Нелокальная краевая задача для параболического уравнения с постоянными коэффициентами, когда носитель пересекается с границей области

М.К. Кураисов
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы Казахстан

Аннотация

В статье получены необходимые условия для существования регулярного решения нелокальной краевой задачи для параболического уравнения с постоянными коэффициентами когда носитель пересекается с границей области в угловой точки

Постановка задачи

Требуется найти регулярное решение $u(x,t)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

в области $\Omega_t \equiv \{(x, y, z, t) : -\infty < x < \infty, 0 < y, z < \infty, 0 < t < T\}$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x, y, z) \tag{2}$$

краевому условию

$$u|_{y=0} = \varphi(x, z, t) \tag{3}$$

и нелокальному краевому условию

$$u|_{z=0} + h\, u|_{z=\gamma(y)} = \psi(x, y, t) \tag{4}$$

А) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ положительно определенная и симметричная матрица, т.е. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$;

Б) Функция $z = \gamma(y) \in C^{1+\alpha}(0 < \alpha < 1)$ положительная, однозначная и $\gamma(0) = 0$;

В) Заданные функции $f(x, y, z) \in C(\Omega_0)$, $\varphi(x, z, t) \in C(R^2_{+,t})$, $\psi(x, y, t) \in C(R^2_{+,t})$ и ограничены;

Для непрерывности решения в замкнутой области необходимо выполнение следующих условий согласования

$$f(x, 0, z) = \varphi(x, z, 0); \quad f(x, y, 0) + h\, f(x, y, \gamma(y)) = \psi(x, y, 0);$$

$$\varphi(x, 0, t) + h\, \varphi(x, \gamma(y), t) = \psi(x, 0, t);$$

Методом интегральных преобразований и продолжений функцию Грина данной задачи можно построить в следующем виде

$$Q(x-\xi, y \pm \eta, z \pm \zeta, t-\tau) = (\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}})^3 \frac{1}{a\sqrt{\delta}} e^{-\dfrac{[a_{22}(x-\xi) - a_{12}(y-\eta)]^2}{4a_{22}\delta(t-\tau)}}$$

$$[e^{-\dfrac{(y-\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}} - e^{-\dfrac{(y+\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}}][e^{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\dfrac{(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}]. \tag{5}$$

Теперь построим специальные потенциалы с ядром функции Грина [3]

$$V_0(x,\, y,\, z,\; t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} f(\xi,\, \eta,\, \zeta)\, Q(x-\xi,\, y\pm\eta,\, z\pm\zeta,\, t)\, d\xi d\eta d\zeta;$$

$$W(x,\, y,\, z,\, t) = \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\xi,\, \zeta,\, \tau)\, \frac{\partial Q}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0} d\xi\, d\zeta;$$

Относительно данных потенциалов справедливы следующие утверждения [2]

Лемма 1. *Если $f(x,y,z)\in C(\Omega_0)$ и ограниченная функция, тогда функция $V_0(x,t)\in C^{2\,1}_{xt}(\Omega_t)$ удовлетворяет уравнению (1), кроме того*

$$\lim_{t\to 0} V_0(x,y,z,t) = f(x,y,z);$$

$$V_0(x,\, y,\, z,\; t)|_{y=0} = 0 \quad V_0(x,\, y,\, z,\; t)|_{z=0} = 0.$$

Лемма 2. *Если $\varphi(x,\, z,\, t)\in C(R^3_{+,\,t})$ и ограниченная функция, тогда функция $W(x,\, t)$ $\in C^{2\,1}_{x\;t}(\Omega_t)$ удовлетворяет уравнению (1), кроме того*

$$\lim_{y\to 0} W(x,\, y,\, z,\, t) = \varphi(x,\, z,\, t)$$

$$W(x,\, y,\, z,\, t)|_{t=0} = 0 \quad W(x,\, y,\, z,\, t)|_{z=0} = 0.$$

Сведение краевой задачи (1)-(4) к сингулярному интегральному уравнению

Решение краевой задачи (1)-(4) будем искать в виде суммы специальных потенциалов

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = V_0(x,\, y,\, z,\, t) + W(x,y,z,t) + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \sigma(\xi,\, \eta,\, \tau)\, a^2\, \frac{\partial\, Q}{\partial\, \zeta}\bigg|_{\zeta=0} d\xi\, d\eta \tag{6}$$

где функция $\sigma(x,\, y,\, t)$ неизвестная непрерывная функция.

