Смешанная краевая задача для уравнения составного типа с оператором теплопроводности в полуполосе

М. Орынбасаров
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы Казахстан

Аннотация

Доказано существование регулярного решения смешанной краевой задачи для уравнения составного типа 3-го порядка методом нагруженного уравнения теплопроводности с использованным функции Грина и теории тепловых потенциалов

1. Постановка задачи. Требуется найти регулярное решение $u(x,y,t)$ уравнения составного типа

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u) = F(x,y,t) \tag{1}$$

в области $\Omega_t \equiv \{(x,y,t): 0 < x < l,\ 0 < y < \infty;\ t > 0\}$ удовлетворяющие начальному условию

$$u(x,y,0) = f(x,y) \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u(0,y,t) = \varphi_0(y,t) \tag{3}$$

$$u_x(0,y,t) = \varphi_1(y,t) \tag{4}$$

$$u(l,y,t) = \varphi_2(y,t) \tag{5}$$

$$(\frac{\partial u}{\partial y} + hu)\Big|_{y=0} = \psi(x,t) \tag{6}$$

где заданные функции

$$F(x,y,t) \in C^{0,1,0}_{x,y,t}(\Omega_t), \quad f(x,y) \in C^{1,1}_{x,y}(\Omega_0), \quad \varphi_0(y,t) \in C^{0,1}_{y,t}(R^+_t), \quad \varphi_1(y,t) \in C^{2,1}_{y,t}(R^+_t),$$

$$\psi(x,t) \in C^{2,0}_{x,t}(0,l) \text{ и ограничены.} \tag{7}$$

Корме того выполняется следующее условия согласования для непрерывности решения в замкнутой области $\bar{\Omega}_t$:

$$f(0,y) = \varphi_0(y,0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} = \varphi_1(y,0), \quad (\frac{\partial f}{\partial y} + hf)\Big|_{y=0} = \psi(x,0),$$

$$(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + h\varphi_0)\Big|_{y=0} = \psi(0,t), \quad (\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + h\varphi_1)\Big|_{y=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{x=0}, \quad (\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + h\varphi_2)\Big|_{y=0} = \psi(l,t) \tag{8}$$

Поставленную краевую задачу (1)-(6) будем решать методом нагруженных уравнений. Для того уравнения (1) будем интегрировать по x от 0 до x. Тогда имеем

$$u_t - a^2\Delta u = -a^2 u_{xx}(0,y,t) + F(x,y,t), \tag{9}$$

где

$$F_1(x,y,t) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \int\limits_0^x F(\xi,y,t)d\xi. \tag{10}$$

Нагруженное уравнение (9) будем решать в области Ω_t с начальными условием (2) и краевыми условиями (4)-(5)-(6).

2. Сведение краевой задачи (9)-(2)-(4)-(5)-(6) к интегро - дифференциальному уравнению.

Нетрудно убедиться, что функция Грина смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности с условиями (4)-(5)-(6) в полуполосе является функция

$$Q(x\pm\xi, y\pm\eta, t) = Q_1(x\pm\xi, t)\cdot Q_2(y\pm\eta, t)$$

где

$$Q_1(x\pm\xi,\, t) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n[G(x-\xi+2nl,\, t) + G(x+\xi+2nl,\, t)]$$

$$Q_2(y\pm\eta, t) = G(y-\eta,t) + G(y+\eta,t) - 2h\int\limits_0^x G(y+\eta+\zeta,t)e^{-h\zeta}d\zeta.$$

$G(x-\xi,y-\eta,t) = G(x-\xi,t)G(y-\eta,t)$ - фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Считая первую часть уравнения (9) известной функцией решение краевой задачи (9)-(2)-(4)-(5)-(6) при помощи функции Грина $Q(x\pm\xi, y\pm\eta, t)$можно представить в виде

$$u(x,y,t) = \int\limits_0^l\int\limits_0^\infty f(\xi,\eta)Q(x\pm\xi,\ y\pm\eta,t)d\xi - a^2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty \varphi_1(\eta,\tau)Q(x,y+\eta,t-\tau)d\eta +$$

$$+a^2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty \varphi_2(\eta,\tau)\left.\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right|_{\xi=l}d\eta - a^2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l \psi(\xi,t)Q(x\pm\xi,\ y,t-\tau)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^\infty \left[F_1(\xi,\eta,\tau) - a^2 u_{xx}(0,\eta,\tau)\right]Q(x\pm\xi,\ y\pm\eta,t-\tau)d\xi d\eta. \tag{11}$$

