Критерий единственности решения первой задачи Дарбу с отходом от характеристики для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона

Р.Б. Сеилханова
Актюбинский университет имени С.Баишева
e-mail: srahila@inbox.ru

Аннотация

В данной работе для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона (Э-Д-П) получен критерий единственности решения первой задачи Дарбу с отходом от характеристики.

В теории уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе служат примером некорректности поставленных задач ([1]). В данной работе для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона (Э-Д-П) получен критерий единственности решения первой задачи Дарбу с отходом от характеристики.

1. Постановка задачи и результат. Пусть D_β-конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная конусами $\beta|x|=t$, $|x|=1-t$ и плоскостью $t=0$, где $|x|$-длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$, а $0<\beta=const\le 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S_β, S_1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим уравнение Э - Д - П

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t}u_t = 0, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m\ge 2$, α - действительное число.

Через $u_\alpha(x,t)$ обозначим решение уравнения (1) при данном α. В качестве задачи Дарбу с отходом от характеристики для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}_\beta\backslash S)\cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_\alpha|_S = 0,\ u_\alpha|_{S_\beta} = 0 \text{ при } \alpha<1; \tag{2}$$

$$\frac{u_\alpha}{lnt}|_S = 0,\ u_\alpha|_{S_\beta} = 0 \text{ при } \alpha=1; \tag{3}$$

$$(t^{\alpha-1}u_\alpha)|_S = 0,\ u_\alpha|_{S_\beta} = 0 \text{ при } \alpha>1. \tag{4}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\ge 0$, $0\le\theta_1<2\pi$, $0\le\theta_i\le\pi$, $i=2,3,...,m-1$.

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ - система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\le k\le k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l=0,1,\ldots$ – пространства Соболева, а $\widetilde{S}_\beta=\left\{(r,\theta)\in S,\ 0<r<\frac{1}{1+\beta}\right\}$, H_β - проекция области D_β на плоскость (r,t).

Имеет место ([2])

Лемма. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Справедлив следующий критерий единственности решения.

Теорема. Решение задачи 1 $u(x,t) \equiv 0 \Leftrightarrow \beta < 1$.

При $\alpha = 0$ эта теорема получена в [3].

2. Сведение задачи 1 к двумерной задаче. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = 0, \tag{5}$$

где $\delta \equiv -\sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$, $g_1 = 1$, $g_j = (sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2$, $j > 1$.

Так как искомое решение $u_\alpha \in C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде ряда

$$u_\alpha(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{u}_{\alpha,n}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_{\alpha,n}^k(r,t)$-функции, которые будут определены ниже.

Подставив (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([2]), получим

$$L_\alpha \overline{u}_{\alpha,n}^k \equiv \overline{u}_{\alpha,nrr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{u}_{\alpha,nr}^k - \overline{u}_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t}\overline{u}_{\alpha,nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_{\alpha,n}^k = 0,$$

$\lambda_n = n(n+m-2)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,...$, которое, с помощью замены переменных $\overline{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t)$, сводится к уравнению

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k \equiv u_{\alpha,nrr}^k - u_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t} u_{\alpha,nt}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4r^2} u_{\alpha,n}^k = 0. \tag{7_α}$$

Далее, из краевых условий (2)-(4) для функций $u_n^k(r,t)$, соответственно, будем иметь

$$u_{\alpha,n}^k(r,0) = 0, \;\; u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = 0, \;\; k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,...,\alpha < 1; \tag{8}$$

$$\frac{u_{\alpha,t}^k}{lnt}|_{t=0} = 0, u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = 0, k = \overline{1,k_n}, \; n = 0,1,...,\alpha = 1; \tag{9}$$

$$(t^{\alpha-1} u_{\alpha,n}^k)|_{t=0} = 0, u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = 0, \; k = \overline{1,k_n}, \; n = 0,1,...,\alpha > 1. \tag{10}$$

Таким образом, задача 1 сведена к двумерной задаче Дарбу с отходом от характеристики в области H_β для уравнения (7_α).

