Об одной обратно-краевой задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

З.К. Мырзапаязова
Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызстан
e-mail: mrmacintosh@list.ru

Аннотация

В работе рассматривается обратно-краевая задача для нелинейных интеро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка типа Уизема. Доказана теорема существования и единственности решения.

В работе [1] методом дополнительного аргумента исследовано операторно-дифференциальное уравнение с начальным условием. В работе [2] этим же методом были исследованы вопросы разрешимости начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Уизема. В работе [3] этим же методом был исследован вопрос разрешимость обратной задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В работах [4-5] с помощью метода дополнительного аргумента исследованы обратно-краевые задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим задачу

$$u_t(t,x) + \left[\int\limits_0^x u(t,\xi)d\xi + g(t)\right] u_x(t,x) = f(t,x,u(t,x),\lambda(t)), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \tag{2}$$

$$u(t,0) = \beta(t), \tag{3}$$

$$u(t,X) = \psi(t), \tag{4}$$

где $x \in [0,X]$, $t \in [0,T]$, $g(t)$, $f(t,x,u,\lambda)$, $\phi(x)$, $\beta(t)$, $\psi(t)$ – известные, а $u(t,x)$, $\lambda(t)$ - неизвестные функции. Пусть выполняются условия согласования:

$$\phi(0) = \beta(0), \quad \phi(X) = \psi(0). \tag{5}$$

Предположим выполнения следующих условий:

1) $\varphi(x) \in C^2[0,X]$, $g(t) \in C^2[0,T]$, $f(t,x,u,\lambda) \in C^{0,2,2,1}([0,T]\times[0,X]\times R\times R)$, $\beta(t) \in C^1[0,T]$; $\psi(t) \in C[0,T]$;

2) функция $\varphi^{'}(x)$ удовлетворяет условию Липшица константой L, а функции $f_x(t,x,u,\lambda)$, $f_u(t,x,u,\lambda)$ удовлетворяют условию Липшица по аргументам *x, u,* λ, с константой F;

3) $g(t) \geq \alpha > 0$, $f(t,X,\psi,\lambda) \geq \gamma > 0$ при всех $[0,T]$, для любой a уравнение $f(t,X,\psi,\lambda) = a$ имеет единственное решение $\lambda = f^{-1}(t,a)$, при всех $[0,T]$, где функция $f^{-1}(t,a)$ в области $[0,T]\times R$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной a.

Вводим новый неизвестный функция:

$$v(t,x) = \int\limits_0^x u(t,\xi)d\xi + g(t), \quad v_x(t,x) = u(t,x), \quad v(t,0) = g(t). \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) запишем в виде:

$$u_t(t,x) + v(t,x)u_x(t,x) = f(t,x,u(t,x),\lambda(t)),\ t \in [0,T],\ x \in [0,X]. \tag{7}$$

Вводим новые неизвестные функции с дополнительным аргументом s:

$$q(s,t,x) = \int\limits_{r(t,s)}^{x} \exp\left(-\int\limits_s^t u(\xi, q(\xi,t,\tau))d\xi\right) d\tau, \quad \text{при} \quad (s,t,x) \in Q, \tag{8}$$

где

$$\begin{array}{l} Q = \{(s,t,x):\ 0 \le z(t,x) \le s \le t \le T,\ r(t,s) \le x \le X + r(t,0) + \\ + \int\limits_{r(t,o)}^{x} \left(1 - \exp\left(\int\limits_0^t u(\xi, q(\xi,t,\tau))d\xi\right)\right) d\tau\}; \\ r(t,s) = \int\limits_s^t g(\tau)txp\left(\int\limits_\tau^t u(\xi, q(\xi,t,r(t,\tau))d\xi\right) d\tau\}, \quad \text{при} \quad (t,s) \in D, \end{array} \tag{9}$$