Используя вышеприведенные леммы легко доказать, что функция $u(x,\, y,\, z,\, t)$, определенная формулой (6), удовлетворяет уравнению (1), начальному условию (2) и краевому условию (3). Неизвестную функцию $\sigma(x,\, y,\, t)$ выбираем таким образом, чтобы уравнение (6) удовлетворяло нелокальному краевому условию уравнение. С этой целью поставим функцию $u(x,\, y,\, z,\, t)$ на нелокальное краевое условие, тогда относительно $\sigma(x,\, y,\, t)$ получим сингулярное интегральное уравнение

$$\sigma(x,\, y,\, t) + h\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \sigma(\xi,\, \eta,\, \tau)\, a^2\, \frac{\partial\, Q}{\partial\, \zeta}\bigg|_{\substack{\zeta=0\\ z=\gamma(y)}} d\xi\, d\eta = \Psi(x,\, y,\, t), \tag{7}$$

где

$$\Psi(x,\, y,\, t) = \psi(x,\, y,\, t) - h\,(V_0(x,\, y,\, z,\, t) + \omega(x,\, y,\, z,\, t))|_{z=\gamma(y)}.$$

В силу свойств специальных потенциалов и условий согласования функция $\Psi(x,\, y,\, t)$ в правой части уравнения (7) непрерывная и $\Psi(x,y,0)=0$ функция.

Когда $z=\gamma(y)$ носитель нелокального условия пересекается пересекается с границей области, ядро интегрального уравнения (7) имеет существенную особенность. Поэтому для решения интегрального уравнения (7) невозможно сразу применить метод последовательных приближений. Существование решения докажем методом регуляризации, для чего выделив характеристическую часть ядра интегрального уравнения (7), перепишем в следующем виде

$$\sigma(x,\, y,\, t) + h\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \sigma(\xi,\, \eta,\, \tau)\, H(x-\xi, y, \eta, t-\tau) d\xi\, d\eta = \Psi(x,\, y,\, t) -$$

$$-h\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \sigma(\xi,\, \eta,\, \tau)\, [K-H] d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

где

$$K(x,\, \xi, y\pm\eta, t-\tau) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi\,(t-\tau)}}\Big)^3 \frac{1}{a\sqrt{\delta}}\frac{\gamma(y)}{(t-\tau)} e^{-\dfrac{\gamma^2(y)}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$e^{-\dfrac{[a_{22}(x-\xi)-a_{12}(y-\eta)]^2}{4a_{22}\delta\,(t-\tau)}} [e^{-\dfrac{(y-\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}} - e^{-\dfrac{(y+\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}}];$$

$$H(x,\xi, y\pm\eta, t-\tau) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi\,(t-\tau)}}\Big)^3 \frac{1}{a\sqrt{\delta}}\frac{ky}{(t-\tau)} e^{-\dfrac{(ky)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$e^{-\dfrac{[a_{22}(x-\xi)-a_{12}(y-\eta)]^2}{4a_{22}\delta\,(t-\tau)}} [e^{-\dfrac{(y-\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}} - e^{-\dfrac{(y+\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}}],$$

$z=ky$ - касательная функция в точке $(0,\, 0)$ функции $z=\gamma(y)$, а k - угловой коэффициент.

Лемма 3. *Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию А), а функция $z=\gamma(y)$ условию Б), тогда ядро $H_1(x,\, \xi, y\pm\eta, t-\tau) = K(x,\, \xi, y\pm\eta, t-\tau) - H(x,\, \xi, y\pm\eta, t-\tau)$ имеет слабую интегрируемую особенность и удовлетворяет неравенству*

$$|H_1(x,\xi, y\pm\eta, t-\tau)| \le \frac{M}{(t-\tau)^{\dfrac{4-\alpha}{2}}} e^{-\dfrac{[a_{22}(x-\xi)-a_{12}(y-\eta)]^2}{4a_{22}\delta(t-\tau)}}.$$

$$\cdot [e^{-\dfrac{(y-\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}} - e^{-\dfrac{(y+\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}}].$$

Доказательство аналогично [1].

Решение характеристического интегрального уравнения (8)

Интегральное уравнение (8) перепишем в виде

$$\sigma(x,\,y,\,t)+h\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\sigma(\xi,\,\eta,\,\tau)\,H(x-\xi,y,\eta,t-\tau)d\xi\,d\eta=\Psi_1(x,\,y,\,t). \tag{9}$$

и подробно изучим интегральный оператор

$$H=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi\,(t-\tau)}}\Big)^3\frac{1}{a\sqrt{\delta}}\frac{ky}{(t-\tau)}e^{-\dfrac{(ky)^2}{4a^2(t-\tau)}}e^{-\dfrac{[a_{22}(x-\xi)-a_{12}(y-\eta)]^2}{4a_{22}\delta\,(t-\tau)}}$$

$$[e^{-\dfrac{(y-\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}}-e^{-\dfrac{(y+\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}}]d\xi\,d\eta.$$