Решение этой задачи будем изучать в п.4.

Наряду с уравнением (7_α) рассмотрим уравнение

$$L_0 u_{0,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,ntt}^k - \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4r^2} u_{0,n}^k = 0, \tag{7_0}$$

которое, с помощью замены переменных $\xi = \frac{r+t}{2}, \eta = \frac{r-t}{2}$, сводится к уравнению

$$Mu_{0,n}^k \equiv u_{0,n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2} u_{0,n}^k = 0. \tag{11}$$

Решение задачи Коши для (11) с данными

$$u_{0,n}^k(\xi,\xi) \equiv \tau_n^k(\xi), \left(\frac{\partial u_{0,n}^k}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{0,n}^k}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi), \ \frac{\varepsilon}{2} \le \xi \le \frac{1}{2}$$

имеет вид ([4])

$$\begin{gathered} u_{0,n}^k(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \tfrac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) + \\ + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\eta}^{\xi} \left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1)\tfrac{\partial}{\partial N} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1} \right] d\xi_1, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{m-1}{2}} \overline{\tau}_n^k(2\xi)$, $\nu_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{\frac{m-1}{2}} \overline{\nu}_n^k(2\xi)$,

$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu \left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)} \right] = P_\mu(z)$ – функция Римана для уравнения $Mu_{0,n}^k = 0$ ([5]), а $P_\mu(z)$ – функция Лежандра,

$$\mu = n + \frac{(m-3)}{2}, \ \frac{\partial}{\partial N} \Big|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial N^\perp} \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial N^\perp} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) \Big|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$-нормаль к прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1, η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta \le \xi$.

3. Функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (7_α) **и** (7_0)**.** Сначала приведем некоторые свойства оператора L_α, которые необходимы для дальнейших исследований.

Если u_α - решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$u_{2-\alpha} = t^{\alpha-1} u_\alpha \tag{13}$$

является решением уравнения $L_{2-\alpha} u = 0$.

Если u_α - решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$\frac{1}{t} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = u_{\alpha+2} \tag{14}$$

будет решением уравнения $L_{2+\alpha} u = 0$.

Оператор L_α обладает свойством

$$L_\alpha u_\alpha = t^{1-\alpha} L_{2-\alpha}(t^{\alpha-1} u_\alpha). \tag{15}$$

Указанные свойства устанавливаются аналогично тому, как они были доказаны для уравнения (1) ([6]).

Из равенства (13) имеем

$$u_{2-\alpha-2p} = t^{\alpha+2p-1} u_{\alpha+2p},$$

к которому применив p раз формулу (14), а затем (13), получим

$$u_{2-\alpha} = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \left(t^{\alpha+2p-1} u_{\alpha+2p}\right). \tag{16}$$

Соотношение (16) является фундаментальной формулой ([6]) для решения задачи Коши.

Пусть $p \geq 0$, $q \geq 0$ - наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha + 2p \geq m - 1,\ 2 - \alpha + 2q \geq m - 1.$$

Утверждение 1. Если $u^{2,k}_{0,n}(r,t)$ - решение задачи Коши для уравнения (7_0), удовлетворяющее условию

$$u^{2,k}_{0,n}(r,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t} u^{2,k}_{0,n}(r,0) = \nu^k_n(r), \tag{17}$$

то функция

$$u^{2,k}_{\alpha,n}(r,t) = \gamma_{-\alpha} t^{-\alpha} \int\limits_0^1 u^{2,k}_{0,n}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv \gamma_{-\alpha}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) D^{\frac{\alpha}{2}}_{0t^2} u^{2,k}_{0,n}(r,t) \tag{18}$$

при $\alpha < 0$ будет решением уравнения (7_α), удовлетворяющим условию

$$u^{2,k}_{\alpha,n}(r,0) = 0,\ \lim_{t\to 0} t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} u^{2,k}_{\alpha,n} = \nu^k_n(r). \tag{19}$$