Отсюда относительно неизвестной функции $u(x,y,t)$ получим следующее интегро - дифференциальное уравнения

$$u(x,y,t) = -a^2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^\infty u_{xx}(0,\eta,\tau)Q(x\pm\xi,y\mp\eta,t-\tau)d\xi d\eta + \Phi(x,y,t) \tag{12}$$

где

$$\Phi(x,y,t)=\int_0^l\int_0^\infty f(\xi,\eta)Q(x\pm\xi,\ y\pm\eta,t)d\xi d\eta-a^2\int_0^t d\tau\int_0^\infty \varphi_1(\eta,\tau)Q(x,y+\eta,t-\tau)d\eta+$$

$$+a^2\int_0^t d\tau\int_0^\infty \varphi_2(\eta,\tau)\left.\frac{\partial Q}{\partial\xi}\right|_{\xi=l}d\eta-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l \psi(\xi,t)\,Q(x\pm\xi,\ y,t-\tau)d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l\int_0^\infty F_1(\xi,\eta,\tau)Q(x\pm\xi,\ y\pm\eta,t-\tau)d\xi d\eta=$$

$$=V_0[f]-a^2\omega[\varphi_1]+a^2W[\varphi_2]-a^2\omega[\psi]+V[F_1] \tag{13}$$

Для нахождения регулярного решения поставленной краевой задачи (1)-(6) в виде (11) необходимо найти нагруженного слагаемого $u_{xx}(0,y,t)$ из уравнения (12). Исследование показывает, что непосредственно дифференцировать по x два раза равенство (12) нельзя, так как ядро

$$K''_{xx}(x,t-\tau)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^l Q_1(x\pm\xi,t-\tau)d\xi$$

имеет существенную (не интегрируемую) особенность при $x=0$. Поэтому сперва выделяем главную часть ядро $K(x,t-\tau)$.

3. Выделение главной часть ядра $K(x,t-\tau)$

Для этого функции Грина $Q_1(x\pm\xi,\ t-\tau)$ представим в виде

$$Q_1(x\pm\xi,\ t-\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n[G(x-\xi+2nl,\ t-\tau)+G(x+\xi+2nl,\ t-\tau)]=$$

$$=Q_1^0(x\pm\xi,\ t-\tau)+\tilde{Q}_1(x\pm\xi,\ t-\tau) \tag{14}$$

где $Q_1^0(x\pm\xi,\ t-\tau)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}[G(x-\xi+2nl,\ t-\tau)+G(x+\xi+2nl,\ t-\tau)]$ функция Грина для задачи Неймана для отрезка $[0,l]$,

$$\tilde{Q}_1=-2\sum_{-\infty}^{\infty}[G(x-\xi+2l(2k+1),\ t-\tau)+G(x+\xi+2l(2k+1),\ t-\tau)].$$

Таким образом, ядро $K(x,t-\tau)$ можно представить в виде

$$K(x,t-\tau)=K_0(x,t-\tau)+K_1(x,t-\tau), \tag{15}$$

где

$$K_0(x,t-\tau)=\int\limits_0^l Q_1^0(x\pm\xi,\ t-\tau)d\xi,\quad K_1(x,t-\tau)=\int\limits_0^l \tilde{Q}_1(x\pm\xi,\ t-\tau)d\xi.$$

Относительно $K_0(x,t-\tau)$ и $K_1(x,t-\tau)$ справедливо следующие утверждения:

Лемма 1. *При $t>\tau$ имеет место равенство*

$$K_0(x,t-\tau)=\int\limits_0^l Q_0(x\pm\xi,\ t-\tau)d\xi=1. \tag{16}$$

Доказательство очевидно (см [2]).