где $D = \{(t,s) : 0 \le s \le t \le T\}$,

$$x = \int\limits_{z(t,x)}^{t} g(\tau)txp\left(\int\limits_\tau^t u(\xi, q(\xi,t,r(t,\tau))d\xi\right) d\tau\}, \quad \text{при} \quad (t,x) \in G_1, \tag{10}$$

где $G_1 = \{(t,x) : 0 \le z(t,x) \le t \le T,\ 0 \le x \le r(t,0)\}$,

$$\begin{array}{l} z(t,x) = t - \int\limits_0^x \left(\frac{1}{g(z(t,x))}\right) \exp\left(- \int\limits_{z(t,\tau)}^{t} u(\xi, q(\xi,t,\tau))d\xi\right) d\tau, \\ z(t,0) = t,\ \text{при}\ t \in [0,T], \end{array} \tag{11}$$

$$z(t,x) = 0, \quad \text{при} \quad (t,x) \in G_2, \tag{12}$$

где

$$G_2 = \{(t,x):\ 0 \le t \le T,\ r(t,0) \le x \le X + r(t,0) +$$

$$+ \int\limits_{r(t,o)}^{x} \left(1 - \exp\left(\int\limits_0^t u(\xi, q(\xi,t,\tau))d\xi\right)\right) d\tau\};$$

В уравнении (7) заменяем t на ρ и x на $p(\rho,t,x)$, и имеем:

$$\begin{array}{ll} u_\rho(\rho, p(\rho,t,x)) & +v(\rho, p(\rho,t,x))u_x(\rho, p(\rho,t,x)) = \\ & f(\rho, p(\rho,t,x), u(\rho, p(\rho t,t,x)), \lambda(t)). \end{array} \tag{13}$$

Уравнение (13) интегрируя по ρ от $z(t,x)$ до s, получим:

$$u(s,p(s,t,x))=\varphi\left(\int\limits_{r(t,z(t,x))}^{x}\exp\left(-\int\limits_{z(t,x)}^{t}u(\xi,q(\xi,t,\tau))d\xi\right)d\tau\right)-\varphi(0)+$$

$$+\beta(z(t,x))+\int\limits_{z(t,x)}^{s}f(\rho,\int\limits_{r(t,\rho)}^{x}\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t}u(\xi,q(\xi,t,\tau))d\xi\right)d\tau,$$

$$u(\rho,\int\limits_{r(t,\rho)}^{x}\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t}u(\xi,q(\xi,t,\tau))d\xi\right)d\tau),\lambda(\rho))d\rho. \tag{14}$$

В уравнении (8)-(12) и (14) полагая $u(\rho,p(\rho,t,x))=w(\rho,t,x)$, получим:

$$q(s,t,x)=\int\limits_{r(t,s)}^{x}\exp\left(-\int\limits_{s}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau,\quad \text{при}\quad (s,t,x)\in Q, \tag{15}$$

где

$$Q=\{(s,t,x):\ 0\le z(t,x)\le s\le t\le T,\ r(t,s)\le x\le X+r(t,0)+$$

$$+\int\limits_{r(t,0)}^{x}\left(1-\exp\int\limits_{0}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau\};$$

$$r(t,s)=\int\limits_{s}^{t}g(\tau)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}w(\xi,t,r(t,\tau))d\xi\right)d\tau,\quad \text{при}\quad (t,s)\in D; \tag{16}$$

$$x=\int\limits_{z(t,x)}^{t}g(\tau)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}w(\xi,t,r(t,\tau))d\xi\right)d\tau,\quad \text{при}\quad (t,x)\in G_1, \tag{17}$$