Если же $0 < \alpha < 1$, то функция

$$\begin{aligned} u^{2,k}_{\alpha,n}(r,t) &= \gamma_{2-k+2q} \left(\tfrac{1}{t}\tfrac{\partial}{\partial t}\right)^q \left[t^{1-k+2q} \int\limits_0^1 u^{1,k}_{0,n}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi\right] \equiv \\ &\equiv \gamma_{2-\alpha+2q} 2^{q-1}\Gamma\left(q - \tfrac{\alpha}{2} + 1\right) D^{\frac{\alpha}{2}-1}_{0t^2}\left[\tfrac{u^{1,k}_{0,n}(r,t)}{t}\right] \end{aligned} \tag{20}$$

является решением уравнения (7_α) с начальными данными (19), где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, D^α_{0t} – оператор Римана - Лиувилля ([6]), а $u^{1,k}_{0,n}(r,t)$ – решение уравнения (7_0) с начальными условиями

$$u^{1,k}_{0,n}(r,0) = \frac{\nu^k_n(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},\ \frac{\partial}{\partial t} u^{1,k}_{0,n}(r,0) = 0. \tag{17$'$}$$

Утверждение 2. Если $u^{1,k}_{0,n}(r,t)$ - решение задачи Коши для уравнения (7_0), удовлетворяющее условию

$$u^{1,k}_{0,n}(r,0) = \tau^k_n(r),\ \frac{\partial}{\partial t} u^{1,k}_{0,n}(r,0) = 0, \tag{21}$$

то функция

$$u_{0,n}^{1,k}(r,t) = \gamma_\alpha \int\limits_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi \equiv 2^{-1}\gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{u_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] \quad (22)$$

при $\alpha > 0$ есть решение уравнения (7_α), удовлетворяющее условию (21).

Утверждение 3. Если $u_{0,n}^{1,k}(r,t)$ - решение задачи Коши для уравнения (7_0), удовлетворяющее условию (21), то функция

$$u_{1,n}^{1,k}(r,t) = \int\limits_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} ln[t(1-\xi^2)]\partial\xi \quad (23)$$

является решением уравнения $L_1 u = 0$ с начальными данными

$$\frac{u_{1,n}^{1,k}}{lnt}|_{t=0} = \tau_n^k(r). \quad (24)$$

Справедливость приведенных утверждений устанавливается аналогичным образом, как они доказаны для уравнения (1) и волнового уравнения ([7-9]).

Приведем некоторые следствия из утверждений 2, 3.

Сначала рассмотрим случай $\alpha < 0, \ \ \alpha \neq -(2r+1), \ \ r = 0,1,....$ Если $u_{0,n}^{1,k}(r,t)$ - решение задачи Коши для уравнения (7_0) с данными

$$u_{0,n}^{1,k}(r,0) = \frac{\tau_n^k(r)}{(1-\alpha)...(\alpha+2p-1)}, \ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0, \quad (25)$$

то из утверждения 2 следует, что функция

$$u_{\alpha+2p,n}^{1,k}(r,t) = \gamma_{\alpha+2p}\int\limits_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}+p-1}d\xi$$

является решением уравнения $L_{\alpha+2p}u = 0$, удовлетворяющим начальному условию (25).

Тогда из соотношений (16) и (13) вытекает, что функция

$$u_{\alpha,n}^{1,k}(r,t) = t^{1-\alpha}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \left(t^{\alpha+2p-1}u_{\alpha+2p,n}^{1,k}\right) \equiv \gamma_{k+2p}2^{p-1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+p\right)t^{1-\alpha}D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{u_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] \quad (26)$$

есть решение уравнения (7_α) и удовлетворяет условию (21).