Лемма 2. *При $t>\tau$ и $x<l$ ядро $K_1(x,t-\tau)\in C^{\infty}_{x,t}$ и производные $D_x^s D_x^r K_1(x,\ t-\tau)$ ограничены, при $x=0$, т.е.*

$$|D_x^s K_1(x,t-\tau)|\le M. \tag{17}$$

Доказательство: Дифференцируя $K_1(x,t-\tau)$ по x имеем

$$\frac{\partial K_1}{\partial x}=\int\limits_0^l \frac{\partial\tilde{Q}_1}{\partial x}d\xi=$$

$$=-2\sum_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^l[\frac{\partial G(x-\xi+2(2k+1)l,\ t-\tau)}{\partial x}+\frac{\partial G(x+\xi+2(2k+1)l,\ t-\tau)}{\partial x}]d\xi=$$

$$=-2\sum_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^l[-\frac{\partial G(x-\xi+2(2k+1)l,\ t-\tau)}{\partial\xi}+\frac{\partial G(x+\xi+2(2k+1)l,\ t-\tau)}{\partial\xi}]d\xi=$$

$$=-2\sum_{-\infty}^{\infty}[-G(x-l+2(2k+1)l,t-\tau)+G(x+l+2(2k+1)l,t-\tau)]=$$

$$=2\sum_{-\infty}^{\infty}[G(x+(4k+1)l,t-\tau)-G(x+(4k+3)l,t-\tau)=$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[G(x-(2n+1)l,t-\tau)-G(x+(2n+1)l,t-\tau)].$$

Отсюда дифференцируя еще раз по x, затем пологая $x=0$. Найдем

$$\left.\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}\right|_{x=0}=4\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n[(2n+1)G((2n+1)l,t-\tau)]\le M.$$

4. Исследование свободного члена $\Phi(x,y,t)$.

Функция $\Phi(x,y,t)$, определяемая равенством (13), состоит из суммы объемных тепловых потенциалов $V_0[f]$, $V[F]$, поверхностных тепловых потенциалов двойного слоя $W[\varphi_2]$ определенного при $\xi = l$ и поверхностных тепловых потенциалов $\omega[\varphi_1]$ и $\omega[\psi]$, определенных соответственно $\xi = 0$ и $\eta = 0$.

Для нахождения нагруженного слагаемого $u_{xx}(0,y,t)$ из интегро - дифференциального уравнения (12) достаточно существование ограниченного и непрерывного производного $\Phi''_{xx}(0,y,t)$.

Из теории тепловых потенциалов ([1]) известен что для объемных потенциалов $V_0[f]$ и $V[F]$ и поверхностного потенциала $W[\varphi_2]$ справедливы утверждения:

Если функция $f(x) \in C(\Omega_0)$ ограничена, то при потенциал $V_0(x,y,t) \in C^{\infty}_{x,y,t}$ и ограничен со всеми производными.

Если функция $F_1(x,t,y) \in C^{\alpha,\alpha,0}_{x,y,t}(\Omega_t)$, то потенциал $V(x,y,t) \in C^{2,2,1}_{x,y,t}$ и ограничен со всеми производными.

Если функция $\varphi_2(y,t) \in C(R^+_t)$ ограничена, то поверхностей потенциал двойного $W[\varphi_2] \in C^{\infty}_{x,y,t}$ и ограничен со всеми производными при $x = 0$.

Относительно поверхностных потенциалов $\omega[\varphi_1]$ и $\omega[\psi]$ докажем следующие утверждения:

Лемма 3. *Если функция $\varphi_1(y,t) \in C^{2,1}_{y,t}$ и ограничена и $\varphi_1(y,0) = 0$, то потенциал $\omega[\varphi_1] \in C^2_x$ и представим в виде*

$$\begin{gathered}D^2_x\omega[\varphi_1] = -2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{\infty}(D_\tau - a^2D^2_\eta)\varphi_1 Q(x,y\pm\eta,t-\tau)d\eta+ \\ +2a^2\int\limits_0^t[\varphi_1(\eta,\tau)\frac{\partial Q}{\partial\eta} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}Q]_{\eta=0}d\tau.\end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство. При $x \neq 0$ функция Грина $Q(x,y\pm\eta,\ t-\tau) \in C^{\infty}_{x,t,y}$ так, что потенциал $\omega[\varphi_1]$ можно дифференцировать под знаком интеграла. Поэтому, дифференцируя по x найдем

