_n^+(c).$$

Если здесь перейти к пределу при $n \to \infty$, то получим

$$g^+(d) = h^+(d), \quad g^+(c) = h^+(c).$$

Таким образом, функции $g^+(x)$ и $h^+(x)$ на границе интервала (c,d) имеют одинаковые значения, поэтому в силу предложения 4 имеет место равенство (20).

Рассмотрим функцию

$$y^+(x)=\begin{cases} g^+(x), & a\le x\le d\\ h^+(x), & c\le x\le b.\end{cases} \tag{21}$$

Отметим, что запись (21) в силу равенства (20) и свойств решений задачи Коши для уравнения (1) определяет однозначную функцию класса $C^2[a,b]$.

Итак, функция $y^+(x)\in C^2[a,b]$ удовлетворяет уравнению (1) на (a,b) и удовлетворяет краевым условиям $y^+(a)=y^+(b)=0$. Поэтому в силу предложения 3 $y^+(x)\equiv 0$ при $a\le x\le b$.

Аналогично можно построить функцию $y^-(x)$, которая также тождественно равна нулю на отрезке $[a,b]$.

Следовательно, в силу равенства (21)

$$g^+(x)\equiv 0 \ \text{ при } \ x\in[a,d] \ \text{ и } \ h^+(x)\equiv 0 \ \text{ при } \ x\in[c,b].$$

Теперь учитывая (15) и (16) имеем

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)\equiv 0 \ \text{ при } \ x\in[a,d] \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} h_n(x)\equiv 0 \ \text{ при } \ x\in[c,b].$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=y(x), \quad a\le x\le d$$

и

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x)=y(x), \quad c\le x\le b.$$

Это означает, что построенные нами первоначальные приближения u_n и v_n будут сходиться к точному решению $y(x)$ задачи (4), (2). Таким образом, с помощью метода мажорантных и минорантных последовательностей [1], с использованием предложений 1 – 6, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Последовательности функций $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$, построенные методом Шварца (5), (6) сходятся равномерно на соответствующих отрезках $[a,d]$ и $[c,b]$ к точному решению задачи.*

Литература

[1] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.