где

$$G_1=\{(t,x):0\le z(t,x)\le t\le T,0\le x\le r(t,0)\},$$

$$z(t,x)=t-\int\limits_{0}^{x}(1/g(z(t,x)))\exp\left(-\int\limits_{z(t,x)}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau,$$

$$z(t,0)=t,\ \text{при}\ t\in[0,T], \tag{18}$$

$$z(t,x)=0 \quad \text{при} \quad (t,x)\in G_2, \tag{19}$$

где

$$G_2=\{(t,x):\ 0\le t\le T,$$

$$r(t,0)\le x\le X+r(t,0)+\int\limits_{r(t,0)}^{x}\left(1-\exp\int\limits_{0}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau\};$$

$$\begin{aligned} w(s,t,x)=\beta(z(t,x))+\varphi\left(\int\limits_{r(t,z(t,x))}^{x}\exp\left(-\int\limits_{z(t,x)}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau\right)-\varphi(0)+\\ +\int\limits_{z(t,x)}^{s}f(\rho,\int\limits_{r(t,\rho)}^{x}\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau,w(\rho,t,x),\lambda(\rho))d\rho.. \end{aligned} \tag{20}$$

В уравнении (20) полагая $s=t$, $x=X$, учетом (4), имеем:

$$\begin{aligned} \psi(t)=\beta(z(t,X))+\varphi\left(\int\limits_{r(t,z(t,X))}^{X}\exp\left(-\int\limits_{z(t,X)}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau\right)-\varphi(0)+\\ +\int\limits_{z(t,X)}^{s}f(\rho,\int\limits_{r(t,\rho)}^{X}\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau,w(\rho,t,X),\lambda(\rho))d\rho. \end{aligned} \tag{21}$$

В уравнении (21) берем производную по t, и получим:

$$\psi'(t)=[\beta'(z(t,X))-f(z(t,X),0,w(z(t,X),t,X),\lambda(z(t,X)))]z_t(t,X)-$$

$$-\int\limits_{z(t,X)}^{s}f_x(\rho,\int\limits_{r(t,\rho)}^{X}\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau,w(\rho,t,X),\lambda(\rho))\times$$

$$\times\left\{\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t}w(\xi,t,r(t,\rho))d\xi\right)r_t(t,\rho)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r(t,\rho)}^{X}\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)\left[u(t,\tau)+\int\limits_{\rho}^{t}w_t(\xi,t,\tau)d\xi\right]d\tau\right\}d\rho+$$

$$+\int\limits_{z(t,X)}^{s}f_u(\rho,\int\limits_{r(t,\rho)}^{X}\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t}w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau,w(\rho,t,X),\lambda(\rho))w_t(\rho,t,X)d\rho. \tag{22}$$

В силу условия 3) уравнение (22) разрешая относительно $\lambda(t)$, получим:

$$\lambda(t) = f^{-1}(F(z(t,X), z_t(t,X), w(s,t,\tau), w_t(s,t,\tau)u(t,\tau), r(t,\rho), r_t(t,\rho))). \tag{23}$$

ЛЕММА 1. *Пусть функции $r(t,s)$, $z(t,x)$, $w(s,t,x)$, $\lambda(t)$ удовлетворяют соотношений (16), (17), (18), (19), (20), (23), и выполнены условия 1), 2), 3) и условия согласования (5), причем $w(s,t,x) \in C^{1,1,1,}(Q)$, $r(t,s) \in C^{1,1}(D)$, $z(t,x) \in C^{1,1}(G_1)$, тогда при достаточно малом $T > 0$ и достаточно большом значении $\min\limits_{t\in[0,T]} g(t)$ функции $\{u(t,x), \lambda(t)\}$ будут удовлетворять задачу (1)-(4).*

Наоборот, если задача (1)-(4) имеет решение $\{u(t,x),\ \lambda(t)\}$ из класса $C^{1,1}(G) \times C[0,T]$, выполнено условия согласования (5), функции $q(s,t,x)$, $r(t,s)$, $z(t,x)$ удовлетворяют соотношениям:

$$r(t,s) = \int\limits_s^t g(\tau)\exp\left(\int\limits_\tau^t u(\xi, q(\xi,t,r(t,\tau)))d\xi\right)d\tau, \quad \text{при } (t,s) \in D, \tag{24}$$