$$D^2_x\omega[\varphi_1] = -2a^2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{\infty}\varphi_1(\eta,\tau)D^2_xQd\eta = \left|\frac{\partial^2Q}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial^2Q}{\partial y^2})\right| =$$

$$= -2a^2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{\infty}\varphi_1(\eta,\tau)[\frac{1}{a^2}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial^2Q}{\partial y^2}]d\eta = -2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{\infty}\varphi_1(\eta,\tau)[-\frac{\partial Q}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2Q}{\partial y^2}]d\eta.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая условия $\varphi_1(y,0) = 0$ и $Q|_{\tau=t} = 0$, получим

$$D^2_x\omega[\varphi_2] = -2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{\infty}(D_\tau - a^2D^2_\eta)\varphi_1(\eta,\tau)Q(x,y\pm\eta,t-\tau)d\eta+$$

$$2a^2\int\limits_0^t[\varphi_1(\eta,\tau)\frac{\partial Q}{\partial\eta}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}Q]_{\eta=0}d\tau.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если функция $\psi(x,t)\in C^{2,0}_{x,t}$ ограничена, то потенциал $\omega[\psi]\in C^2_x$ и представим в виде*

$$\begin{aligned}
&D^2_x\omega[\psi]=-a^2\int\limits_0^t\partial\tau\int\limits_0^l\psi''_{\xi\xi}(\xi,t)Q(x\pm\xi,y,t-\tau)]d\xi-\\
&-2a^2\int\limits_0^t\psi'_\xi(0,\tau)Q(x,y,t-\tau)d\tau+2a^2\int\limits_0^t\psi'_\xi(l,\tau)Q(x+l,y,t-\tau)d\tau.
\end{aligned}\tag{19}$$

Доказательство. Для этого потенциал $W[\psi]$ представим в виде

$$W[\psi]=-a^2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\psi(\xi,\tau)Q(x\pm\xi,y,t-\tau)d\xi=$$

$$=-a^2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\psi(\xi,\tau)[G(x-\xi+2nl,\ t-\tau)+G(x+\xi+2nl,t-\tau)]d\xi=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\xi-x=z\\ \xi+x=z\end{array}\right|=-a^2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^t G(y,t-\tau)\{\int\limits_{-x}^{l+x}\psi(x+z,\tau)G(2nl+z,t-\tau)dz-$$

$$-\int\limits_x^{l+x}\psi(z-x,\tau)G(z+2nl,t-\tau)dz\}$$

Теперь дифференцируя по x под знаком интеграла, найдем

$$D_x\omega[\psi]=-a^2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^t G(y,t-\tau)\{\int\limits_{-x}^{l-x}\psi'_\xi(x+z,\tau)G(2nl-z,t-\tau)dz-$$

$$-\int\limits_x^{l+x}\psi_\xi(z-x,\tau)G(z+2nl,t-\tau)dz-\psi(l,\tau)G(x+(2n-1)l,\ t-\tau)+$$

$$+\psi(0,\tau)G(x+2nl,\ t-\tau)+\psi(l,\tau)G(x+2nl,\ t-\tau)-\psi(0,\tau)G(x+2nl,\ t-\tau)\}=$$

$$= -a^2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^t G(y,t-\tau)\{\int_{-x}^{l-x}\psi'_\xi(x+z,\tau)G(2nl-z,t-\tau)dz-$$

$$-\int_x^{l+x}\psi_\xi(z-x,\tau)G(z+2nl,t-\tau)dz\}$$

Еще раз дифференцируя по x получим

$$D_x^2\omega[\psi] = -a^2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^t G(y,t-\tau)\{\int_{-x}^{l-x}\psi''_{\xi\xi}(z+x,\tau)G(2nl-z,t-\tau)dz+$$

$$+\int_x^{l-x}\psi''_{\xi\xi}(z-x,\tau)G(z+2nl,t-\tau)dz-\psi'_\xi(l,\tau)G(x+(2nl+1),t-\tau)+$$

$$+\psi(0,\tau)G(x+2nl,t-\tau)-\psi'_\xi(l,\tau)G(x+(2nl+1),t-\tau)+\psi'_\xi(0,\tau)G(x+2nl,t-\tau)\}=$$

$$= -a^2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^t G(y,t-\tau)d\tau\int_0^l\psi''_{\xi\xi}(\xi,\tau)[G(x-\xi+2nl,t-\tau)+G(x+\xi+2nl,t-$$

$$-\tau)]d\xi+2a^2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^t[\psi'_\xi(l,\tau)G(x+(2n+1)l,t-\tau)-\psi'_\xi(0,\tau)G(x+2nl,t-\tau)]d\tau$$

Лемма 4 доказана.