Пусть $\alpha = -(2r+1)$. Если $u_{0,n}^{1,k}(r,t)$ - решение задачи Коши для (7_0) с данными (21), то из (13), (16) и из утверждения 3 нетрудно получить, что функция

$$u_{-(2r+1),n}^{1,k}(r,t) = t^{2(r+1)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{r+1}\left[\int\limits_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}ln(t(1-\xi^2))d\xi\right] \quad (27)$$

является решением задачи Коши для $L_{-(2r+1)}u = 0$, удовлетворяющим условию (21).

Используя [10, лемма 1. 14. 2], соотношение (27) можно записать в виде

$$u_{-(2r+1),n}^{1,k}(r,t) = \frac{a}{2}t^{2(r+1)}D_{0t^2}^{\frac{1}{2}+r}\left[\frac{u_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right], \ \ a = \frac{1}{2}\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} - lnt. \quad (28)$$

4. Доказательство теоремы для задачи 1. Пусть $\beta < 1$. Рассмотрим задачу 1 при $\alpha < 1$. В этом случае приходим к задаче Дарбу с отходом от характеристики для уравнения (7_α) с данными

$$u^{2,k}_{\alpha,n}(r,0)=0, \;\; u^{2,k}_{\alpha,n}(r,\beta r)=0, \; k=\overline{1,k_n}, \; n=0,1,.... \tag{29}$$

Используя формулы (18), (20), краевую задачу (7_α) , (29) сводим к задаче для уравнения (7_0) с данными

$$u^{2,k}_{0,n}(r,0)=0, \;\; u^{2,k}_{0,n}(r,\beta r)=0$$

при $\alpha \le 0$ и к задаче для (7_0) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t}u^{2,k}_{0,n}(r,0)=0, \;\; u^{2,k}_{0,n}(r,\beta r)=0 \tag{30}$$

при $0 < \alpha < 1$. Эти задачи, как показано в [3], имеют нулевые решения.

Следовательно, с учетом утверждения 1 получим тривиальное решение задачи (7_α), (8) в классе $C(\overline{H}_\beta)\cap C^2(H_\beta)$.

Рассмотрим случай $\alpha = 1$. В этом случае также приходим к задаче Дарбу с отходом от характеристики для (7_α) с данными

$$\frac{u^k_{1,n}}{lnt}|_{t=0}=0, \; u^k_{1,n}(r,\beta r)=0, \tag{31}$$

которое, в силу утверждения 3, сводится к краевой задаче для (7_0) с условием (30).

Таким образом, задача (7_α), (9) также имеет нулевое решение.

Используя формулы (15), (13), задачу (7_α), (10) сводим к исследованному случаю $\alpha < 1$.

Следовательно, решение задачи 1 при $\beta < 1$ $u(x,t)\equiv 0$.

Теорема в одну сторону доказана.

Пусть теперь решение задачи 1 $u(x,t)\equiv 0$. Покажем, что $\beta < 1$.

Предположим противное, т.е. $\beta = 1$. В этом случае, в [11,12] доказано, что задача 1 имеет бесчисленное множество нетривиальных решений. Приходим к противоречию.

Литература

[1] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448с.

[2] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254с.

[3] *Алдашев С.А.* // Известия НАН РК, сер. физ.-мат. наук, 2007, – N5. – С. 3-6

[4] *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. – М: Изд - во АН СССР, 1959. – 164с.

[5] *Copson E.T.* New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type. // J. Rath.Mech. and Anal., 1958, 1, – p.324-348.

[6] *Weinstein A.* The Fifth Simposium in applied Math. MCGraw - Hill. New York, 1954. – p. 137-147.

[7] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. – Новосибирск: НГУ, 1973. – 144с.

[8] *Алдашев С.А.* // Дифференциальные уравнения, 1976. – Т.12. – N6. – С.3-14.

[9] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. – 167с.

[10] *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение, Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. – 298с.

[11] *Алдашев С.А.* Критерий единственности решения задачи Дарбу-Проттера для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона. // Математический журнал, Алматы: ИМ МОиН РК, 2003. – Т.3. – N3(9). – С.12-19.

[12] *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. – Орал: ЗКАТУ, 2007. – 139с.