$$q(s,t,x) = \int\limits_{r(t,)s}^x \exp\left(-\int\limits_s^t u(\xi, q(\xi,t,\tau))d\xi\right)d\tau, \quad \text{при } (s,t,x) \in Q, \tag{25}$$

$$x = \int\limits_{z(t,x)}^t g(\tau)\exp\left(\int\limits_\tau^t u(\xi, q(\xi,t,r(t,\tau)))d\xi\right)d\tau, \quad \text{при } (t,x) \in G_1, \tag{26}$$

$$z(t,x) = t - \int\limits_0^x (1/g(z(t,x)))\exp\left(-\int\limits_{z(t,x)}^t u(\xi, q(\xi,t,\tau))d\xi\right)d\tau,$$

$$z(t,0) = t,\ t \in [0,T], \tag{27}$$

$$z(t,x) = 0 \quad \text{при } (t,x) \in G_2, \tag{28}$$

то функции $w(s,t,x) = u(s,q(s,t,x))$, $r(t,s)$, $z(t,x)$, $\lambda(t)$ будут удовлетворять системе соотношений (16), (17), (18), (19), (20), (23).

Доказательство леммы производится методом интегрирования по частям и правилам дифференцированием.

В уравнении (20) полагая $s = t$, получим:

$$\begin{gathered} u(t,x) = \beta(z(t,x)) + \varphi\left(\int\limits_{r(t,z(t,x))}^x \exp\left(-\int\limits_{z(t,x)}^t w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau\right) - \varphi(0) + \\ + \int\limits_{z(t,x)}^t f(\rho, \int\limits_{r(t,\rho)}^x \exp\left(-\int\limits_\rho^t w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau, w(\rho,t,x), \lambda(\rho))d\rho. \end{gathered} \tag{29}$$

В (16), (18), (20), (13) взяв производную по t, x, получим:

$$
\begin{gathered}
r_t(t,s) = g(t) + \int\limits_s^t g(\tau)\exp\left(\int\limits_\tau^t w(\xi,t,r(t,\tau))d\xi\right)u(t,r(t,\tau))d\tau + \\
+\int\limits_s^t g(\tau)\exp\left(\int\limits_\tau^t w(\xi,t,r(t,\tau))d\xi\right)\int\limits_\tau^t [w_t(\xi,t,r(t,\tau)) + w_x(\xi,t,r(t,\tau))r_t(t,\tau)]d\xi d\tau,
\end{gathered} \tag{30}
$$

$$
\begin{gathered}
z_t(t,x) = 1 + \int\limits_0^x \frac{g'(z(t,x))z_t(t,x)}{g^2(z(t,x))}\exp\left(-\int\limits_{z(t,\tau)}^t w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau - \\
-\int\limits_0^x \frac{1}{g(z(t,x))}\exp\left(-\int\limits_{z(t,\tau)}^t w(\xi,t,\tau)d\xi\right)w(z(t,\tau),t,\tau)z_t(t,\tau)d\tau + \\
+\int\limits_0^x \frac{1}{g(z(t,x))}\exp\left(-\int\limits_{z(t,\tau)}^t w(\xi,t,\tau)d\xi\right)\left[u(t,\tau) + \int\limits_{z(t,\tau)}^t w_t(\xi,t,\tau)d\xi\right]d\tau,
\end{gathered} \tag{31}
$$

$$
z_x(t,x) = -\frac{1}{g(z(t,x))}\exp\left(-\int\limits_{z(t,x)}^t w(\xi,t,x)d\xi\right). \tag{32}
$$