Относительно интегрального уравнения H справедливы следующие утверждения

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$|H|\le\Bigg|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi\,(t-\tau)}}\Big)^3\frac{1}{a\sqrt{\delta}}\frac{ky}{(t-\tau)}e^{-\dfrac{(ky)^2}{4a^2(t-\tau)}}e^{-\dfrac{[a_{22}(x-\xi)-a_{12}(y-\eta)]^2}{4a_{22}\delta\,(t-\tau)}}$$

$$[e^{-\dfrac{(y-\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}}-e^{-\dfrac{(y+\eta)^2}{4a_{22}(t-\tau)}}]d\xi\,d\eta\Bigg|\le\sqrt{a_{22}}\left|\frac{\pi-2Arctg\dfrac{\sqrt{a_{22}}}{a}k}{\pi}\right|.$$

Доказательство аналогично [1].

Лемма 5. *Если* $\sigma(x,\,y,\,t)\in \mathrm{C}_{x,y,t}^{\alpha,\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ *и* $\sigma(x,\,y,\,0)=0$ *функция тогда,* $H\,\sigma(x,\,y,\,t)\in \mathrm{C}_{x,y,t}^{\alpha,\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ *и* $H\,\sigma(x,\,y,\,t)|_{t=0}=0$.

Доказательство аналогично [1].

Теперь характеристическое интегральное уравнение (9) перепишем в следующем операторном виде

$$\sigma(x,\,y,\,t)+\,H\,\sigma(x,\,y,\,t)=\Psi_1(x,\,y,\,t).$$

Если выполняется условие разрешимости $|hq|=\left|h\dfrac{\sqrt{a_{22}}(\pi-2Arctg\dfrac{\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a}}k)}{\pi}\right|<1$,

тогда интегральный оператор $h\,H$ является оператором сжатия, поэтому существует ограниченный обратный оператор $(E + h\,H)^{-1}$ и решение характеристического интегрального уравнения (9) можно представить в виде

$$\sigma(x,\,y,\,t) = (E + h\,H)^{-1}\Psi_1(x,\,y,\,t) \equiv R\;\Psi_1(x,\,y,\,t), \tag{10}$$

где E-единичный оператор.

Теорема 1. *Если выполнено условие разрешимости $|hq| < 1$, тогда характеристическое интегральное уравнение (9) имеет единственное решение определяемое формулой (10).*

Решение сингулярного интегрального уравнения (7)

Интегральное уравнение (7) будем решать методом регуляризации. Для этого характеристическое интегральное уравнение (9) перепишем в следующем операторном виде

$$\sigma(x,\,y,\,t) + h\mathrm{H}\,\sigma(x,\,y,\,t) = \Psi(x,\,y,\,t) - h[K - H]\,\sigma(x,\,y,\,t) \tag{11}$$

Подставляя равенство (10) в уравнение (11) получим

$$\sigma(x,\,y,\,t) = (E + h\,H)^{-1}(\Psi(x,\,y,\,t) - h[K - H]\,\sigma(x,\,y,\,t))$$

или

$$\sigma(x,\,y,\,t) + h\,R\,[K - H]\,\sigma(x,\,y,\,t) \;= R\,\Psi(x,\,y,\,t), \tag{12}$$

где свободный член $R\,\Psi(x,\,y,\,t)$ ограниченная и непрерывная функция.

Так как оператор R линейно ограниченная, а оператор $[K - H]$ со слабой особенностью, то произведение $R\,[K - H]$ тоже является интегральным оператором со слабой особенностью. Поэтому решение регуляризованного интегрального уравнения (12) можно найти методом последовательных приближений. Найденное решение $\sigma(x,\,y,\,t)$ является ограниченной и непрерывной функцией. Подитоживая полученные результаты сформулируем в виде теорем

Теорема 2. *Если выполнены условия А), Б) и условие разрешимости $|hq| < 1$ тогда, сингулярное интегральное уравнение (6) имеет решение определенное равенством (12).*

Теорема 3. *Если выполнены условия А), Б), В) и условие разрешимости $|hq| < 1$ тогда, краевая задача (1)-(4) имеет регулярное решение определенное равенством (6), где неизвестная функция $\sigma(x,\,y,\,t)$ определяется из регуляризованного интегрального уравнения (12).*

Литература

[1] *Кураисов М.К.* Нелокальная краевая задача 2-го рода для параболического уравнения с переменными коэффициентами. / /Вестник КазНУ. – Алматы, - 2007, - N1(52), С. 24-32.

[2] *Орынбасаров М.* Теория тепловых потенциалов и ее применение. – Алматы.: Қазақ университетi, – 2005, – 70 с.

[3] *Фридман А.* Уравнение с частными производными параболического типа. – М.: МИР, – 1968.