На основании выше приведенных утверждений 1)-2)-3) и доказанных лемм 3-4 относительно свободного члена $\Phi(x,y,t)$ справедливо.

Теорема 1. *Если заданные функции $F(x,y,t)$, $f(x,y)$, $\varphi_i(y,t)$, $\psi(x,t)$ удовлетворяют условиям (7)-(8), то второе производное $D_x^2\Phi$ существует и при $x=0$ $\Phi''_{xx}(0,y,t)$ представимо в виде*

$$\Phi''_{xx}(0,y,t) = D_x^2V_0[f]_{x=0}+D_x^2V[f]+a^2D_x^2W[\varphi_2]_{x=0}-2\int_0^t d\tau\int_0^\infty(D_\tau-$$

$$-a^2D_\eta^2)]\varphi_1Q(x,y\pm\eta,t-\tau)d\eta\big|_{x=0}-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l\psi''_{\xi\xi}(\xi,\tau)Q(x\pm\xi,y,t-\tau)d\xi\Bigg|_{x=0}+$$

$$+2a^2\int_0^t\psi'_\xi(l,t)Q(x+l,y,t-\tau) \qquad (20)$$

5. Нахождение нагруженного слагаемого $u_{xx}(0, y, t)$.

Для этого, учитывая равенства (14) и лемма 1 интегро-дифференциального уравнения (12) перепишем в виде

$$u(x, y, t) = \Phi(x, y, t) - a^2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty u_{xx}(0, \eta, \tau) \{ \int_0^l Q_1^0(x \pm \xi, t - \tau) d\xi +$$

$$+ \int_0^l \tilde{Q}_1(x \pm \xi, t - \tau) d\xi \} \, Q_2(y \pm \eta, t - \tau) d\eta =$$

$$= a^2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty u_{xx}(0, \eta, \tau)[1 + K_1(x, t - \tau)] Q_2(y \pm \eta, t - \tau) d\eta + \Phi(x, y, t) \tag{21}$$

Отсюда, дифференцируя два раза по x затем полагая $x = 0$ относительно $u_{xx}(0, y, t)$ получим следующее интегральные уравнение Вольтера-Фредгольма 2-го рода

$$u_{xx}(0, y, t) = -a^2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty u_{xx}(0, \eta, \tau) \left. \frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2} \right|_{x=0} Q_2(y \pm \eta, t - \tau) d\eta + \Phi_{xx}(0, y, t). \tag{22}$$

В силу выше доказанного неравенства (17) функция $D_x^2 K_1(x, t - \tau)$ при $x = 0$ непрерывна и ограничена, а функция Грина $Q_2(y \pm \eta, t - \tau)$ имеет слабую (интегрируемую) особенность.

Поэтому полученное интегральное уравнения (21) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательные приближения. Найденную функцию $u_{xx}(0, y, t)$ подставляя в формулу (11), получим решение краевой задачи (9)-(2)-(4)-(5)-(6). Тем самым доказано существование регулярного решения поставленной краевой задачи для уравнения составного типа (1)-(6). Подытожить полученные результаты имеем.

Теорема 2. *Если заданные функции $F(x, y, t)$, $f(x, y)$, $\varphi_i(y, t)$, $\psi(x, t)$ удовлетворяют условиям (7) и условиям согласования (8), то регулярное решение $u(x, y, t)$ краевой задачи (1)-(6) определяются формулой (11), то неизвестная функция $u_{xx}(0, y, t)$ определяет из интегрального уравнения (22).*

Литература

[1] *Орынбасаров М.* Теория тепловых потенциалов и ее применение. Алматы.: Йазай университетi, – 2005, – 70 с.

[2] *Орынбасаров М.* Решение смешанной краевой задачи для уравнения 3-го порядка составного типа в полуполосе // Известия НАН РК. – Алматы. - 2009, N1(63), – С. 3-8.