$$
\begin{gathered}
w_t(s,t,x) = [\beta'(z(t,x)) - f(z(t,x),0,w(z(t,x),t,x),\lambda(z(t,x)))]z_t(t,x) - \\
-\int\limits_{z(t,x)}^s f_x(\rho,\int\limits_{r(t,\rho)}^x \exp\left(-\int\limits_\rho^t w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau, w(\rho,t,x),\lambda(\rho))\times \\
\times\left\{\exp\left(-\int\limits_\rho^t w(\xi,t,r(t,\rho))d\xi\right)r_t(t,\rho) + \right. \\
\left. +\int\limits_{r(t,\rho)}^x \exp\left(-\int\limits_\rho^t w(\xi,t,\tau)d\xi\right)\left[u(t,\tau) + \int\limits_\rho^t w_t(\xi,t,\tau)d\xi\right]d\tau\right\}d\rho + \\
+\int\limits_{z(t,x)}^s f_u(\rho,\int\limits_{r(t,\rho)}^x \exp\left(-\int\limits_\rho^t w(\xi,t,\tau)d\xi\right)d\tau, w(\rho,t,x),\lambda(\rho))w_t(\rho,t,x)d\rho,
\end{gathered} \tag{33}
$$

$$
w_x(s,t,x) = [\beta'(z(t,x)) - f(z(t,x),0,w(z(t,x),t,x),\lambda(z(t,x)))]z_x(t,x) +
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_{z(t,x)}^{s} f_x(\rho, \int\limits_{r(t,\rho)}^{x} \exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t} w(\xi,t,\tau)d\xi\right) d\tau, w(\rho,t,x), \lambda(\rho)) \exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t} w(\xi,t,x)d\xi\right) d\rho + \\
&+\int\limits_{z(t,x)}^{s} f_u(\rho, \int\limits_{r(t,\rho)}^{x} \exp\left(-\int\limits_{\rho}^{t} w(\xi,t,\tau)d\xi\right) d\tau, w(\rho,t,x), \lambda(\rho)) w_x(\rho,t,x) d\rho.
\end{aligned} \tag{34}
$$

ЛЕММА 2. *Существует и явно определяется из исходных данных величина* $T > 0$, *такое, что система соотношений (16), (17), (18), (19), (20), (23), (30), (31), (32), (33), (34) имеет единственное решение* $r(t,s)$, $z(t,x)$, $w(s,t,x)$, $\lambda(t)$, $r_t(t,s)$, $z_t(t,x)$, $z_x(t,x)$, $w_t(s,t,x)$, $w_x(s,t,x)$, *причем* $w(s,t,x) \in C^{1,1,1}(Q)$, $r(t,s) \in C^{1,1}(D)$, $z(t,x) \in C^{1,1}(G_1)$.

Лемма доказывается методом последовательных приближений.

ТЕОРЕМА. *Если выполняются условия 1), 2), 3) и условия согласования (5), то найдется* $T > 0$ *такое, что задача (1)-(4) имеет единственное ограниченное решение* $\{u(t,x), \lambda(t)\}$ *из класса* $C^{1,1}(G) \times C[0,T]$.

Доказательство теоремы следует из доказательств лемм.

Литература

[1] *Иманалиев М.И.* Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.

[2] *Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.* К теории нелинейных интегро - дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. РАН. –1992. – Т. 323, N3. – С. 410 – 414.

[3] *Асанов А., Сулайманов Б.Э.* Обратная задача для нелинейных интегро - дифференциальных уравнений // Тр. Междунар. науч. конф., посв. 70-летию академика Иманалиева М.И., "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике"/ Вестник КГНУ Сер.3, –Бишкек, 2001 - Вып. 6. – С. 74 – 79.

[4] *Асанов А., Мырзапаязова З.К.* Об одной обратно-краевой задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Материалы междунар. науч.-техн. симпозиума "Образование через науку", том 1, -Бишкек: КГТУ им. И. Раззакова, 2004. – С. 485 – 488.

[5] *Мырзапаязова З.К.* Метод дополнительного аргумента к обратно-краевой задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Материалы респуб. научно-методич. конф., посв. 50 летию КГТУ им. И. Раззакова и 75 летию проф. Усубакунова Р.У. "Проблемы прикладной математики, механики и инженерного образования". –Бишкек: КГТУ им. И. Раззакова, 2005. – С. 61– 65.